



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

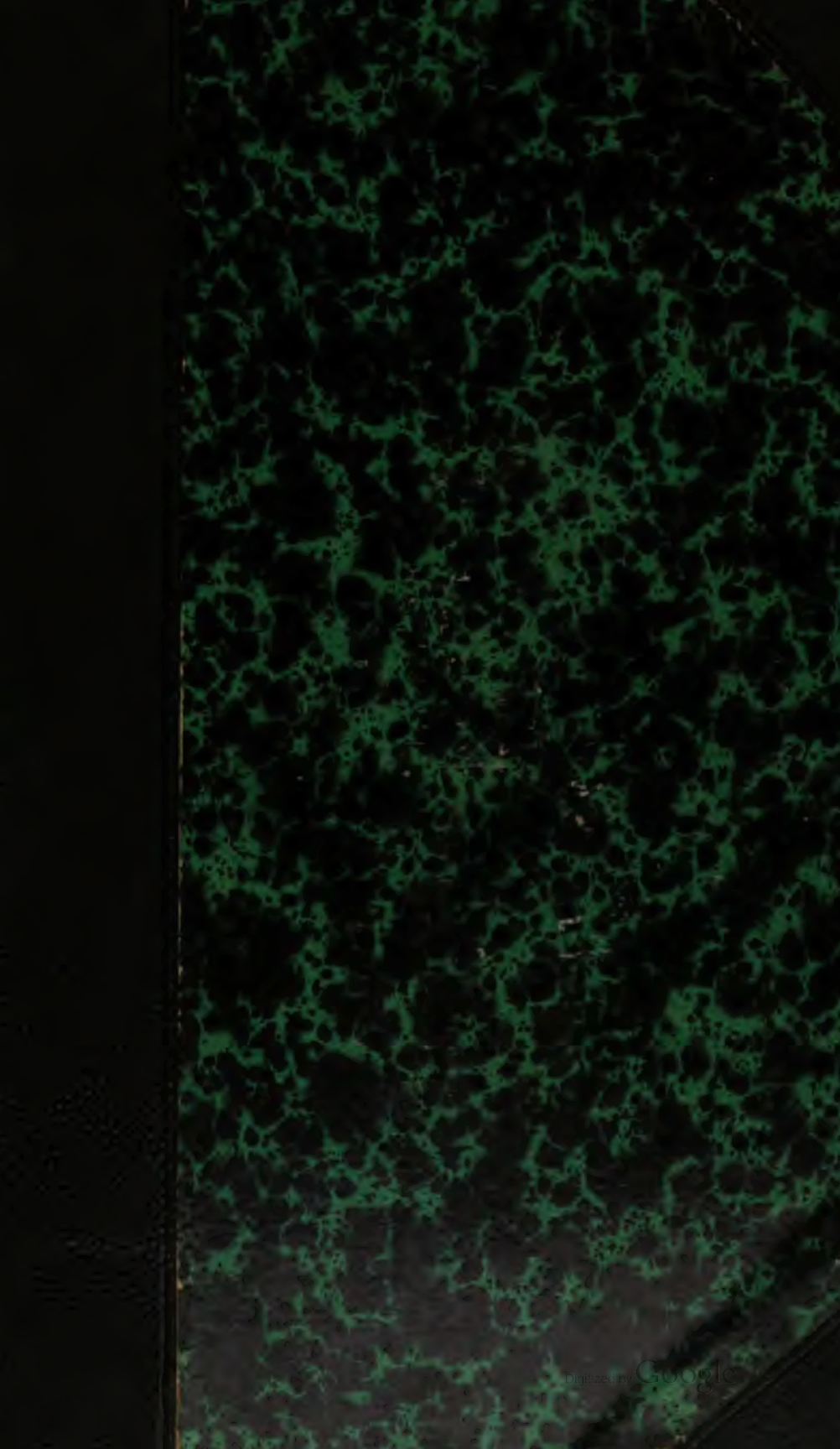
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

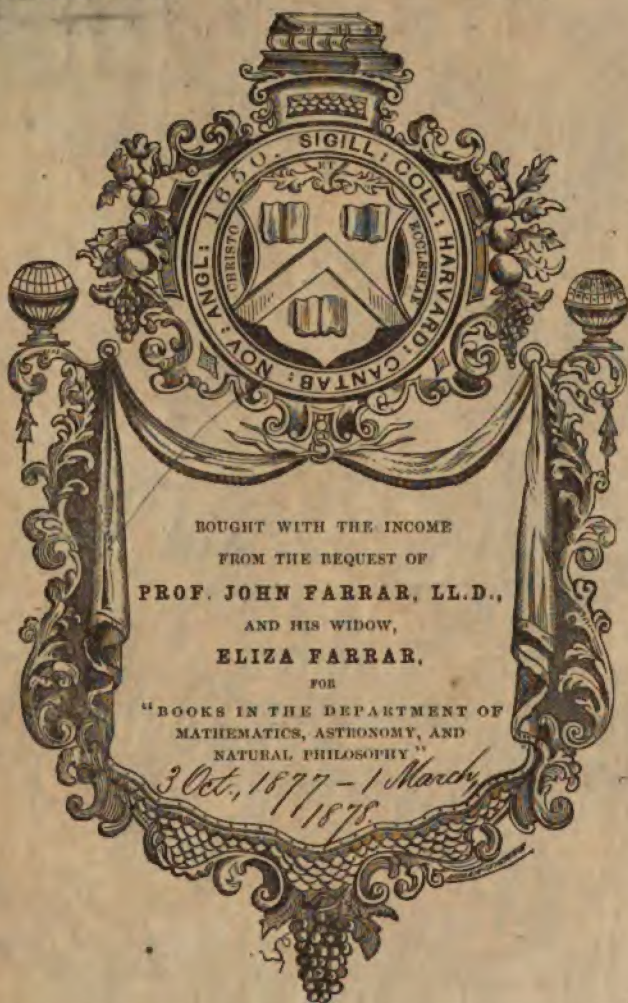
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>





Sci 885.25

Bd. Jan., 1879.



SCIENCE CENTER LIBRARY















**ARCHIV**

31/2  
82

der

# **MATHEMATIK UND PHYSIK**

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe.**

**Einundsechzigster Teil.**

---

**Leipzig.**

**C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,  
J. Sengbusch.**

**1877.**



~~135.4~~

Sci 885.25

1877, Oct. 3 - 1878, March 1.  
Favorland.

# Inhalts-Verzeichniss

## des einundsechzigsten Theils.

№ der Abhandlung.

Heft. Seite.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.

II.	Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten. Von Hans Naegelsbach . . . . .	I.	19
VIII.	Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Fortsetzung von XV. in T. LX. Von Alfred Siebel . . . . .	II.	122
XV.	Ueber Interpolation. Von Nell . . . . .	II.	185
XXI.	Summirung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ Von G. Dobinski . . . . .	III.	333
XXXIII.	Producte einiger Factorenreihen. Von G. Dobinski . . . . .	IV.	434
XXXIII.	Allgemeinster Ausdruck der Richtungscosinus einer Geraden in rationalen Brüchen. Von R. Hoppe . . . . .	IV.	438
XXXIII.	Summation zweier Reihen. Von Anton Sy'kora . . . . .	IV.	445
XXXIII.	Zerlegung einer Zahl in die Differenz zweier Quadrate. Von Anton Sy'kora . . . . .	IV.	446

### Integralrechnung.

XVI.	Summirung einer Reihe. Von R. Hoppe . . . . .	II.	224
XIX.	Erste Sätze von den bestimmten Integralen unabhängig vom Differentialbegriff entwickelt. Von R. Hoppe . . . . .	III.	270



# IV

Nr der Abhandlung.

Heft. Seite.

- XXVII. Éclaircissement sur une note relative à la fonction  $\log I'x$ . Par A. Genocchi . . . . . IV. 366
- XXX. Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe. Von R. Hoppe IV. 410

## Geometrie der Ebene.

- I. Rationale ebene Curven dritter Ordnung. Von Karl Zahradnik . . . . . I. 1
- VI. Zu einem Satze von Steiner. Von Meutzner . I. 111
- VII. Geometrische Veranschaulichung des binomischen Satzes. Von Koppe . . . . . II. 113
- XI. Propriétés nouvelles de la tangente et de la normale aux courbes du second degré. Par Georges Dostor . . . . . II. 160
- XII. Propositions sur les coniques. Par Georges Dostor . . . . . II. 171
- XIII. Der Punkt der gleichen Paralleltransversalen. Von Emil Hain . . . . . II. 177
- XIV. Isogonal entsprechende Gerade des Dreiecks. Von Emil Hain . . . . . II. 182
- XVI. Ort der Punkte constanter Berührungsschnitten in Bezug auf einen Kegelschnitt. Von Karl Zahradnik . . . . . II. 220
- XVII. Ueber das Dreieck. Von Max Greiner . . . III. 225
- XXI. Ueber die geometrische Darstellung elliptischer Functionen. Von A. Strnad . . . . . III. 321
- XXI. Bestimmung der Flächeninhalte jener Curven, die durch die Gleichung
- $$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$$
- gegeben sind, in welcher  $m$  eine ganze positive Zahl bezeichnet. Von Simon Spitzer . . . . . III. 329
- XXV. Sur une représentation des points imaginaires en géométrie plane. Par Paul Appell . . . . . IV. 359
- XXVIII. Ueber die Krümmungskreise der Parabel. Von Mack . . . . . IV. 385
- XXIX. Recherche des systèmes de deux polygones réguliers étoilés, inscrits dans le même cercle, qui sont tels que la surface de l'un soit double de la surface de l'autre. Par Georges Dostor . . . . . IV. 407

# V

Der Abhandlung.	Heft.	Seite.
XXXI. Untersuchungen über das Dreieck. Von Emil Haiu . . . . .	IV.	417
XXXIII. Bestimmung der Vielecke durch die Winkel zwischen Seiten und Diagonalen. Von R. Hoppe . . . .	IV.	439
XXXIII. Ein neuer Satz von den Kegelschnitten. Von Anton Sy'kora . . . . .	IV.	444
XXXIII. Neue Ableitung der Pythagoräischen Lehrsätze. Von Anton Sy'kora . . . . .	IV.	447

## Geometrie des Raumes.

III. Ueber rationale Droikante und Tetraeder. Von R. Hoppe . . . . .	I.	87
VI. Relation zwischen Orthogonalcoefficientensystemen. Von R. Hoppe . . . . .	I.	111
IX. Sur les lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation $XYZ = T^3$ . Par Paul Appell . . . . .	II.	144
X. Zur Kinematik des Auges. Von R. Hoppe . .	II.	146
XVI. Note über conjugirte Tangenten. Von F. Hoza .	II.	218
XXII. Neue Methode zur Auflösung des Dreikants Von Karl Klekler . . . . .	IV.	337
XXIV. Kegelflächen zweiter Ordnung mit einer Symptosenaxe. Von Emanuel Czuber . . . . .	IV.	351
XXVI. Ueber die Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren. Von Leopold Klug . . .	IV.	361

## Praktische Geometrie.

IV. Ueber ein einfaches Winkelmessinstrument zum Gebrauche für die Schule. Von F. W. Fischer .	I.	99
V. Beschreibung eines Modells für den ersten Unterricht in der Goniometrie. Von F. Hoza . . . .	I.	109

## Mechanik.

XVIII. Fortrücken der Bahnscheitel eines Pendels von geringer Elongation. Mit Bezugnahme auf das Foucault'sche Pendel. Von R. Hoppe . . . .	III.	264
XXIII. Zur Theorie des Keiles. Von P. Meutzner . .	IV.	344

## Physik.

XX. Zur Theorie der magnetischen Induction. Von L. Weber . . . . .	III.	286
--	------	-----



# VI

*Nr der Abhandlung.*

*Heft. Seite.*

XXXII. Magnetische Influenzversuche. Von Ludwig Kulp . . . . .	IV.	427
--	-----	-----

## Verschiedenes.

XXI. Ueber Bezeichnungen. Von R. Hoppe . . . .	III.	323
--	------	-----

## Litterarische Berichte.

CCXLI. Boncompagni (Bull. IX. 7 bis 12.) Herschel (übers. Scheibe: C. H. Mem.) Ad. Mayer (Gesch. d. Princ. kl. Act.) Stoeber (röm. Grdst. Verm.) Walberer (Ar. u. Alg.) Kiersitzky (Ar.) Orelli (Alg.) Adam (Alg.) Heinze (krit. Beleucht. — Geom.) Kretschmer (geom. Ansch.) Schneider (El. d. Math.) Münch (Phys.) Blum (Phys.) Reis (Phys.) Caspar (Phys.) Pisko (Phys.) Stenzel (chem. Ersch.)		
CCXLII. Erdmann (Ax. d. Geom.) Schmitz-Dumont (Bedeut. d. Pangeom.) Rudel (Grdgeb. synth. Geom.) Lederer (Dynamiden.) Dellingshausen (Form. d. Chem.) Michelet (Nat. Philos.) Dostor (Determin.) Matzka (Determin.) Koppe (erweit. Kug. Fct.)		
CCXLIII. Boncompagni (Bull. X. 1 bis 6.) Werther (Anf. Geschwdk.) Albeggianni (tetr. Coord.) Schmauss (eine Curve.) Jenny (Ellipsoid.) Eilles (Cv. 2. O.) Consentius (Dreieck.) Stoll (neu. Geom.) Rottok (neu. Geom.) Delabar (darst. Geom.) Hartner (Geod.) Lorber (Längenmess.) Breithaupt (Theodol.) Niemann (Kin.) Bebbber (Regen.) Gibbs (Gleichgew.) Wiesner (Chlorophyll.) Transunti (Rom) (I. 1 bis 6.) Nicolaides (Athen) (Analecta 18. 19.) Lie (Christiania) (Arch. I.) Catalan (Nouv. Corr. III. 1 bis 6.)		
CCXLIV. Kallius (Dec. Rechn.) Becker (Geom. Grdl. — Ar. u. Alg.) Suhle (Ar. I.) J. H. T. Müller (eb. Geom. III.) Wohlgemuth (Geom.) Hellwig (Geom.) Hössrich (eb. Trig.) Lampe (Aufg. f. kub. Gl.) Amstein (Sohncke Aufg. f. Int.) Mikoletzky (Aufg. a. darst. Geom.) Gray (24st. Log.) Namur (12st. Log.) Neumeyer (Taf. bar. Höh.) Thomson (Taf. Summ. Meth.)		

## Berichtigungen

in Teil LIX.

Seite 55	Zeile 9 v. u.	statt	$25 - 11\sqrt{5}$	setze	$25 + 11\sqrt{5}$
„ 57	„ 11 „ „	„	$\frac{1}{96}a^3\sqrt{15}$	„	$\frac{1}{32}a^3\sqrt{5}$
		„	$\frac{10}{3}r^3\sqrt{390-174\sqrt{5}}$	„	$10r^3\sqrt{130-58\sqrt{5}}$
	„ 10 „ „	„	$\frac{1}{3}e^3\sqrt{15}$	„	$e^3\sqrt{5}$
		„	$\frac{1}{3}R^3$	„	$\frac{1}{9}R^3$
	„ 9 „ „	„	$\frac{5}{32}r^3$	„	$\frac{5}{4}r^3$
	„ 8 „ „	„	$\frac{5}{12}e^3$	„	$\frac{10}{3}e^3$
„ 58	„ 5 v. o.	„	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	„	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

in Teil LX.

Seite 445 Zeile 6 v. u. statt  $4J$  setze  $2J$ 

in Teil LXI.

Seite 128	Zeile 5 v. o.	statt	$(p+1)$	setze	$\frac{a}{2}(p+1)$
	„ 10 „ „	„	$k_a \underline{b} \underline{c} \underline{d}$	„	$\Sigma k_a \underline{b} \underline{c} \underline{d}$
„ 130	„ 6 „ „	„	$k_1 p - 1.p$	„	$k_1 \underline{p} - \underline{1.p}$
„ 131	„ 5 „ „	„	$k_2 3C_{1,r-1}$	„	$k_2 3C_{1,r-1}^2$
	„ 10 v. u.	„	$Z_{1,r-3}$	„	$Z_{1,r-3}^2$
„ 134	„ 4 v. o.	„	$C_2 = k_2$	„	$C_2 = k_1$
„ 137	„ 7 „ „	„	$\binom{r}{e}$	„	$\binom{r}{e}$
„ 140	„ 9 v. u.	„	$ra^{r-2}fx_1$	„	$ra^{r-1}fx_1$
	„ 4 „ „	„	$d-1$	„	$p-1$

# VIII

Seite 188 unter Zeile 2 v. o. fehlt die Zeile

$p$	$\Lambda(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$	$p$	$\Lambda(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$
-----	--------------	----------	----------	----------	-----	--------------	----------	----------	----------

welche die Ueberschriften der 5 Columnen enthält.

Seite 189 Zeile 7 v. u. statt  $\log x^2$  setze  $\log y^2$

„ 194	„ 7 v. o.	„ $\log(1-b)$	„ $\log(1-b')$
„ 195	„ 10 v. u.	„ $y''$	„ $y^4$
„ 200	„ 8 „ „	„ $x''$	„ $\log x''$
„ 201	„ 15 „ „	„ $\left[\log \frac{1}{z}\right]$	„ $\left[\lg \frac{1}{z}\right]$
„ 207	„ 11 „ „	„ §. 11.	„ §. 12.
„ 209	„ 7 „ „	„ 3,1159572	„ 3,1157402
„ 211	„ 6 „ „	„ §. 12.	„ §. 13.

Die Tafel auf Seite 188 beginnt nun:

## I. Tafel der Lamda-Functien.

$\Lambda(p+y) = \Lambda(p) + [1 + (1+ay)by]cy$									
$p$	$\Lambda(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$	$p$	$\Lambda(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$
0.0	0.00000	$\infty$	$-\infty$	0.30103	1.5	3.89893	8.83490	9.36318	0.55697



# ARCHIV

der

## MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht  
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von  
**J. A. Grunert,**  
fortgesetzt von  
**R. Hoppe.**

Einundsechzigster Teil. Erstes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

---

Leipzig.  
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,  
J. Sengbusch.  
1877.

Verlag von Louis Nebert in Halle a/S.

**Thomae, Prof. Dr. J.,** Ueber e. spezielle Klasse Abel-scher Functionen. gr. 4<sup>o</sup>. br. 4 Mark 50 Pf.

**Günther, Prof. Dr. Siegm.,** Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.

1. Heft. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den *Occidentalen*.

gr. 8. br. 1 Mark 80 Pf.

2. Heft. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den *Arabern und Hebräern*.

gr. 8. br. 2 Mark 10 Pf.

---

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung in Leipzig.  
(Durch jede Buchhandlung zu beziehen.)

## Lehrbuch der Geometrie

für  
Gymnasien  
und andere Lehranstalten.

Von  
**C. Meyer,**

Professor und Prorector am Gymnasium zu Potsdam.

I. Theil: Planimetrie. 12. Auflage. Geh. 1 Mk. 75 Pf.

II. Theil: Stereometrie. 6. Auflage (unter der Presse). Geh. 1 Mk. 50 Pf.

III. Theil: Algebraische Geometrie. Trigonometrie. 4. Auflage. Geh. 1 Mk. 50 Pf.

Freiexemplare behufs **Einführung** stehen gern zu Diensten.

---

Im Verlage der unterzeichneten Buchhandlung erschien, und ist durch jede Buchhandlung zu beziehen:

**Pisko, Professor Dr. Fr. Jos.,** Lehrbuch der Physik für die obern Classen der Gymnasien und Realschulen. 4. verbesserte Auflage. 8<sup>o</sup>. Mit 377 Holzschnitten. Preis 4 Mk.

Brünn, 1. März 1877.

Carl Winiker's  
Buchhandlung.

## I.

## Rationale ebene Curven dritter Ordnung.

Schluss zu N. IV. T. LVIII.

Von

Dr. K. Zahradnik,

Universitätsprofessor zu Agram.

## Anwendung auf das Descartes'sche Blatt.

Die Gleichung des Descartes'schen Blattes <sup>1)</sup> ist bekanntlich

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \quad (1)$$

Die Coordinatenachsen sind die Tangenten des Doppelpunktes dieser Curve. Die Gleichung (1) können wir durch das Gleichungspaar

$$\begin{aligned} x &= \frac{3au}{1+u^3} \\ y &= \frac{3au^2}{1+u^3} \end{aligned} \quad (2)$$

ersetzen, das heisst, wir können die Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes rational mittelst des Parameters  $u$  ausdrücken. Jedem Curvenpunkte  $u_i$  entspricht ein Parameter  $u_i$  und umgekehrt, und die Bedeutung des Parameters ist bekanntlich, wenn wir die Verbindungslinie des Punktes  $u_i$  mit dem Anfangspunkte der Coordinaten mit  $U_i$  bezeichnen,

$$\operatorname{tg}(U_i X) = u_i \quad (3)$$

1) Diese Entwickelung erschien zum Teile in Sitzungsberichten der k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 7. 11. 1873. Prag.

2. Als die Bedingungsgleichung für die Lage dreier Punkte des Blattes auf einer Geraden ergibt sich

$$u_1 u_2 u_3 = -1 \quad (4)$$

Für einen Inflexionspunkt wird

$$u_1 = u_2 = u_3 = u$$

und die Gleichung (4) geht in diesem Falle über in

$$u^3 = -1,$$

deren drei Wurzeln

$$\begin{aligned} u_1 &= -1 \\ u_2 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ u_3 &= \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

die Parameter der Inflexionspunkte ergeben. Das Product der Parameter der Inflexionspunkte ist gleich  $-1$ , d. h. dieselben liegen auf einer Geraden.

3. Die Parameter der unendlich fernen Punkte des Blattes erhalten wir, wenn wir den Nenner (2)

$$1+u^3 = 0$$

setzen, und wir erkennen sogleich, dass die drei unendlich fernen Punkte des Blattes dessen Inflexionspunkte sind, demnach fallen die Inflexionstangenten mit den Asymptoten des Blattes zusammen.

#### Secante und Tangente.

4. Für die Secante, als Verbindungslinie zweier Punkte  $u_1, u_2$  des Blattes ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 3a \\ u_1 & u_1^2 & 1+u_1^3 \\ u_2 & u_2^2 & 1+u_2^3 \end{vmatrix} = 0$$

welche wir nach Kürzung mit dem gemeinschaftlichen Factor  $(u_1 - u_2)$ , schreiben können:

$$x[u_1^2 u_2^2 - (u_1 + u_2)] + y[1 - u_1 u_2 (u_1 + u_2)] + 3a u_1 u_2 = 0 \quad (6)$$

Für  $u_1 = u_2 = u$  geht die Secante in eine Tangente über, und wir erhalten als deren Gleichung

$$u(u^3 - 2)x + (1 - 2u^3)y + 3au^2 = 0 \quad (7)$$

Die Gleichung (7) liefert uns die Parameter der Berührungspunkte der vom Punkte  $(xy)$  an das Blatt gelegten Tangenten, wenn wir  $x$ ,  $y$  als bekannt und  $u$  als unbekannt nehmen. Nun ist die Gl. (7) in Bezug auf  $u$  vom vierten Grade, d. h. von jedem Punkte  $(xy)$  kann man an das Blatt vier Tangenten legen, das Blatt ist somit eine Curve vierter Classe und dritter Ordnung, und die Vergleichung mit

$$x\xi + y\eta + 1 = 0 \quad (8)$$

liefert uns die Coordinaten ihrer Tangenten, nämlich

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{u^3 - 2}{3au} \\ \eta &= \frac{1 - 2u^3}{3au^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Aus der Gl. (7) erkennen wir, dass vier Tangenten des Blattes durch einen Punkt hindurchgehen, wenn deren Parameter nachstehenden zweien Bedingungsbedingungen

$$\begin{aligned} (u)_3 &= 2 \\ (u)_1 &= 2(u)_4 \end{aligned}$$

genügen.

Führen wir aus Gl. (5) die Parameter der unendlich fernen Punkte in die Gl. (7) der Tangente ein, so erhalten wir die Gleichungen der drei Asymptoten

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv x + y + a = 0 \\ A_2 &\equiv (1 - i\sqrt{3})x + (1 + i\sqrt{3})y - 2a = 0 \\ A_3 &\equiv (1 + i\sqrt{3})x + (1 - i\sqrt{3})y - 2a = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Die reelle Asymptote  $A_1$  schneidet auf den Coordinatenachsen gleiche Stücke ab, nämlich  $-a$ , und die übrigen zwei imaginären Asymptoten schneiden sich in einem reellen Punkte, dessen Coordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ y_1 &= a \end{aligned}$$

sind.

#### Involutionskegelschnitt.

5. Der Involutionskegelschnitt für das Descartes'sche Blatt ist eine Hyperbel, deren Gleichung

$$xy = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \quad (11)$$

ist. Die Asymptoten der Hyperbel sind die Doppelpunktstangenten des Blattes.



**Normale, Evolute.**

6. Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt  $u$  der Curve hindurchgeht, lautet

$$y - \frac{3au^2}{1+u^3} = A \left( x - \frac{3au}{1+u^3} \right) \quad (12)$$

Dieselbe wird zur Normalen, wenn wir

$$A = - \frac{2u^3 - 1}{u(u^3 - 2)} \quad (13)$$

setzen, was aus Gl. (7) erhellt. Setzen wir nun den Wert für  $A$  in die Gl. (12), so erhalten wir als Gleichung der Normalen

$$u(u^3 - 2)(u^3 + 1)y + (2u^3 - 1)(u^3 + 1)x - 3au\{u^5 + 2u^3 - 2u^2 - 1\} = 0 \quad (14)$$

Da der Parameter des Fusspunktes in dieser Gleichung der Normalen im siebenten Grade erscheint, folgt, dass wir aus einem jeden Punkte der Ebene des Blattes sieben Normalen fallen können<sup>1)</sup>.

Die Anzahl der Normalen bestimmt die Classe der Evolute. Setzen wir die Gleichung der Normalen

$$N = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung der Evolute in Punktkoordinaten, wenn wir aus

$$N = 0 \quad (15)$$

und deren Derivation nach  $u$ ,

$$\frac{dN}{du} = 0 \quad (16)$$

den Parameter  $u$  eliminiren als  $F(x, y) = 0$ , oder in anderer Form, wenn wir die Gleichungen (15) und (16) nach  $x$  und  $y$  auflösen als

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) \\ y &= \psi(u) \end{aligned} \quad (17)$$

Die Evolute ist somit eine rationale Curve siebenter Classe und zwölfter Ordnung.

1) Bekanntlich hat Chasles gezeigt, dass die Anzahl der Normalen gleich der Summe der Ordnungszahl und Classenzahl einer Curve ist, hier:

$$7 = 3 + 4$$

Aehnlich wie in Art. 4. können wir die Gleichung der Evolute in Tangentialcoordinaten ausdrücken

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{(2u^3-1)(u^3+1)}{3au(u^5-3u^3-2u^2+1)} \\ \eta &= \frac{u(u^3-2)(u^3+1)}{3au(u^5+3u^3-2u^2-1)}\end{aligned}\quad (18)$$

Dass sich die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes so wie auch der Krümmungshalbmesser leicht als Functionen des Parameters  $u$  ergeben, ist klar, da es bloss darauf ankommt, die ersten und zweiten Differentialquotienten von  $x$  und  $y$  nach  $u$  zu berechnen und in bekannte Formeln die Werte einzuführen.

Aber der Krümmungsmittelpunkt ist schon durch Gl. (17) angedeutet, somit können wir von einer zweiten Berechnung der Gl. (17) Umgang nehmen, und zwar schon aus dem Grunde, dass die zweite Berechnung gegen die erste keinen Vorteil böte.

### Quadratur.

7. Die Fläche der Schleife (des Blattes im engeren Sinne) ist ausgedrückt durch das Integral:

$$P = 9a^2 \int \frac{(1-2u^3)u^2 du}{(1+u^3)^3}.$$

Setzen wir

$$1+u^3 = z,$$

so geht dieses Integral über in

$$P = 3a^2 \int \frac{3-2z}{z^3} dz.$$

Die zur  $x$  Achse parallele Tangente des Blattes berührt dasselbe im Punkte  $B$  (Fig. 1.), dessen Coordinaten  $OC$  und  $OB$  sind. Entspricht nun der Punkt  $A$  dem Parameter  $u = 1$ , so ist die Fläche des Blattes  $OABO$  gleich  $OABC - OBC$ , daher ist

$$P = 3a^2 \left\{ \int_{\infty}^{\frac{4}{3}} \frac{3-2z}{z^3} dz - \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{3-2z}{z^3} dz \right\}$$

daher

$$P = 3a^2 \int_{\infty}^1 \frac{3-2z}{z^3} dz = \frac{3a^2}{2} \quad (19)$$

Die Fläche der Schleife ist demnach gleich einem Rechtecke, dessen Basis die Länge der Schleife  $OA$  und dessen Höhe der Abstand des Doppelpunktes von der reellen Asymptote ist,

$$P = OA \cdot OD,$$

oder auch: die Fläche der Schleife ist gleich der dreifachen Fläche des Dreiecks, den die Asymptote mit den Doppelpunktstangenten bildet.

Um die Fläche zu finden, welche die reelle Asymptote mit den beiden Aesten bildet, wollen wir die Coordinaten transformiren. Drehen wir die Coordinatenachsen um  $45^\circ$ , so wird die neue  $X$  Achse auf der reellen Asymptote senkrecht stehen, und die frühere Gleichung des Blattes geht über in

$$x(x^2 + 3y^2) - \frac{3a}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2) = 0.$$

Setzen wir

$$\frac{3a}{\sqrt{2}} = c,$$

so können wir die Gleichung ersetzen durch

$$x = \frac{c(1-u^2)}{1+3u^2}$$

$$y = \frac{cu(1-u^2)}{1+3u^2}$$

und für die Fläche erhalten wir den Ausdruck:

$$P = 8c^2 \int \frac{(1-u^2)u^2 du}{(1+3u^2)^3}$$

Setzen wir

$$3u^2 = z^2,$$

so erhalten wir

$$P = \frac{8c^2}{9\sqrt{3}} \int \frac{(3-z^2)z^2 dz}{(1+z^2)^3}$$

oder

$$P = \frac{8c^2}{9\sqrt{3}} \left\{ 3 \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^3} - \int \frac{z^4 dz}{(1+z^2)^3} \right\}$$

Bezeichnen wir

$$J_{m,n} = \int \frac{z^m dz}{(1+z^2)^n},$$

so ist

$$J_{m,n} = -J_{m-2,n} + J_{m-2,n-1}$$

und

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1}$$

Dieser Bezeichnung zufolge ist

$$P = \frac{8c^2}{9\sqrt{3}}(3J_{2,3} - J_{4,3}).$$

Nun ist aber

$$3J_{2,3} - J_{4,3} = -4J_3 + 5J_2 - J_1 = \frac{z^3}{(1+z^2)^2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot u^3}{(1+3u^2)^2},$$

somit

$$P = \frac{8c^2}{3} \int_{-1}^{+1} \frac{u^3}{(1+3u^2)^2} = \frac{c^2}{3} = \frac{3a^2}{2}$$

derselbe Ausdruck, den wir früher für die Fläche der Schleife erhalten haben. Da nun unser Integral in den Grenzen  $\infty$  und 1,  $-1$  und 0 der Grösse nach gleich bleibt, so sehen wir, dass die reelle Asymptote das Blatt dermassen abgrenzt, dass dasselbe durch den Doppelpunkt und durch dessen Symmetrieachse  $DA$  in vier gleiche Teile geteilt wird; der Flächeninhalt der von der Asymptote begrenzten Fläche sammt der Schleife ist (Fig. 3.)

$$P' = 3a^2 = 2P = FGHI \quad (20)$$

wenn  $P$  wie früher den Flächeninhalt der Schleife bedeutet.

### Constructionen des Blattes.

8. Beschreiben wir mit  $3a$  als Halbmesser einen Kreis, und setzen  $3a = OB = 1$ , was immer erlaubt ist, da wir die Längeneinheit beliebig wählen können. Ziehen wir nun den Strahl  $OA$ , welcher mit  $OB$  (Fig. 3.) einen Winkel bildet, dessen Tangente gleich  $u$  ist, und durch  $AB$  gemessen wird, so dass

$$u = AB.$$

Beschreiben wir nun um den Punkt  $B$  mit dem Halbmesser  $AB$  einen Bogen, der  $OB$  im Punkte  $D$  trifft, und ziehen aus diesem Punkte zu  $OA$  eine Parallele, welche auf  $AB$  den Punkt  $A_2$  bestimmt, so ist

$$A_2B = u^2.$$

Ziehen wir ferner aus dem Punkte  $D$  zu  $OA_2$  eine Parallele, so erhalten wir auf  $AB$  den Punkt  $A_3$  und

$$A_3B = u^3.$$

Tragen wir die Strecke  $A_3B$  auf  $OB$  in ihrer Verlängerung über  $B$  auf, so dass  $A_3B = BC$  ist, so haben wir

$$OC = 1 + u^3$$

Um  $\frac{3a \cdot u}{1 + u^3}$  zu construiren, machen wir auf  $OA$

$$OA_1' = AB$$

und ziehen aus dem Punkte  $C$  eine Parallele zu  $BA_1'$ , so erhalten wir auf  $OA$  den Punkt  $R$  und

$$OR = x = \frac{3au}{1+u^3}$$

Machen wir nun auf  $OA$

$$OA_2' = A_2B$$

und ziehen aus dem Punkte  $C$  eine Parallele zu  $BA_2'$ , so erhalten wir auf  $OA$  den Punkt  $S$  und

$$OS = y = \frac{3au^2}{1+u^3}$$

Beschreiben wir nun mit  $OR$  aus dem Punkte  $O$  einen Bogen, der  $OB$  im Punkte  $P$  trifft, und errichten in  $P$  eine Senkrechte, so schneidet dieselbe den Strahl  $OA$  im Punkte  $M$ , welcher ein Punkt des Blattes ist. Bei Construction mehrerer Curvenpunkte treten natürlich verschiedene Erleichterungen auf, so ist die separate Construction des Punktes  $S$  oder der  $y$  nicht erforderlich, wir finden aber in ihr mittelst

$$OA_2' = MP$$

eine Probe der Zeichnung.

Eine zweite Construction möge noch kurz erwähnt werden.

Das Descartes'sche Blatt zeigt sich als das Erzeugniss eines Kegelschnittsbüschels und eines ihm projectivischen Strahlenbüschels. Die Lage dieser Büschel ist bestimmt durch nachstehende Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - by + \lambda y^2 &= 0 \\ y - \lambda x &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Für jeden Wert von  $\lambda$  erhalten wir einen Punkt der Curve (ausser dem jedem  $\lambda$  zukommenden Coordinatenanfang, der als Doppelpunkt des Erzeugnisses auftritt) als Durchschnitt der entsprechenden Elemente beider Büschel. Die Coordinaten des Durchschnittes erhalten wir, wenn wir die Gleichung des Kegelschnittsbüschels mit  $\lambda^2$  multipliciren und in dieselbe aus der Gleichung des Strahlenbüschels für  $\lambda x$  den Wert einführen. Wir erhalten so nach kurzer Reduction

$$y = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^3}$$

somit vermöge der zweiten Gleichung (21):

$$x = \frac{\lambda}{1+\lambda^3}$$



welche wir als das Gleichungspaar des Blattes wieder erkennen. Die Mittelpunkte des Kegelschnittsbüschels, dem die  $X$  Achse als gemeinschaftliche Tangente zukommt, liegen auf der  $Y$  Achse.

Für jedes positive  $\lambda$  haben wir mit einer Ellipse des Büschels zu tun, welche für  $\lambda = 1$  in einen Kreis übergeht. Negativen  $\lambda$  entsprechen Hyperbeln des Büschels und als Uebergangsfall haben wir für  $\lambda = 0$  eine Parabel des Büschels. Die Punkte des Blattes im engeren Sinne sind also Durchschnitte der Ellipsen des Büschels mit den entsprechenden Geraden des Strahlenbüschels, während die Punkte der beiden Aeste als Durchschnitte der Hyperbeln des Büschels mit den entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels, der Doppelpunkt entspricht der Parabel des Büschels ( $\lambda = 0$ ) und  $X$  Achse ( $\lambda = \infty$ ), welche als eine Doppellinie auftritt mit den ihnen entsprechenden Grundstrahlen des Strahlenbüschels.

Gegeben sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 4.) und die Gerade

$$L_i \equiv y - \lambda_i x = 0.$$

Auf der  $Y$  Achse trage man  $OB = \frac{OH}{2} = \frac{b}{2}$  (wo  $b = 3a$  kurz gesetzt ist) auf, und ziehe durch  $B$  eine Parallele zur  $X$  Achse, welche die Gerade  $L = 0$  im Punkte  $C$  schneidet, so ist

$$BC = \frac{b}{2\lambda}.$$

Bezeichnen wir nun die in der  $Y$  Achse gelegene Achse des Kegelschnittes mit  $2\beta$  und die andere mit  $2\alpha$ , so ist bekanntlich

$$\beta = \frac{b}{2\lambda} \quad (22)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{b^2}{4\lambda}} = \sqrt{\frac{b}{2} \cdot \beta} \quad (23)$$

Es ist somit  $BC = \beta$  für den Kegelschnitt  $\lambda$ . Wir finden  $\alpha$ , wenn wir  $AO$  über den Punkt  $O$  um  $OB'$  verlängern und mit  $B'E = EA = \frac{B'A}{2}$  einen Halbkreis beschreiben, der die  $Y$  Achse in  $F$  trifft, so ist  $OF = \alpha$ . Der Zusammenhang zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ , welcher durch die Gleichung (23) gegeben ist, nämlich

$$\alpha^2 = \frac{b}{2} \cdot \beta \quad (24)$$

lässt eine einfache Construction von  $\alpha$  und  $\beta$  zu. Man construirt zu diesem Behufe die Parabel (24), und die Coordinaten ihrer Punkte

geben die entsprechenden Achsenpaare  $\alpha, \beta$ . Sind nun für einen Kegelschnitt  $\lambda$  sein Mittelpunkt, seine Achsen bekannt, so können wir denselben construiren und sein Durchschnitt mit  $L = 0$  ist der  $\lambda$  entsprechende Curvenpunkt.

### Anwendung auf die Strophoide.

1. Bekanntlich ist die Gleichung der Strophoide

$$x^3 + xy^2 + a(x^2 - y^2) = 0 \quad (1)$$

oder mit Hinzunahme des rationalen Parameters  $u$

$$\begin{aligned} x &= \frac{a(u^2 - 1)}{u^2 + 1} \\ y &= \frac{a(u^2 - 1)u}{u^2 + 1} \end{aligned} \quad (2)$$

Als Bedingungsgleichung für die Lage dreier Curvenpunkte auf einer Geraden ist

$$(u)_2 = -1 \quad (3)$$

demnach sind die Parameter der Inflexionspunkte

$$u_1 = \infty, \quad u_2 = +\sqrt{-\frac{1}{3}}, \quad u_3 = -\sqrt{-\frac{1}{3}}$$

und als Parameter der unendlich fernen Punkte erkennen wir aus Gl. (2)

$$u_1 = \infty, \quad u_2 = +i, \quad u_3 = -i \quad (5)$$

woraus erhellt, dass zwei der unendlich fernen Punkte die imaginären Kreispunkte sind, durch welche die Strophoide hindurchgeht, und der dritte ist der reelle Inflexionspunkt ( $a, \infty$ ).

### Secante und Tangente.

2. Für die Secante als Verbindungslinie zweier Punkte  $u_1, u_2$ , der Curve ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & a \\ u_1^2 - 1 & u_1(u_1^2 - 1) & u_1^2 + 1 \\ u_2^2 - 1 & u_2(u_2^2 - 1) & u_2^2 + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

welche nach Kürzung mit dem gemeinschaftlichen Factor  $(u_1 - u_2)$  geschrieben werden kann

$$\begin{vmatrix} x & y & a \\ u_1^2 - 1 & u_1(u_1^2 - 1) & u_1^2 + 1 \\ u_1 + u_2 & u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 - 1 & u_1 + u_2 \end{vmatrix} = 0$$

Für  $u_1 = u_2 = u$  geht die Secante in eine Tangente über, und wir erhalten nach kleiner Reduction für dieselbe

$$4uy + (1 - 4u^2 - u^4)x + a(u^2 - 1)^2 = 0 \quad (7)$$

Diese Gleichung gibt uns bekanntlich eine Relation zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes  $(xy)$  auf der Tangente und dem Parameter ihres Berührungspunktes an. Fassen wir den Punkt  $(x, y)$  als gegeben, so erhalten wir die Parameter der Berührungspunkte aus Gl. (7) als Wurzeln dieser Gleichung in Bezug auf  $u$ . Da nun die Gleichung (7) in  $u$  vom vierten Grade ist, so folgt, dass die Strophoide eine Curve vierter Classe ist, welche wir in Tangentialcoordinaten schreiben können

$$\zeta = \frac{1 - 4u^2 - u^4}{a(u^2 - 1)^2} \quad (8)$$

$$\eta = \frac{4u}{a(u^2 - 1)^2}$$

Führen wir in die Gleichung der Tangente die Parameter der Inflexionspunkte ein, so erhalten wir als Gleichungen der Inflexionstangenten

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv x - a = 0 \\ J_2 &\equiv 5x + 3i\sqrt{3} \cdot y + 4a = 0 \\ J_3 &\equiv 5x - 3i\sqrt{3} \cdot y + 4a = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Wir erkennen, dass den zwei imaginären Inflexionstangenten ein reeller Schnittpunkt zukommt, dessen Coordinaten

$$\begin{aligned} x &= -\frac{4}{5}a \\ y &= 0 \end{aligned}$$

sind. Führen wir nun die Parameter der unendlich fernen Punkte in die Gleichung der Tangente ein, so erhalten wir die Gleichungen der Asymptoten:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv x - a = 0 \\ A_2 &\equiv x + iy + a = 0 \\ A_3 &\equiv x - iy + a = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Die reelle Asymptote ist demnach eine Inflexionstangente der Curve und die beiden imaginären Asymptoten schneiden sich in einem reellen Punkte in dem Pole der Strophoide, dessen Coordinaten

$$\begin{aligned} x &= -a \\ y &= 0 \end{aligned}$$

sind.

**Normale, Evolute.**

3. Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Curvenpunkt  $u$  hindurchgeht, lautet:

$$y - \frac{au(u^2-1)}{u^2+1} = A \left( x - \frac{a(u^2-1)}{u^2+1} \right)$$

Dieselbe wird zu einer Normalen, wenn nach Gl. (7)

$$A = \frac{4u}{1-4u^2-u^4}$$

somit erhalten wir, wenn wir den Wert  $A$  einführen nach einiger Reduction

$$(1+u^2)\{(1-4u^2-u^4)y-4ux\} + au(u^2-1)\{3+4u^2+u^4\} = 0$$

Diese Gleichung können wir mit dem gemeinschaftlichen Factor  $(1+u^2)$  kürzen, was seinen Grund in den imaginären Kreispunkten hat, durch welche die Curve hindurchgeht. Wir erhalten demnach schliesslich für die Normale im Punkte  $u$  die Gleichung

$$(1-4u^2-u^4)y-4ux+4a(u^2-1)(u^2+3) = 0 \quad (11)$$

Wir werden die Fusspunktquadrupel der Normalen nicht näher untersuchen, da wir es schon in diesem Archiv allgemein für rationale Curven an anderer Stelle durchgeführt haben und bemerken bloss, dass die Fusspunkte der Normalen, welche man aus der  $Y$  Achse an die Strophoide fällt, in einem Kreise liegen, und dass der Ort der Punkte, deren Normalenfusspunkte äquianharmonische Punkte bilden, ein in zwei Gerade degenerirter Kegelschnitt ist.

Aus der Gl. (11) erkennen wir, dass die Evolute eine rationale Curve vierter Classe ist, deren Tangentialgleichung

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{-4u}{4a(u^2-1)(u^2+3)} \\ \eta &= \frac{1-4u^2-u^4}{4a(u^2-1)(u^2+3)} \end{aligned} \quad (12)$$

Wir erhalten ihre Gleichung in Punktcoordinaten, wenn wir aus der Gleichung der Normalen

$$N = 0$$

und deren Derivation nach  $u$ , somit

$$\frac{dN}{du} = 0$$

den veränderlichen Parameter  $u$  eliminiren, als

$$F(x, y) = 0 \quad (13)$$

oder in Form

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) \\ y &= \psi(u) \end{aligned} \quad (14)$$

wenn wir die Gleichungen  $N = 0$  und  $\frac{dN}{du} = 0$  nach  $x$  und  $y$  auflösen. Zu der letzteren Form gelangen wir noch auf einem anderen Wege, wo wir dieselben entwickeln werden. Sowohl die Entwicklung (13) wie (14) führt uns zum Resultate, dass die Evolute der Strophoide eine rationale Curve sechster Ordnung und vierter Classe ist.

#### Durchschnitte eines Kreises mit der Strophoide.

4. Führen wir in die Gleichung eines Kreises

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0$$

statt  $x$  und  $y$  die Werte aus (2) ein, so erhalten wir

$$a^2u^4 + 2a\beta u^3 + (m^2 - 2a^2 - 2a\alpha)u^2 + 2a\beta u + a^2 + 2a\alpha + m^2 = 0 \quad (15)$$

Der Kreis schneidet demnach die Strophoide ausser den imaginären Kreispunkten in weiteren vier Punkten, deren Parameter sich als Wurzeln der Gleichung (15) ergeben. Da aber drei der Schnittpunkte die Lage des Kreises vollständig bestimmen, so muss zwischen den Parametern der vier Schnittpunkte eine Relation bestehen, vermöge deren wir aus den drei Punkten den vierten linear bestimmen können. Dieselbe folgt aus der Form der Gl. (15), nämlich

$$(u)_1 + (u)_3 = 0 \quad (16)$$

Für den Fall, dass  $u_1 = u_2 = u'$ ,  $u_3 = u_4 = u''$  wird, erhalten wir einen doppelt berührenden Kreis in den Punkten  $u'$  und  $u''$  und die Gleichung (16) geht über in

$$u'u'' = -1 \quad (17)$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, dass die Berührungspunkte  $u'$ ,  $u''$  vom Doppelpunkte aus unter einem rechten Winkel gesehen werden<sup>1)</sup>.

Ziehen wir die Gerade  $u'u''$ , so schneidet diese die Strophoide noch in einem Punkte  $u'''$  und da nach der Gleichung (3)

$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = -1$$

---

1) Dasselbe gilt bei der Focale allgemein, siehe Dr. Em. Weyr „Ueber Durchschnittspunkte von Focalen mit Kreisen und Lemniscaten“. Sitzb. d. königl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 23. 5. 1873. Prag.

ist, so folgt daraus

$$u''' = 0$$

d. i. „Die Verbindungslinien der Berührungspunkte der die Strophoide doppelt berührenden Kreise gehen durch einen festen Punkt  $u'''$ , den Pol der Curve.“

„Die Berührungspunkte der die Strophoide doppelt berührenden Kreise bilden eine centrale Involution.“

Aus der Gleichung (15) folgt

$$(u)_1 = \frac{2\beta}{a}$$

$$(u)_2 - (u)_4 = -3 - \frac{4\alpha}{a}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (17) gehen diese Gleichungen über in

$$u' + u'' = \frac{\beta}{a}$$

$$u'^2 + u''^2 = 2 - \frac{4\alpha}{a}$$

Erheben wir die erste zur zweiten Potenz und subtrahiren davon mit Rücksicht auf die Gl. (17) die zweite Gleichung, so erhalten wir

$$\beta^2 + 4\alpha a = 0 \quad (18)$$

woraus wir erschen, dass „der geometrische Ort der Mittelpunkte der die Strophoide doppelt berührenden Kreise eine Parabel ist, die den Pol der Curve zu ihrem Brennpunkte hat.“

Ziehen wir  $u'u''u'''$ , so haben wir nach der Gleichung (17)

$$u'''o^2 = u'''u' \cdot u'''u'' = a^2$$

welche Gleichung uns besagt, dass alle die Strophoide doppelt berührenden Kreise von einem Kreise rechtwinklig geschnitten werden, der zum Centrum den Pol  $u'''$  und zum Radius dessen Abstand  $a$  von der  $Y$ -Achse hat.

Wir erkennen demnach die Strophoide als die Enveloppe aller Kreise, welche zum Orte ihrer Mittelpunkte eine Parabel haben und einen Kreis rechtwinklig schneiden<sup>1)</sup>.

---

1) C. Küpper „Beiträge zur Theorie der Curven 3. und 4. Ordnung“. Abhandl. d. königl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Prag. 1872.



**Krümmungskreis, Evolute.**

Geht der Kreis durch drei benachbarte Punkte hindurch, d. i. wird  $u_2 = u_3 = u_4 = u$ , so erhalten wir einen Krümmungskreis im Punkte  $u$ , und die Gleichung (16) geht in diesem Falle über in

$$u_1(1 + 3u^2) + u(3 + u^2) = 0 \quad (19)$$

d. i. durch jeden Punkt der Strophoide können wir drei sie osculirende Krümmungskreise <sup>1)</sup> legen.

Die Tripel der Osculationspunkte bilden auf der Strophoide eine cubische Punktinvolution, deren Gleichung durch (19) ausgedrückt ist.

Die Parameter der Doppelpunkte erhalten wir, wenn wir aus der Gleichung (19) und ihrer Derivation nach  $u$  den veränderlichen Parameter der Involution  $u_1$  eliminiren. Wir erhalten so

$$(u^2 - 1)^2 = 0$$

daher

$$u = \pm 1$$

Je zwei der vier Doppelpunkte fallen zusammen. Die cubische Involution (19) hat demnach zwei dreifache Punkte, deren Parameter  $u = +1$ ,  $u = -1$  sind, es sind dies die Nachbarpunkte des Doppelpunktes.

Aus der Gleichung (15) folgt

$$(u)_1 = \frac{2\beta}{a}$$

$$(u)_4 - (u)_2 = 3 + \frac{4\alpha}{a}$$

Für einen Krümmungskreis gehen diese Gleichungen über wegen  $u_2 = u_3 = u_4 = u$  in

$$3u + u_1 = \frac{2\beta}{a}$$

$$u^3 u_1 - 3u^2 - 3uu_1 = 3 + \frac{4\alpha}{a}$$

1) Wählen wir die Tangenten des Doppelpunktes zu Coordinatenachsen, dann gehen die Gleichungen (16) und (19) über in

$$u_1 u_3 u_4 = 1$$

$$u_1 u^3 = 1$$

und wir sehen, dass die drei Osculationspunkte mit dem ursprünglichen Punkte auf einem Kreise liegen.

Eliminiren wir nun mit Hilfe der Gleichung (19) den Parameter  $u$  des Punktes, in welchem der Krümmungskreis die Strophoide schneidet, so erhalten wir als Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\beta = \frac{4au^3}{1+3u^2} \quad (20)$$

$$\alpha = -\frac{a(u^6+9u^4+3u^2+3)}{4(1+3u^2)}$$

Die Gleichungen (20) sind eben nichts anderes als die Gleichungen (14), welche dort nur angedeutet und hier entwickelt sind.

Die Parameter des Doppelpunktes sind  $+1$ ,  $-1$ , und die Coordinaten der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte  $(-a, a)$ ,  $(-a, -a)$ .

Aus den Gleichungen (20) erkennen wir wieder, dass die Evolute der Strophoide eine rationale Curve sechster Ordnung ist, und wie früher gezeigt wurde vierter Classe. Eliminiren wir aus den Gleichungen (20) den Parameter  $u$ , so erhalten wir die Gleichung der Evolute als  $F(\alpha, \beta) = 0$ .

Die Gleichung des Involutionsekschnittes bekommen wir nach früher gegebener allgemeiner Entwicklung, wenn wir die Coordinatenachsen um  $45^\circ$  umdrehen, d. h. wenn wir die Tangenten des Doppelpunktes als Coordinatenachsen annehmen. Für diese Lage der Coordinatenachsen ist die Gleichung der Strophoide

$$(x-y)(x^2+y^2)-2\sqrt{2} \cdot axy = 0$$

und demnach die Gleichung des Involutionsekschnittes

$$(x+y)^2+4\sqrt{2}a(x-y)+8a^2=0 \quad (21)$$

aus welcher wir erkennen, dass derselbe eine Parabel ist.

### Quadratur.

Für den Flächeninhalt der Strophoide finden wir den Ausdruck

$$P = \int y dx = 4a^2 \int \frac{(u^2-1)u^2 du}{(1+u^2)^3}$$

oder der früheren Bezeichnung gemäss

$$P = 4a^2(J_{4,3} - J_{2,3})$$

Nun ist

$$J_{4,3} - J_{2,3} = 2J_3 - 3J_2 + J_1 = J$$

Die Fläche der Strophoide besteht nun aus zwei Teilen, aus der Schleife und aus dem spitzen Teile, der durch den Doppelpunkt von der Schleife getrennt und von der reellen Asymptote begrenzt wird, demnach ist die ganze Fläche

$$P = \text{Schleife} + \text{Spitze}$$

Nach den bei dem Descartes'schen Blatte angeführten Reductionsformeln ist

$$4J = \operatorname{arctg} u - \frac{u(1+3u^2)}{(1+u^2)^2}$$

somit bekommen wir für den Flächeninhalt der Schleife, den wir mit  $P_1$  bezeichnen wollen,

$$P_1 = 2a^2 \int_0^{-1} \left( \operatorname{arctg} u - \frac{u(1+3u^2)}{(1+u^2)^2} \right) du$$

$$P_1 = 2a^2 - 2\pi \left( \frac{a}{2} \right)^2 \quad (22)$$

und für den Flächeninhalt der Spitze, den wir kurz  $P_2$  bezeichnen wollen, ist

$$P_2 = 2a^2 \int_{+1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg} u - \frac{u(1+3u^2)}{(1+u^2)^2} \right) du$$

$$P_2 = 2a^2 + 2\pi \left( \frac{a}{2} \right)^2 \quad (23)$$

und für den Flächeninhalt der ganzen Strophoide in angegebener Begrenzung

$$P = P_1 + P_2 = (2a)^2 \quad (24)$$

Wir können demnach die Flächenteile folgendermassen construiren (Fig. 6). Construiren wir uns ein Quadrat  $BCDE$ , dessen Seite gleich  $2a$  ist, verbinden die Mittelpunkte der Seiten  $G, H, J, K$ , so entsteht ein neues Quadrat, dessen Flächeninhalt gleich ist  $2a^2$ . Schreiben wir nun diesem Quadrate einen Kreis ein, so wird dessen Radius gleich sein  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ , demnach sein Flächeninhalt  $\frac{\pi a^2}{2}$ . Schattiren wir nun die Winkelräume bei  $G, H, J, K$ , welche vom Kreise  $\left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$  begrenzt werden, so ist

$$P = BCDE$$

$$P_1 = \text{der schattirte Winkelraum}$$

$$P_2 = \text{der übrigbleibende Teil von } BCDE.$$

### Construction der Strophoide.

1) Gegeben sei  $u''O$  als Durchmesser eines Kreises (Fig. 5.) und  $u''A$ ,  $OC$  seine Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers. Man ziehe durch den Punkt  $O$  eine Gerade  $OA$ , welche den Kreis im Punkte  $B$  schneidet. Machen wir nun auf  $OB$

$$Bu' = BA$$

so ist  $u'$  ein Punkt der Strophoide.

2) Man ziehe die Gerade  $u''C$  und beschreibe mit  $OC$  als Halbmesser aus  $C$  Mittelpunkt einen Kreis; derselbe trifft die Gerade in den Punkten  $u'$  und  $u''$ , welche Punkte der Strophoide angehören als Ort solcher Punkte.

3) Für die Strophoide als specieller Fall der Focale aufgefasst, ergibt sich nachstehende weitere Construction. Es sei  $u''H$  der Durchmesser eines Cylinders, und  $Au''HJ$  sein Achsenschnitt. Im Punkte  $u''$  denken wir uns eine Senkrechte zum Achsenschnitte errichtet, welche demnach auch eine Tangente des Erzeugungscylinders sein wird. Diese Senkrechte fassen wir als Achse eines Ebenenbüschels auf. Jede Ebene des Büschels schneidet den Cylinder in einer Ellipse und der Ort der Brennpunkte dieser Ellipsen ist eine ebene Curve die Strophoide. Die Ebene des Büschels, welche zur Achse des Cylinders senkrecht steht, schneidet den Cylinder in einem Kreise, dessen Mittelpunkt  $O$  der Doppelpunkt des Ortes ist, da sich in demselben die beiden Brennpunkte der Schnittcurve vereinigen. Da nun, wie erwähnt, die Brennpunkte der Schnitte des Ebenenbüschels im Achsenschnitt  $Au''HJ$  gelegen sind, können wir die Strophoide folgendermassen construiren: Man ziehe durch den Punkt  $u''$  einen Strahl  $u''J$  und construire die zwei Kreise, welche die Geraden  $Au''$ ,  $HJ$  und den Strahl  $u''J$  berühren. Es sei  $K$  der Mittelpunkt eines solchen Kreises, so ist sein Berührungspunkt  $u'$  mit dem Strahl  $u''J$  ein Punkt der Strophoide.

4) Eine vierte Construction ergibt sich aus dem Art. 4, wo wir die Strophoide als Enveloppe aller Kreise erkannt haben, welche die Punkte der Parabel (18) zu Mittelpunkten haben und den festen Kreis mit  $u''$  als Mittelpunkt und  $u''O$  als Halbmesser rechtwinklig schneiden.

Alle diese Constructionen sind zum Teil in früherer Entwicklung gelegen und wir können von ihrem Beweise Umgang nehmen, zumal dieselben hinlänglich bekannt sind.

Agram, März 1877.

## II.

# Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten.

Fortsetzung von N. XIV. T. LIX.

Von

**Hans Naegelsbach.**

Erst nach dem Druck der ersten unter obigem Titel in diesem Archiv (59. T. 2. H.) veröffentlichten Abhandlung hat der Verfasser die geistreiche Arbeit des Herrn Prof. E. Schröder „Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen“, Math. Ann. II. 2, kennen gelernt. In derselben erscheint die Fürstenau'sche Methode als ein specieller Fall einer viel allgemeineren Methode. Es entstand daher die Frage, ob die Studien fortzusetzen seien, und der Verfasser hat sich dafür entschieden in der Ueberlegung, dass, nachdem man für die praktische Anwendung sich doch für einen der in Schröder's allgemeinerer Methode enthaltenen speciellen Fälle entscheiden muss, gerade die Fürstenau'sche Methode, wegen der geradezu elementaren Entwicklung und übersichtlichen Darstellung, deren sie fähig ist, eine Zukunft zu haben verspricht. Die Resultate der Untersuchung aber sind dann so ausgefallen, dass sie jedenfalls der Beachtung wert sind.

Eine dem Inhalt nach verwandte Arbeit ist die in den mathem. Annalen (IX. Bd. 4. H.) erschienene Abhandlung des Herrn J. König in Budapest über einen allgemeinen Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung  $n$ ten Grades. Dort wird

ebenfalls für die Gleichung  $fx = 0$   $\frac{1}{fx}$  nach steigenden Potenzen von  $x$  entwickelt, und der Ausdruck für die kleinste Wurzel abhängig gemacht von der Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Coefficienten dieser Entwicklung. Der theoretisch sehr interessante Ausdruck dürfte in Bezug auf praktische Anwendbarkeit den Mangel haben, dass allzuviel Coefficienten wirklich entwickelt werden müssen um ein einigermaßen genaues Resultat zu geben.

Was nun den Inhalt der gegenwärtigen Abhandlung betrifft, so steht er zu dem der ersten in folgender Beziehung: In der ersten Abhandlung sind die Fürstenau'schen Näherungswerte der grössten resp. kleinsten, reellen oder complexen, Wurzeln einer numerischen Gleichung durch Divisionscoefficienten ausgedrückt worden. Durch dieselben liess sich auch der genaue Wert des Fehlers ausdrücken und mit Hilfe dieses genauen Wertes angeben, welchem Werte sich der Fehler bei wachsender Annäherung immer mehr nähert. Die Form dieses Fehlers hängt wesentlich davon ab, ob die zweitgrössten resp. kleinsten Wurzeln reell oder complex sind, so dass sich im Ganzen vier Fälle ergeben. Aus der Form des Fehlers aber konnte dann geschlossen werden, in welcher Weise sich die Annäherung in jedem der vier Fälle vollzieht. Dies zu untersuchen war der hauptsächlichste Zweck der ersten Abhandlung. Im Folgenden gehen wir einen Schritt weiter.

Unter der Voraussetzung, dass die Annäherung ins Unendliche getrieben ist, lässt sich dieser Grenzwert des Fehlers in allen Fällen durch eine Reihe aufeinanderfolgender Näherungswerte der Wurzeln selbst ausdrücken. Der so gefundene Wert ist allerdings bei endlicher Annäherung selbst nur wieder ein Näherungswert, aber er lässt sich in doppelter Weise sehr vorteilhaft verwenden. Erstens kann man ihn direct als Correctur an dem durch das erste Verfahren gefundenen Näherungswert anbringen. Der nach dieser Correctur noch vorhandene Fehler lässt sich dann wieder genau durch Divisionscoefficienten ausdrücken und dann die Form des Grenzwertes angeben, dem er sich immer mehr nähert. Es ergibt sich, dass, wie der erste Fehler im Allgemeinen abnahm mit den Potenzen des Verhältnisses der zweitgrössten Wurzel zur ersten, so der zweite Fehler abnimmt mit den Potenzen des Quadrats dieses Verhältnisses, oder mit den Potenzen des Verhältnisses der drittgrössten Wurzel zur grössten, je nachdem das eine oder das andere grösser ist. Dieser zweite Fehler ist also kleiner als der erste auch bei endlicher Annäherung. Zweitens kann man das Doppelte des gefundenen Wertes als Correctur anwenden, und erhält so zu dem ersten Näherungswert einen zweiten, der den gleichen Grad der Annäherung besitzt, aber auf der entgegengesetzten Seite vom wahren Werte abweicht.

Was die praktische Verwendbarkeit des Verfahrens zur wirklichen numerischen Berechnung der Wurzeln anlangt, so wird diese allerdings umständlich, wenn die grössten Wurzeln zwei Paare complexer Werte sind. Es geht dann nämlich die Berechnung auf eine Determinante 5ten Grades hinaus. Sind die grössten Wurzeln eine reelle und ein Paar complexe, so kommt man auf Determinanten 3ten Grades, die sich ziemlich bequem berechnen lassen. Wenn die beiden ersten Wurzeln reell sind, wird die Berechnung der Correctur sehr einfach, und dies ist gerade der einzige Fall, wo diese Berechnung unbedingt erforderlich ist; denn in diesem Fall allein kann es vorkommen, dass bei dem ersten Verfahren die Näherungswerte sich einseitig nähern, in den drei anderen Fällen liefert schon das erste Verfahren zu grosse und zu kleine Werte.

Es sind im Folgenden nur die vier, resp. acht wichtigsten Fälle untersucht, also abgesehen von vielfachen Wurzeln auch die Fälle nicht berücksichtigt, wo ein Paar reelle Wurzeln gleich und entgegengesetzt sind, oder wo eine reelle Wurzel dem Modul eines complexen Wurzelpaares gleich ist, oder wo endlich zwei complexe Wurzelpaare gleiche Moduln haben.

### § 1.

Sind  $\alpha_n$  und  $\alpha_{n-1}$  einzelne reelle Werte, so ist nach Abh. I.

$$1) \quad x_r = \frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)} = \alpha_n + \frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-1})}{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)} = \alpha_n + \left( \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right)^{r+1} \frac{f' \alpha_n}{g' \alpha_{n-1}}$$

Das Letztere für grosse  $r$ , wenn man statt der Divisionscoefficienten die ersten Näherungswerte nimmt. Ist nun

$$x_{r+1} - x_r = \Delta x_r, \quad \Delta x_{r+1} - \Delta x_r = \Delta^2 x_r,$$

so hat man

$$\Delta x_{r-2} = \left( \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right)^{r+1} \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\alpha_n} \cdot \frac{f' \alpha_n}{g' \alpha_{n-1}} \quad \text{und}$$

$$2) \quad \frac{\Delta x_{r-1}}{\Delta x_{r-2}} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}.$$

Das Verhältniss  $\frac{\Delta x_{r-1}}{\Delta x_{r-2}}$  nähert sich also bei wachsendem  $r$  immer mehr dem  $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ . Es liesse sich auch hier leicht angeben, wie diese Annäherung von den Wurzelwerten abhängt, doch ist dies im Folgenden nicht nötig zu wissen. Wir wenden die Gleichung 2) an um zu erkennen, ob wirklich der erste Fall vorliegt, und ob  $r$  gross

genug ist, dass die Näherung den durch die Formel gegebenen Gang einhält. Es ist dann weiter

$$\frac{\Delta^2 x_{r-2}}{\Delta x_{r-2}} = \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\alpha_n}; \quad \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{r+n-3} \cdot \frac{f' \alpha_n}{g' \alpha_{n-1}} = \frac{(\Delta x_{r-2})^2}{\Delta^2 x_{r-2}};$$

$$\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{r+n-1} \cdot \frac{f' \alpha_n}{g' \alpha_{n-1}} = \frac{(\Delta x_{r-1})^2}{\Delta^2 x_{r-2}};$$

und der gesuchte Näherungswert ist

$$3) \quad x'_r = x_r - \frac{(\Delta x_{r-1})^2}{\Delta^2 x_{r-2}} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1}, & x_r \\ \Delta x_{r-2}, & x_{r-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1}, & 1 \\ \Delta x_{r-2}, & 1 \end{vmatrix}}.$$

Der genaue Wert des Fehlers ergibt sich, wenn ich die  $x_r$  durch die Divisionscoefficienten ausdrücke. Sei zur Abkürzung  $(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = (r)$ , und  $(\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) = (\bar{r})$ , so erhält man

$$x_r = \alpha_n + \frac{(\bar{r}+1)}{(r)}, \quad \Delta x_r = \frac{(\bar{r}+2)}{(r+1)} - \frac{(\bar{r}+1)}{(r)} = - \frac{\begin{vmatrix} (r+1), & (\bar{r}+2) \\ (r), & (\bar{r}+1) \end{vmatrix}}{(r)(r+1)}.$$

Demnach ist

$$4) \quad x'_r = \frac{\begin{vmatrix} (r), & (\bar{r}+1) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, (r-1)(r) \cdot \alpha_n + (r-1)(\bar{r}+1)}{\begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\bar{r}-1) \end{vmatrix}, (r-2)(r-1) \cdot \alpha_n + (r-2)(\bar{r})} =$$

$$\begin{vmatrix} (r), & (\bar{r}+1) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, (r-1)(r) \\ \begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\bar{r}-1) \end{vmatrix}, (r-2)(r-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_n + \frac{\begin{vmatrix} (r), & (\bar{r}+1) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, (r-1)(\bar{r}+1) \\ \begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\bar{r}-1) \end{vmatrix}, (r-2)(\bar{r}) \\ \begin{vmatrix} (r), & (\bar{r}+1) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, (r-1)(r) \\ \begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\bar{r}-1) \end{vmatrix}, (r-2)(r-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r), & (\bar{r}+1) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, (r-1)(\bar{r}+1) \\ \begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\bar{r}-1) \end{vmatrix}, (r-2)(\bar{r}) \\ \begin{vmatrix} (r), & (\bar{r}+1) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, (r-1)(r) \\ \begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\bar{r}-1) \end{vmatrix}, (r-2)(r-1) \end{vmatrix}}.$$



Den nämlichen Fehler geben auch die Näherungswerte

$$x_{r-1} - \frac{\Delta x_{r-1} \cdot \Delta x_{r-2}}{\Delta^2 x_{r-2}} \text{ und } x_{r-2} - \frac{(\Delta x_{r-2})^2}{\Delta^2 x_{r-2}}.$$

Ich habe für die grösste Wurzel der ersten Form des Näherungswertes den Vorzug gegeben, weil dabei zur Correctur von  $x_r$  kein späterer Näherungswert nötig ist. Aus demselben Grunde ist für die kleinste Wurzel die letzte Form des Näherungswertes gewählt. Uebrigens kann diese Gleichheit des Fehlers bei numerischen Berechnungen mit Vorteil als Rechenprobe benützt werden. Analoges wiederholt sich bei den drei übrigen Fällen, und mag diese Bemerkung ein für allemal gemacht sein.

Es ist nun zu untersuchen, welchem Wert sich der Fehler für grosse  $r$  nähert.

Der Nenner erhält, wenn man für die Divisionscoefficienten die ersten Näherungswerte, d. h.

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f' \alpha_n} \text{ und } (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) = \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-1}}$$

setzt, leicht den Wert

$$- \frac{\alpha_n^{3r+3n-7} \alpha_{n-1}^{r+n-3}}{f' \alpha_n^3 g' \alpha_{n-1}} (\alpha_n - \alpha_{n-1})^2.$$

Dagegen wird der Zähler für dieselben Werte identisch null, und man muss daher zu den zweiten Näherungswerten übergehen. Es ist hier zu unterscheiden, ob  $\alpha_{n-2}$  ein einzelner reeller Wert ist, oder ob  $\alpha_{n-2}$  und  $\alpha_{n-3}$  ein Paar complexe Wurzeln sind.

Im ersten Fall müssen wir setzen

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f' \alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f' \alpha_{n-1}} \text{ und } (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) = \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-2}}.$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} (r)(r) &= \left( \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f' \alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f' \alpha_{n-1}} \right) \cdot \left( \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-2}} \right) = \\ &= \frac{\alpha_n^{r+n-1} \alpha_{n-1}^{r+n-2}}{f' \alpha_n g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}^{2r+2n-3}}{f' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_n^{r+n-1} \alpha_{n-2}^{r+n-2}}{f' \alpha_n g' \alpha_{n-2}}, \end{aligned}$$

$$(r-1)(r+1) = \left( \frac{\alpha_n^{r+n-2}}{f' \alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{f' \alpha_{n-1}} \right) \cdot \left( \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-1}}{g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-1}}{g' \alpha_{n-2}} \right) = \\ = \frac{\alpha_n^{r+n-2} \alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f' \alpha_n g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}^{2r+2n-3}}{f' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_n^{r+n-2} \alpha_{n-2}^{r+n-1}}{f' \alpha_n g' \alpha_{n-2}};$$

Die vierten Glieder sind weggelassen, da sie jedenfalls bei grossen  $r$  gegen die vorhergehenden verschwinden. Setzt man diese und die analogen Ausdrücke im Zähler ein, nachdem man die letzte Colonne zur ersten addirt hat, so erhält man eine Determinante, welche sich in die Summe von 9 Determinanten zerlegen lässt, von welchen jedoch wieder vier bei grossen  $r$  gegen die übrigen verschwinden. Es bleibt erstens die Determinante, welche in allen Columnen die ersten Glieder der obigen Ausdrücke enthält, aber sie wird identisch null. Die beiden Determinanten ferner, welche je in einer Colonne die ersten, in der andern die zweiten Glieder enthalten, geben die Summe

$$\frac{\alpha_n^{r+n-3} \alpha_{n-1}^{3r+3n-7} (\alpha_n - \alpha_{n-1})^2}{f' \alpha_n f' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-1}^2}$$

Die beiden Determinanten endlich, welche je in einer Colonne die ersten, in der andern die dritten Glieder enthalten, geben die Summe

$$- \frac{\alpha_n^{2r+2n-4} \alpha_{n-1}^{r+n-3} \alpha_{n-2}^{r+n-3} (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})^2}{f' \alpha_n^2 g' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-2}}.$$

Es wird sonach für grosse  $r$  der Fehler

$$5) - \frac{\alpha_{n-1}^{2r+2n-4}}{\alpha_n^{2r+2n-4}} \cdot \frac{f' \alpha_n^2}{f' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-3}}{\alpha_n^{r+n-3}} \cdot \frac{(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})^2}{(\alpha_n - \alpha_{n-1})^2} \cdot \frac{f' \alpha_n}{g' \alpha_{n-2}}$$

Von diesen beiden Gliedern verschwindet noch das zweite gegen das erste oder umgekehrt, je nachdem  $\frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_n^2} > \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}$  oder umgekehrt, wenn die  $r$  gross genug sind. Diese Bemerkung gilt analog auch bei den übrigen Fällen und mag hier ein für allemal gemacht sein.

Man hat also jetzt für grosse  $r$

$$6) x'_r = \alpha_n - \left( \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right)^{2r+2n-4} \cdot \frac{f' \alpha_n^2}{f' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-1}} + \\ + \left( \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} \right)^{r+n-3} \cdot \frac{(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})^2}{(\alpha_n - \alpha_{n-1})^2} \cdot \frac{f' \alpha_n}{g' \alpha_{n-2}}$$

Hier mag noch bemerkt werden, dass die Determinante des Zählers identisch so transformirt werden kann, dass die ersten Näherungswerte den Ausdruck 5) ergeben. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n) (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-1}) &= (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n) (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) + \\
 &\quad + (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n) \alpha_{n-1} (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) = \\
 &= (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n) (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) + \\
 &\quad + \alpha_{n-1} (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_{n-1}) (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) + \\
 &\quad + \alpha_n \alpha_{n-1} (\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n) (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}),
 \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1^r \dots \alpha_n) (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) &= (\alpha_1^r \dots \alpha_n) (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2}) + \\
 &\quad + \alpha_{n-1} (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_{n-1}) + \\
 &\quad + \alpha_n \alpha_{n-1} (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n) (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Setze ich diese Werte in der ersten Zeile ein, so kommt

$$\begin{aligned}
 &\left| \begin{array}{cc} (\alpha_1^r \dots \alpha_n) & (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2}), & (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n) (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n) (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_{n-1}), & (\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n) (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) \end{array} \right| + \\
 &\quad + \alpha_{n-1} (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_{n-1}) \cdot \left| \begin{array}{cc} (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}), & (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_{n-1}) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n) \end{array} \right|.
 \end{aligned}$$

und dies gibt für

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1^r \dots \alpha_n) &= \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f' \alpha_n}, & (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) &= \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-1}}, \\
 (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2}) &= \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-3}}{h' \alpha_{n-2}}
 \end{aligned}$$

den angegebenen Wert.

Ist zweitens

$$\alpha_{n-2} = R(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \alpha_{n-3} = R(\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

so setze ich, wie in Abh. I.,

$$\begin{aligned}
 A_r &= R^{n-4} \sin r \varphi + Q_1 \cdot R^{n-5} \sin (r+1) \varphi + \dots \\
 B_r &= R^{n-4} \cos r \varphi + Q_1 \cdot R^{n-5} \cos (r+1) \varphi + \dots
 \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}
 A_{r+1} &= A_r \cos \varphi + B_r \sin \varphi, & B_{r+1} &= B_r \cos \varphi - A_r \sin \varphi, \\
 A_{r-1} &= A_r \cos \varphi - B_r \sin \varphi, & B_{r-1} &= B_r \cos \varphi + A_r \sin \varphi, \\
 A_{r+1} + A_{r-1} &= 2A_r \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned}
 q \alpha_{n-2} &= B_{-n+4} - i \cdot A_{-n+4}, & q \alpha_{n-3} &= B_{-n+4} + i \cdot A_{-n+4}, \\
 q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3} &= A^2_{-n+4} + B^2_{-n+4} = A^2_r + B^2_r,
 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{cc} A_r, & A_{r+1} \\ A_{r-1}, & A_r \end{array} \right| = q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3} \sin^2 \varphi,$$

$$\left| \begin{array}{cc} A_r, & A_{r+2} \\ A_{r-1}, & A_{r+1} \end{array} \right| = q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3} \sin^2 \varphi \cdot 2 \cos \varphi.$$

Ich habe hier die wichtigsten Identitäten für die  $A$  und  $B$  zusammengestellt, obwol sie teilweise erst später zur Anwendung kommen. Sie gelten übrigens analog für alle analogen Ausdrücke.

Die zweiten Näherungswerte sind nun:

$$\begin{aligned} (\alpha_1^r \dots \alpha_n) &= \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f' \alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f' \alpha_{n-1}}, \\ (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) &= \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-3}} = \\ &= \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-1}} + \frac{R^{r+n-2}(\cos(r+n-2)\varphi + i \sin(r+n-2)\varphi)}{(R(\cos \varphi + i \sin \varphi) - \alpha_{n-1}) 2Ri \sin \varphi \cdot q \alpha_{n-2}} \\ &\quad - \frac{R^{r+n-2}(\cos(r+n-2)\varphi - i \sin(r+n-2)\varphi)}{(R(\cos \varphi - i \sin \varphi) - \alpha_{n-1}) 2Ri \sin \varphi \cdot q \alpha_{n-3}} = \\ &= \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-1}} + \frac{R^{r+n-3}}{q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3} \sin \varphi} \cdot \frac{R A_{r+1} - \alpha_{n-1} A_{r+2}}{(R^2 - 2R \alpha_{n-1} \cos \varphi + \alpha_{n-1}^2)}. \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der verschwindenden Glieder hat man dann wieder

$$\begin{aligned} (r) \cdot (\bar{r}) &= \frac{\alpha_n^{r+n-1} \alpha_{n-1}^{r+n-2}}{f' \alpha_n g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}^{2r+2n-3}}{f' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-1}} \\ &\quad + \frac{\alpha_n^{r+n-1} R^{r+n-3}}{f' \alpha_n q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3} \sin \varphi} \cdot \frac{R A_{r+1} - \alpha_{n-1} A_{r+2}}{R^2 - 2R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-1}^2}, \\ (r-1) \cdot (\bar{r}+1) &= \frac{\alpha_n^{r+n-2} \alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f' \alpha_n g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}^{2r+2n-3}}{f' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-1}} \\ &\quad + \frac{\alpha_n^{r+n-2} R^{r+n-2}}{f' \alpha_n q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3} \sin \varphi} \cdot \frac{R A_{r+2} - \alpha_{n-1} A_{r+3}}{R^2 - 2R \alpha_{n-1} \cos \varphi + \alpha_{n-1}^2} \end{aligned}$$

Werden diese Ausdrücke in die Zahlendeterminante eingesetzt, so verschwinden wieder die vier letzten Determinanten bei grossen  $r$ , und die erste identisch. Die zweite und dritte behalten denselben Wert wie vorhin, die vierte und fünfte aber ergeben sich folgendermassen:

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_n^{2r+2n-4} \alpha_{n-1}^{r+n-3} R^{r+n-4}}{f' \alpha_n^2 g' \alpha_{n-1} q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3} \sin \varphi (R^2 - 2R \alpha_{n-1} \cos \varphi + \alpha_{n-1}^2)} \times \\ &\quad \times \left\{ R \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{n-1}, & R(R A_{r+2} - \alpha_{n-1} A_{r+3}) \\ 1, & (R A_{r+1} - \alpha_{n-1} A_{r+2}) \end{vmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{n-1} \begin{vmatrix} \alpha_{n-1}, & R(R A_{r+1} - \alpha_{n-1} A_{r+2}) \\ 1, & (R A_r - \alpha_{n-1} A_{r+1}) \end{vmatrix} \right\}; \end{aligned}$$

die Klammer wird, wenn man die Determinanten zusammenfasst:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{c} \alpha_{n-1}, R A_{r+2} (R^2 - 2R\alpha_{n-1} \cos \varphi + \alpha_{n-1}^2) \\ 1, A_{r+1} (R^2 - 2R\alpha_{n-1} \cos \varphi + \alpha_{n-1}^2) \end{array} \right| \\ &= (R^2 - 2R\alpha_{n-1} \cos \varphi + \alpha_{n-1}^2) \alpha_{n-1} (\alpha_{n-1} A_{r+1} - R A_{r+2}). \end{aligned}$$

Demnach ist jetzt der ganze Fehler

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right)^{2r+2n-4} \frac{f' \alpha_n^2}{f' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-1}} - \frac{R r + n - 4}{\alpha_n^{r+n-3}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3} \sin \varphi} \times \\ & \times \frac{\alpha_{n-1} A_{r+1} - R A_{r+2}}{(\alpha_n - \alpha_{n-1})^2} \end{aligned}$$

Ich setze noch

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} A_{r+1} - R A_{r+2} &= (\alpha_{n-1} - R \cos \varphi) \cdot A_{r+1} - R \sin \varphi \cdot B_{r+1} = \\ &= ((\alpha_{n-1} - R \cos \varphi) A_{-n+4} - R \sin \varphi B_{-n+4}) \cos(r+n-3)\varphi + \\ &+ ((\alpha_{n-1} - R \cos \varphi) B_{-n+4} + R \sin \varphi A_{-n+4}) \cdot \sin(r+n-3)\varphi = \\ &= A \cdot \cos(r+n-3)\varphi + B \cdot \sin(r+n-3)\varphi = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\chi + (r+n-3)\varphi), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tan \chi &= \frac{A}{B} = \frac{(\alpha_{n-1} - R \cos \varphi) A_{-n+4} - R \sin \varphi \cdot B_{-n+4}}{(\alpha_{n-1} - R \cos \varphi) B_{-n+4} + R \sin \varphi \cdot A_{-n+4}} = \\ &= \frac{\frac{A_{-n+4}}{B_{-n+4}} - \frac{R \sin \varphi}{\alpha_{n-1} - R \cos \varphi}}{1 + \frac{A_{-n+4}}{B_{-n+4}} \cdot \frac{R \sin \varphi}{\alpha_{n-1} - R \cos \varphi}}, \end{aligned}$$

also

$$\chi = \alpha - \beta,$$

wenn

$$\frac{A_{-n+4}}{B_{-n+4}} = \tan \alpha, \quad \frac{R \sin \varphi}{\alpha_{n-1} - R \cos \varphi} = \tan \beta$$

gesetzt wird.

Zugleich wird

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (\alpha_{n-1}^2 - 2R\alpha_{n-1} \cos \varphi + R^2) (A_{-n+4}^2 + B_{-n+4}^2) = \\ &= (\alpha_{n-1}^2 - 2R\alpha_{n-1} \cos \varphi + R^2) \cdot q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3}. \end{aligned}$$

Man hat sonach

$$\begin{aligned} 8) x'_r &= \alpha_n - \left( \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right)^{2r+2n-4} \frac{f' \alpha_n^2}{f' \alpha_{n-1} g' \alpha_{n-1}} - \frac{R r + n - 4}{\alpha_n^{r+n-3}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{(\alpha_n - \alpha_{n-1})^2 \sin \varphi} \times \\ & \times \sqrt{\frac{\alpha_{n-1}^2 - 2R\alpha_{n-1} \cos \varphi + R^2}{q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3}}} \cdot \sin(\chi + (r+n-3)\varphi). \end{aligned}$$

Für die kleinste Wurzel hat man nach Abb. I.

$$x_{-r} = \frac{(\alpha_1 - r + 1 \dots \alpha_n)}{(\alpha_1 - r \dots \alpha_n)}$$

und wenn

$$x_{-r+1} - x_{-r} = \Delta x_{-r}, \text{ und } \Delta x_{-r+1} - \Delta x_{-r} = \Delta^2 x_{-r}$$

gesetzt wird,

$$9) \quad x'_{-r} = x_{-r} - \frac{(\Delta x_{-r})^2}{\Delta^2 x_{-r}}.$$

Von den in Abb. I. gerechneten Beispielen gehört hierher das erste. Für den grössten Wert  $\alpha_8$  hat man

$$x_{16} = -\frac{643}{211} = -3,047393 \ 36, \quad \Delta x_{16} = -0,002373 \ 35,$$

$$x_{17} = -\frac{1961}{643} = -3,049766 \ 71, \quad \Delta x_{17} = 0,001322 \ 04,$$

$$x_{18} = -\frac{5978}{1961} = -3,048444 \ 67, \quad \Delta x_{18} = -0,000735 \ 65.$$

$$x_{19} = -\frac{2604}{854} = -3,049180 \ 32,$$

$$\frac{\Delta x_{17}}{\Delta x_{16}} = -0,557 \dots, \quad \frac{\Delta x_{18}}{\Delta x_{17}} = -0,556 \dots,$$

$$\frac{(\Delta x_{17})^2}{\Delta^2 x_{16}} = 0,000472 \ 96, \quad x'_{18} = -3,048917 \ 63,$$

$$\text{und als zu kleinen Wert } x^0_{18} = -3,049390 \ 59;$$

$$\frac{(\Delta x_{18})^2}{\Delta^2 x_{17}} = -0,000263 \ 00, \quad x'_{19} = -3,048917 \ 32,$$

$$\text{und als zu grossen Wert } x^0_{19} = -3,048654 \ 32.$$

Der kleinsten Wurzel  $\alpha_1$  nähern sich die Werte einseitig von unten. Hier ist es also von Wichtigkeit, einen zu grossen Wert zu kennen. Man hat

$$x_{-20} = \frac{435}{322} = 1,350931 \ 67, \quad \Delta x_{-21} = -0,001197 \ 89,$$

$$x_{-21} = \frac{2254}{1667} = 1,352129 \ 57, \quad \Delta x_{-22} = -0,000954 \ 84,$$

$$x_{-22} = \frac{1667}{1232} = 1,353084 \ 41, \quad \Delta x_{-23} = -0,000761 \ 73;$$

$$x_{-23} = \frac{1232}{910} = 1,353846 \ 15,$$

$$\frac{\Delta x_{-21}}{\Delta x_{-22}} = 1,254 \dots, \quad \frac{\Delta x_{-21}}{\Delta x_{-23}} = 1,253 \dots,$$

$$\frac{(\Delta x_{-22})^2}{\Delta^2 x_{-22}} = -0,003751 \ 07, \quad x'_{-22} = 1,356835 \ 48,$$

und als zu grossen Wert  $x^0_{-22} = 1,360586 \ 55$ ;

$$\frac{(\Delta x_{-23})^2}{\Delta^2 x_{-23}} = -0,003004 \ 84, \quad x'_{-23} = 1,356850 \ 99,$$

und als zu grossen Wert  $x^0_{-23} = 1,359855 \ 83$ .

## § 2.

Sei  $\alpha_n$  ein einzelner absolut grösster Wert, aber

$$\alpha_{n-1} = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{und} \quad \alpha_{n-2} = R(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Ist jetzt

$$A_r = R^{n-3} \sin r\varphi + J_1 \cdot R^{n-4} \sin(r+1)\varphi + \dots,$$

$$B_r = R^{n-3} \cos r\varphi + J_1 \cdot R^{n-4} \cos(r+1)\varphi + \dots,$$

so gelten für diese die nämlichen Gleichungen wie im vorigen Paragraphen, nur beziehen sie sich jetzt auf die Gleichung  $i_x = 0$ .

Nun ist nach Abb. I.

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)} = \alpha_n + \frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-1})}{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)} = \\ &= \alpha_n + \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n^{r+n-1}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin \varphi} \cdot A_{r+2} = \\ &= \alpha_n + \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n^{r+n-1}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin \varphi} \cdot (A_{-n+3} \cos(r+n-1)\varphi + \\ &\quad + B_{-n+3} \sin(r+n-1)\varphi), \end{aligned}$$

oder wenn ich

$$\frac{A_{-n+3}}{B_{-n+3}} = \tan \psi$$

setze:

$$10) \quad x_r = \alpha_n + \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n^{r+n-1}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{\sin \varphi \sqrt{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2}}} \cdot \sin(\psi + (r+n-1)\varphi).$$

Aus dieser Form des Fehlers erkennt man, nebenbei bemerkt, das in Abb. I. auf einem andern Weg bewiesene Gesetz wieder, dass die Näherungswerte sich reihenweise oder auf- und abspringend nähern, je nachdem  $\varphi < 90^\circ$  und  $\alpha_n = \pm$  ist, da das Vorzeichen

des Fehlers mit dem des Sinus eines Winkels sich ändert, der constant um  $\varphi$  wächst.

Weiter ist nun

$$\begin{aligned}\Delta x_{r-1} &= \frac{R^{r+n-3}}{\alpha_n^{r+n-2}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{\sin \varphi \cdot \sqrt{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2}}} \cdot \left( \frac{R}{\alpha_n} \sin(\psi + (r+n-1)\varphi) \right. \\ &\quad \left. - \sin(\psi + (r+n-2)\varphi) \right) \\ &= \frac{R^{r+n-3}}{\alpha_n^{r+n-2}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{\sin \varphi \cdot \sqrt{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2}}} \cdot \left( \left( \frac{R}{\alpha_n} - \cos \varphi \right) \sin(\psi + (r+n-1)\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi \cdot \cos(\psi + (r+n-1)\varphi) \right); \\ \Delta x_r &= \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n^{r+n-1}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{\sin \varphi \cdot \sqrt{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2}}} \cdot \left( \left( \frac{R}{\alpha_n} \cos \varphi - 1 \right) \sin(\psi + (r+n-1)\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{\alpha_n} \sin \varphi \cdot \cos(\psi + (r+n-1)\varphi) \right).\end{aligned}$$

Dann ist weiter

$$\begin{aligned}\Delta x_r - \frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta x_{r-1} &= - \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n^{r+n-1}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{\sin \varphi \cdot \sqrt{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2}}} \times \\ &\quad \times \frac{R^2 - 2R \alpha_n \cos \varphi + \alpha_n^2}{\alpha_n^2} \cdot \sin(\psi + (r+n-1)\varphi),\end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned}\Delta x_{r+1} - \frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta x_r &= - \frac{R^{r+n-1}}{\alpha_n^{r+n}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{\sin \varphi \cdot \sqrt{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2}}} \times \\ &\quad \times \frac{R^2 - 2R \alpha_n \cos \varphi + \alpha_n^2}{\alpha_n^2} \cdot \sin(\psi + (r+n)\varphi);\end{aligned}$$

folglich

$$11) \quad \frac{\Delta^2 x_r - \frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta^2 x_{r-1}}{\Delta x_r} = - \frac{R^2 - 2R \alpha_n \cos \varphi + \alpha_n^2}{\alpha_n^2}.$$

Die 11) lässt sich auch auf die Form bringen

$$\frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta x_{r-1} - 2 \frac{R}{\alpha_n} \cos \varphi \cdot \Delta x_r + \Delta x_{r+1} = 0$$

und ebenso hat man auch:

$$\frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta x_{r-2} - 2 \frac{R}{\alpha_n} \cos \varphi \cdot \Delta x_{r-1} + \Delta x_r = 0.$$

Hieraus folgt



$$12) \quad \left( \frac{R^2}{\alpha_n^2} \right) = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_r & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r+1} & \Delta x_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1} & \Delta x_r \\ \Delta x_{r-2} & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix}}.$$

$$13) \quad \left( 2 \frac{R}{\alpha_n} \cos \varphi \right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1} & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2} & \Delta x_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1} & \Delta x_r \\ \Delta x_{r-2} & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_{r+1} + \left( \frac{R^2}{\alpha_n^2} \right)_r \Delta x_{r-1}}{\Delta x_r}.$$

Dann ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n^{r+n-1}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{\sin \varphi \sqrt{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2}}} \cdot \sin(\psi + (r+n-1)\varphi) = \\ = \Delta x_r \cdot \frac{\Delta x_r - \left( \frac{R^2}{\alpha_n^2} \right)_r \Delta x_{r-1}}{\Delta^2 x_r - \left( \frac{R^2}{\alpha_n^2} \right)_r \Delta^2 x_{r-1}}. \end{aligned}$$

Der von uns gesuchte Näherungswert ist dann

$$14) \quad x'_r = x_r - \Delta x_r \cdot \frac{\Delta x_r - \left( \frac{R^2}{\alpha_n^2} \right)_r \Delta x_{r-1}}{\Delta^2 x_r - \left( \frac{R^2}{\alpha_n^2} \right)_r \Delta^2 x_{r-1}}.$$

Um nun wieder den genauen Wert des Fehlers zu bestimmen habe ich

$$\begin{aligned} x'_r = - \frac{\begin{vmatrix} x_{r+1} & x_{r+2} \\ x_r & x_{r+1} \end{vmatrix} - \left( \frac{R^2}{\alpha_n^2} \right)_r \begin{vmatrix} x_r & x_{r+1} \\ x_{r-1} & x_r \end{vmatrix}}{\Delta^2 x_r - \left( \frac{R^2}{\alpha_n^2} \right)_r \Delta^2 x_{r-1}} = - \\ = - \frac{\begin{vmatrix} x_{r+1} & \Delta x_{r+1} \\ x_r & \Delta x_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{r-1} & \Delta x_r \\ \Delta x_{r-2} & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_r & \Delta x_r \\ x_{r-1} & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_r & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1} & \Delta x_r \end{vmatrix}}{\Delta^2 x_r \cdot \begin{vmatrix} \Delta x_{r-1} & \Delta x_r \\ \Delta x_{r-2} & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix} - \Delta^2 x_{r-1} \cdot \begin{vmatrix} \Delta x_r & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1} & \Delta x_r \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

Der Zähler lässt sich als Determinante schreiben

$$\begin{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_r & \Delta x_r \\ x_{r-1} & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix}, & 0, & \begin{vmatrix} x_{r+1} & \Delta x_{r+1} \\ x_r & \Delta x_r \end{vmatrix} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}$$

Wird hier die zweite Zeile mit  $x_r$  multiplicirt und zur ersten addirt, so lässt sich der gemeinsame Factor  $\Delta x_r$  vor die Determinante setzen, und man hat

$$\Delta x_r \cdot \begin{vmatrix} x_{r-1}, & x_r, & x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}$$

Ebenso lässt sich der Nenner als Determinante schreiben und wird

$$\begin{vmatrix} -\Delta^2 x_{r-1}, & 0, & \Delta^2 x_r \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}$$

Wird hier die zweite Zeile von der ersten subtrahirt, so lässt sich  $-\Delta x_r$  vor die Determinante setzen, und man erhält

$$-\Delta x_r \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}$$

Im Ganzen ist sonach auch

$$14^a) \quad x'_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1}, & x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & x_r \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & x_{r-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1}, & 1 \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & 1 \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1}, & x_{r+2} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & x_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1}, & 1 \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & 1 \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & 1 \end{vmatrix}}$$

Würde ich

$$\left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{r+1}, & \Delta x_{r+2} \\ \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}}$$

gesetzt haben, so würde ich aus  $x_r$  den Wert bekommen haben, der jetzt  $x'_{r+1}$  heisst. Es ist darüber dieselbe Bemerkung zu machen wie § 1.

Werden in 14<sup>a</sup>) die  $x_r$  durch die Divisionscoefficienten ausgedrückt und die Nenner weggeschafft, so ergibt sich

$$15) \quad x'_r = \alpha_n +$$

$$\begin{vmatrix} (r+2) \cdot \begin{vmatrix} (r+1), & (\overline{r+2}) \\ (r), & (\overline{r+1}) \end{vmatrix}, & (r) \cdot \begin{vmatrix} (r+2), & (\overline{r+3}) \\ (r+1), & (\overline{r+2}) \end{vmatrix}, & (r) \cdot (r+1) \cdot (\overline{r+3}) \\ (r+1) \cdot \begin{vmatrix} (r), & (\overline{r+1}) \\ (r-1), & (\overline{r}) \end{vmatrix}, & (r-1) \cdot \begin{vmatrix} (r+1), & (\overline{r+2}) \\ (r), & (\overline{r+1}) \end{vmatrix}, & (r-1) \cdot (r) \cdot (\overline{r+2}) \\ (r) \cdot \begin{vmatrix} (r-1), & (\overline{r}) \\ (r-2), & (\overline{r-1}) \end{vmatrix}, & (r-2) \cdot \begin{vmatrix} (r), & (\overline{r+1}) \\ (r-1), & (\overline{r}) \end{vmatrix}, & (r-2) \cdot (r-1) \cdot (\overline{r+1}) \end{vmatrix}$$


---


$$\begin{vmatrix} (r+2) \cdot \begin{vmatrix} (r+1), & (\overline{r+2}) \\ (r), & (\overline{r+1}) \end{vmatrix}, & (r) \cdot \begin{vmatrix} (r+2), & (\overline{r+3}) \\ (r+1), & (\overline{r+2}) \end{vmatrix}, & (r) \cdot (r+1) \cdot (\overline{r+2}) \\ (r+1) \cdot \begin{vmatrix} (r), & (\overline{r+1}) \\ (r-1), & (\overline{r}) \end{vmatrix}, & (r-1) \cdot \begin{vmatrix} (r+1), & (\overline{r+2}) \\ (r), & (\overline{r+1}) \end{vmatrix}, & (r-1) \cdot (r) \cdot (\overline{r+1}) \\ (r) \cdot \begin{vmatrix} (r-1), & (\overline{r}) \\ (r-2), & (\overline{r-1}) \end{vmatrix}, & (r-2) \cdot \begin{vmatrix} (r), & (\overline{r+1}) \\ (r-1), & (\overline{r}) \end{vmatrix}, & (r-2) \cdot (r-1) \cdot (\overline{r}) \end{vmatrix}$$

Man hat so den genauen Wert des Fehlers. Nimmt man für die Divisionscoefficienten die ersten Näherungswerte und setzt demgemäss

$$(r+2) = \frac{\alpha_n^{r+n+1}}{f' \alpha_n}, \quad (\overline{r+2}) = \frac{R^{r+n-1}}{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin \varphi} \cdot A_{r+3},$$

$$\left| \begin{vmatrix} (r+1), & (\overline{r+2}) \\ (r), & (\overline{r+1}) \end{vmatrix} \right| = \frac{\alpha_n^{r+n-1} R^{r+n-2}}{f' \alpha_n i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin \varphi} (A_{r+2} \alpha_n - A_{r+3} R),$$

u. s. w., so ergibt sich für den Nenner

$$\frac{\alpha_n^{7r+7n-9} R^{2r+2n-7}}{f' \alpha_n^7 i \alpha_{n-1}^2 i \alpha_{n-2}^2 \sin^2 \varphi} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} R^2(A_{r+2} \alpha_n - A_{r+3} R), & R^2(A_{r+3} \alpha_n - A_{r+4} R), & \alpha_n^2 \\ R(A_{r+1} \alpha_n - A_{r+2} R) & R(A_{r+2} \alpha_n - A_{r+3} R) & \alpha_n \\ (A_r \alpha_n - A_{r+1} R), & (A_{r+1} \alpha_n - A_{r+2} R), & 1 \end{vmatrix}.$$

Wird in dieser Determinante die zweite Zeile mit  $-2R \cos \varphi$ , die dritte mit  $R^2$  multiplicirt und beide zur ersten addirt so verschwinden wegen  $A_{r+2} - 2A_{r+1} \cos \varphi + A_r = 0$  die beiden ersten Glieder der ersten Zeile, und man erhält

$$(\alpha_n^2 - 2R \alpha_n \cos \varphi + R^2) \cdot R \cdot \begin{vmatrix} A_{r+1} \alpha_n - A_{r+2} R, & A_{r+2} \alpha_n - A_{r+3} R \\ A_r \alpha_n - A_{r+1} R, & A_{r+1} \alpha_n - A_{r+2} R \end{vmatrix},$$

und wenn man hier die letzte Colonne mit  $\alpha_n$ , die erste mit  $-R$  multiplicirt und diese zur letzten addirt, so erhält man

$$(\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos \varphi + R^2)^2 \cdot R \cdot \begin{vmatrix} A_{r+1} & A_{r+2} \\ A_r & A_{r+1} \end{vmatrix} = \\ = (\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos \varphi + R^2)^2 \cdot R \cdot i\alpha_{n-1} i\alpha_{n-2} \sin^2 \varphi.$$

Es nähert sich somit für grosse  $r$  der Nenner dem Wert

$$\frac{\alpha_n^{7r+7n-9} R^{2r+2n-6}}{f' \alpha_n^7 i\alpha_{n-1} i\alpha_{n-2}} \cdot (\alpha_n^2 - 2\alpha_n R \cos \varphi + R^2)^2.$$

Den Zähler untersuche ich lieber in der Form, die man erhält, wenn man die letzte Colonne zur zweiten, diese dann zur ersten addirt, also in der Form

$$\begin{vmatrix} (r+2)(r+1)(\overline{r+1}), & (r)(r+2)(\overline{r+2}), & (r)(r+1)(\overline{r+3}) \\ (r+1)(r)(\overline{r}), & (r-1)(r+1)(\overline{r+1}), & (r-1)(r)(\overline{r+2}) \\ (r)(r-1)(\overline{r-1}), & (r-2)(r)(\overline{r}) & (r-2)(r-1)(\overline{r+1}) \end{vmatrix}$$

Werden hier die ersten Näherungswerte eingesetzt, so erhält man

$$\frac{\alpha_n^{6r+6n-6} R^{3r+3n-6}}{f' \alpha_n^6 i\alpha_{n-1}^3 i\alpha_{n-2}^3 \sin^3 \varphi} \cdot \begin{vmatrix} A_{r+2} & A_{r+3} & A_{r+4} \\ A_{r+1} & A_{r+2} & A_{r+3} \\ A_r & A_{r+1} & A_{r+2} \end{vmatrix} = 0,$$

wie man erkennt, wenn man die erste Colonne, und die mit  $-2\cos\varphi$  multiplicirte zweite Colonne zur dritten addirt. Es ist daher überzugehen zu den zweiten Näherungswerten der Divisionscoefficienten, und dabei ist wieder zu unterscheiden, ob  $\alpha_{n-3}$  ein einzelner Wert, oder ob  $\alpha_{n-3}$  und  $\alpha_{n-4}$  ein Paar conjugirte Werte sind. Man hat aber im ersten Fall

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f' \alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-1}}{f' \alpha_{n-2}} = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f' \alpha_n} + \\ + \frac{R^{r+n-1} (\cos(r+n-1)\varphi + i \sin(r+n-1)\varphi)}{(R(\cos\varphi + i \sin\varphi) - \alpha_n) 2R i \sin\varphi \cdot i\alpha_{n-1}} \\ - \frac{R^{r+n-1} (\cos(r+n-1)\varphi - i \sin(r+n-1)\varphi)}{(R(\cos\varphi - i \sin\varphi) - \alpha_n) \cdot 2R i \sin\varphi \cdot i\alpha_{n-2}},$$

und da jetzt

$$i\alpha_{n-1} = B_{-n+3} - iA_{-n+3}, \quad i\alpha_{n-2} = B_{-n+3} + iA_{-n+3}$$

erhält man dafür

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f' \alpha_n} + \frac{R^{r+n-2}}{i\alpha_{n-1} i\alpha_{n-2} \sin\varphi} \cdot \frac{RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}}{R^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + \alpha_n^2}; \\ (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) = \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-3}} = \\ = \frac{R^{r+n-2}}{i\alpha_{n-1} i\alpha_{n-2} \sin\varphi} \cdot A_{r+1} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-3}}$$

Werden diese Werte eingesetzt, und nur die Glieder beibehalten, die in Betracht kommen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (r+2)(r+1)(r+1) &= \frac{\alpha_n^{2r+2n+1} R^{r+n-1} A_{r+2}}{f' \alpha_n^2 i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin \varphi} + \\
 &+ \frac{\alpha_n^{r+n-1} R^{2r+2n-3} A_{r+2} (\alpha_n (R A_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}) + R (R A_{r+3} - \alpha_n A_{r+4}))}{f' \alpha_n i \alpha_{n-1}^2 i \alpha_{n-2}^2 \sin^2 \varphi (R^2 - 2 R \alpha_n \cos \varphi + \alpha_n^2)} \\
 &+ \frac{\alpha_n^{2r+2n+1} \alpha_{n-3}^{r+n-1}}{f' \alpha_n^3 g' \alpha_{n-3}}; \\
 (r)(r+2)(r+2) &= \frac{\alpha_n^{2r+2n} R^{r+n-1} A_{r+3}}{f' \alpha_n^2 i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin \varphi} + \\
 &+ \frac{\alpha_n^{r+n-1} R^{2r+2n-3} A_{r+3} (\alpha_n^2 (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R^2 (R A_{r+3} - \alpha_n A_{r+4}))}{f' \alpha_n i \alpha_{n-1}^2 i \alpha_{n-2}^2 \sin^2 \varphi (R^2 - 2 R \alpha_n \cos \varphi + \alpha_n^2)} \\
 &+ \frac{\alpha_n^{2r+2n} \alpha_{n-3}^{r+n}}{f' \alpha_n^2 g' \alpha_{n-3}}; \\
 (r)(r+1)(r+3) &= \frac{\alpha_n^{2r+2n-1} R^{r+n} A_{r+4}}{f' \alpha_n^2 i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin \varphi} + \\
 &+ \frac{\alpha_n^{r+n-1} R^{2r+2n-2} A_{r+4} (\alpha_n (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R (R A_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}))}{f' \alpha_n i \alpha_{n-1}^2 i \alpha_{n-2}^2 \sin^2 \varphi (R^2 - 2 R \alpha_n \cos \varphi + \alpha_n^2)} \\
 &+ \frac{\alpha_n^{2r+2n-1} \alpha_{n-3}^{r+n+1}}{f' \alpha_n^2 g' \alpha_{n-3}}.
 \end{aligned}$$

Wenn die gefundenen Ausdrücke in die Zählerdeterminante eingesetzt werden, lässt sich diese zerlegen in die Summe von 27 Determinanten. Von diesen kommen jedoch nur 7 in Betracht, indem die übrigen bei grossen  $r$  gegen sie verschwinden. Diese 7 sind die folgenden: Erstens die, welche in allen Columnen die ersten Glieder der obigen Ausdrücke enthält und identisch verschwindet, wie wir bereits gesehen haben. Dann kommen die drei, welche in je zwei Columnen die ersten Glieder, in der dritten die zweiten Glieder jener Ausdrücke enthalten; endlich die drei, welche in je zwei Columnen die ersten Glieder, in der dritten die dritten Glieder der Ausdrücke enthalten. Die Summe der drei ersteren ist

$$\begin{aligned}
 &\frac{\alpha_n^{5r+5n-8} R^{4r+4n-10}}{f' \alpha_n^5 i \alpha_{n-1}^4 i \alpha_{n-2}^4 \sin^4 \varphi (\alpha_n^2 - 2 \alpha_n R \cos \varphi + R^2)} \times \\
 &\left\{ \begin{aligned} &\alpha_n^2 A_{r+2}, \alpha_n^3 A_{r+3}, R^2 A_{r+4} (\alpha_n (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R (R A_{r+2} - \alpha_n A_{r+3})) \\ &\alpha_n \alpha_{n-1} A_{r+1}, \alpha_n A_{r+2}, R A_{r+3} (\alpha_n (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R (R A_{r+2} - \alpha_n A_{r+3})) \\ &A_r, A_{r+1}, A_{r+2} (\alpha_n (R A_{r-1} - \alpha_n A_r) + R (R A_r - \alpha_n A_{r+1})) \end{aligned} \right\} \\
 &+ \left\{ \begin{aligned} &\alpha_n^2 A_{r+2}, R^2 A_{r+3} (\alpha_n^2 (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R^2 (R A_{r+3} - \alpha_n A_{r+4})), \alpha_n^2 A_{r+4} \\ &\alpha_n A_{r+1}, R A_{r+2} (\alpha_n^2 (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R^2 (R A_{r+2} - \alpha_n A_{r+3})), \alpha_n A_{r+3} \\ &A_r, A_{r+1} (\alpha_n^2 (R A_{r-1} - \alpha_n A_r) + R^2 (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2})), A_{r+2} \end{aligned} \right\} \\
 &+ R \left\{ \begin{aligned} &R^2 A_{r+2} (\alpha_n (R A_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}) + R (R A_{r+3} - \alpha_n A_{r+4})), \alpha_n^2 A_{r+3}, \alpha_n^2 A_{r+4} \\ &R A_{r+1} (\alpha_n (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R (R A_{r+2} - \alpha_n A_{r+3})), \alpha_n A_{r+2}, \alpha_n A_{r+3} \\ &A_r (\alpha_n (R A_r - \alpha_n A_{r+1}) + R (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2})), A_{r+1}, A_{r+2} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Wird in der zweiten Determinante die erste Colonne zur dritten addirt, so hat man

$$\alpha_n^2 A_{r+4} + \alpha_n^2 A_{r+2} = \alpha_n^2 A_{r+3} \cdot 2 \cos \varphi, \text{ u. s. f.}$$

Wird dann statt der dritten Colonne die zweite mit  $2 \cos \varphi$  multiplicirt und mit der dritten vertauscht, so wird die erste Zeile

$$\alpha_n^2 A_{r+2}, \alpha_n^2 A_{r+3}, \\ -2R^2 \cos \varphi A_{r+3} (\alpha_n^2 (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) - R^2 (R A_{r+3} - \alpha_n A_{r+4})),$$

und analog die übrigen.

Wird in der dritten Determinante die zweite Colonne mit  $-2 \cos \varphi$  multiplicirt und zur dritten addirt, so hat man

$$\alpha_n^2 A_{r+4} - \alpha_n^2 A_{r+3} \cdot 2 \cos \varphi = -\alpha_n^2 A_{r+2}.$$

Wird dann die letzte Colonne mit der ersten vertauscht, so erhält man als erste Zeile

$$\alpha_n^2 A_{r+2}, \alpha_n^2 A_{r+3}, R^2 A_{r+2} (\alpha_n (R A_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}) + R (R A_{r+3} - \alpha_n A_{r+4})),$$

und analog die übrigen.

Nun haben die drei Determinanten die ersten Colonnen gleich, lassen sich also zusammenfassen. Das erste Glied der letzten Colonne wird

$$\begin{aligned} R^2 \alpha_n^2 (A_{r+4} - 2 \cos \varphi A_{r+3}) (R A_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + \\ + R^3 \alpha_n (A_{r+4} + A_{r+2}) (R A_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}) + \\ + R^4 (A_{r+2} - 2 \cos \varphi A_{r+3}) (R A_{r+3} - \alpha_n A_{r+4}) \\ = R^2 \{ \alpha_n^3 A_{r+2}^2 - \alpha_n^2 R (A_{r+1} A_{r+2} + 2 \cos \varphi A_{r+3}^2) + \\ + \alpha_n R^2 (2 \cos \varphi A_{r+2} A_{r+3} + A_{r+4}^2) - R^3 A_{r+3} A_{r+4} \} \\ = R^2 (\alpha_n^2 - 2 R \alpha_n \cos \varphi + R^2) (\alpha_n A_{r+2}^2 - R A_{r+3} A_{r+4}). \end{aligned}$$

Analog werden auch die beiden andern Glieder, so dass der ganze Ausdruck ist

$$\frac{\alpha_n^{5r+5n-8} R^{4r+4n-10}}{f' \alpha_n^5 i \alpha_{n-1}^4 i \alpha_{n-2}^4 \sin^4 \varphi} \begin{vmatrix} \alpha_n^2 A_{r+2}, \alpha_n^2 A_{r+3}, R^2 (\alpha_n A_{r+2}^2 - R A_{r+3} A_{r+4}) \\ \alpha_n A_{r+1}, \alpha_n A_{r+2}, R (\alpha_n A_{r+1}^2 - R A_{r+2} A_{r+3}) \\ A_r, A_{r+1}, (\alpha_n A_r^2 - R A_{r+1} A_{r+2}) \end{vmatrix}$$

Wird hier die zweite Zeile mit  $-2 \alpha_n \cos \varphi$  und die dritte mit  $\alpha_n^2$  multiplicirt, und beide zur ersten addirt, so werden die beiden ersten Glieder derselben null. Da ferner

$$\begin{vmatrix} \alpha_n A_{r+1}, \alpha_n A_{r+2} \\ A_r, A_{r+1} \end{vmatrix} = \alpha_n i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi$$

wird, so erhält man

$$\frac{\alpha_n^{5r+5n-7} R^{4r+4n-10}}{f' \alpha_n^5 i \alpha_{n-1}^3 i \alpha_{n-2}^3 \sin^3 \varphi} \left\{ \begin{aligned} &\alpha_n^2 (\alpha_n A_r^2 - R A_{r+1} A_{r+2}) \\ &- 2R \alpha_n \cos \varphi (\alpha_n A_{r+1}^2 - R A_{r+2} A_{r+3}) \\ &+ R^2 (\alpha_n A_{r+2} - R A_{r+3} A_{r+4}) \end{aligned} \right\}.$$

Der Ausdruck ist noch weiter umzuformen. Zunächst nimmt die Klammer noch die Form an

$$\begin{aligned} &(\alpha_n^2 - 2R \alpha_n \cos \varphi + R^2) (\alpha_n A_r^2 - R A_{r+3} A_{r+4}) \\ &- \alpha_n^2 R (2A_{r+1} A_{r+2} - A_{r-1} A_r - A_{r+3} A_{r+4}) \\ &+ \alpha_n R^2 (2A_{r+2}^2 - A_r^2 - A_{r+4}^2). \end{aligned}$$

Ich drücke weiter alle  $A$  durch  $A_{r+2}$  und  $B_{r+2}$ , resp. durch  $A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2$  und  $A_{r+2} B_{r+2}$  aus, während  $A_{r+2}^2 + B_{r+2}^2 = i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2}$  ist. Ich erhalte so

$$\begin{aligned} A_r^2 &= \frac{1}{2} i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} + \frac{1}{2} (A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2) \cos 4\varphi - A_{r+2} B_{r+2} \sin 4\varphi, \\ A_{r+3} A_{r+4} &= \frac{1}{2} i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \cos \varphi + \frac{1}{2} (A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2) \cos 3\varphi \\ &\quad + A_{r+2} B_{r+2} \sin 3\varphi, \\ 2A_{r+1} A_{r+2} - A_{r-1} A_r - A_{r+3} A_{r+4} &= 2 \sin^2 2\varphi ((A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2) \cos \varphi \\ &\quad - 2A_{r+2} B_{r+2} \sin \varphi), \\ 2A_{r+2}^2 - A_r^2 - A_{r+4}^2 &= 2(A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2) \sin^2 2\varphi. \end{aligned}$$

Dadurch erhält die Klammer die Form

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} (\alpha_n^2 - 2\alpha_n R \cos \varphi + R^2) (\alpha_n - R \cos \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{2} (A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2) \cdot a - A_{r+2} B_{r+2} \cdot b, \end{aligned}$$

wenn ich zur Abkürzung setze

$$\begin{aligned} &(\alpha_n^2 - 2\alpha_n R \cos \varphi + R^2) (\alpha_n \cos 4\varphi - R \cos 3\varphi) \\ &\quad - 4\alpha_n R \sin^2 2\varphi (\alpha_n \cos \varphi - R) = a \end{aligned}$$

und

$$(\alpha_n^2 - 2\alpha_n R \cos \varphi + R^2) (\alpha_n \sin 4\varphi + R \sin 3\varphi) - 4\alpha_n^2 R \sin^2 2\varphi \cdot \sin \varphi = b.$$

Da aber weiter

$$\begin{aligned} A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2 &= (A_{-n+3}^2 - B_{-n+3}^2) \cdot \cos(r+n-1)2\varphi \\ &\quad + 2A_{-n+3} B_{-n+3} \cdot \sin(r+n-1)2\varphi, \\ A_{r+2} B_{r+2} &= A_{-n+3} B_{-n+3} \cdot \cos(r+n-1)2\varphi \\ &\quad - \frac{1}{2} (A_{-n+3}^2 - B_{-n+3}^2) \sin(r+n-1)2\varphi, \end{aligned}$$

wird der Ausdruck zu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} (\alpha_n^2 - 2\alpha_n R \cos \varphi + R^2) (\alpha_n - R \cos \varphi) \\ &\quad + (\frac{1}{2} (A_{-n+3}^2 - B_{-n+3}^2) \cdot a - A_{-n+3} B_{-n+3} \cdot b) \cos(r+n-1)2\varphi \\ &\quad + (A_{-n+3} B_{-n+3} \cdot a + \frac{1}{2} (A_{-n+3}^2 - B_{-n+3}^2) b) \sin(r+n-1)2\varphi \\ &= C + A \cdot \cos(r+n-1)2\varphi + B \cdot \sin(r+n-1)2\varphi \\ &= C + \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\chi + (r+n-1)2\varphi), \end{aligned}$$

wenn man

$$\tan \chi = \frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}(A_{-n+3}^2 - B_{-n+3}^2) \cdot a - A_{-n+3} B_{-n+3} \cdot b}{A_{-n+3} B_{-n+3} \cdot a + \frac{1}{2}(A_{-n+3}^2 + B_{-n+3}^2) \cdot b}$$

setzt. Es wird dann

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{4}(A_{-n+3}^2 + B_{-n+3}^2)(a^2 + b^2),$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{2} i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} (\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos \varphi + R^2) \times \\ \times \sqrt{\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos \varphi + R^2}, \text{ und}$$

$$\chi = 2\alpha - 90^\circ - \beta,$$

wenn man

$$\frac{A_{-n+3}}{B_{-n+3}} = \tan \alpha, \quad \frac{b}{a} = \tan \beta$$

setzt. Die Summe der drei Determinanten nähert sich also dem Wert

$$\frac{\alpha_n^{5r+5n-7} R^{4r+4n-10}}{2 \cdot f' \alpha_n^5 i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi} \cdot \left\{ (\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos \varphi + R^2) (\alpha_n - R \cos \varphi) + \right. \\ \left. + (\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos 3\varphi + R^2) \sqrt{\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos \varphi + R^2} \sin(\chi + (r+n-1)2\varphi) \right\}.$$

Was die 3 letzten Determinanten betrifft, so ist ihre Summe

$$\frac{\alpha_n^{6r+6n-6} R^{2r+2n-7} \alpha_{n-3}^{r+n-3}}{f' \alpha_n^6 i \alpha_{n-1}^2 i \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi g' \alpha_{n-3}} \cdot \left\{ \alpha_{n-3}^2 \begin{vmatrix} R^2 A_{r+2} & R^2 A_{r+3} & \alpha_{n-3}^2 \\ R A_{r+1} & R A_{r+2} & \alpha_{n-3} \\ A_r & A_{r+1} & 1 \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + R \alpha_{n-3} \begin{vmatrix} R^2 A_{r+2} & \alpha_{n-3}^2 & R^2 A_{r+4} \\ R A_{r+1} & \alpha_{n-3} & R A_{r+3} \\ A_r & 1 & A_{r+2} \end{vmatrix} + R^3 \begin{vmatrix} \alpha_{n-3}^2 & R^2 A_{r+3} & R^2 A_{r+4} \\ \alpha_{n-3} & R A_{r+2} & R A_{r+3} \\ 1 & A_{r+1} & A_{r+2} \end{vmatrix} \right\}.$$

Die 3 Determinanten lassen sich nun wieder ähnlich, wie vorhin, in eine zusammenfassen, und man erhält

$$\frac{\alpha_n^{6r+6n-6} R^{2r+2n-7} \alpha_{n-3}^{r+n-3}}{f' \alpha_n^6 i \alpha_{n-1}^2 i \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi g' \alpha_{n-3}} (R^2 - 2R\alpha_{n-3} \cos \varphi + \alpha_{n-3}^2) \times \\ \times \begin{vmatrix} R^2 A_{r+2} & R^2 A_{r+3} & \alpha_{n-3}^2 \\ R A_{r+1} & R A_{r+2} & \alpha_{n-3} \\ A_r & A_{r+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Multipliziert man wieder die zweite Zeile der Determinante mit  $-2R \cos \varphi$ , die dritte mit  $R^2$ , und addirt beide zur ersten, so erhält man für die Determinante den Wert

$$(R^2 - 2R\alpha_{n-3} \cos \varphi + \alpha_{n-3}^2) \cdot R \cdot i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi.$$

Die Summe dieser 3 Determinanten nähert sich also dem Wert



$$\frac{\alpha_n^{6r+6n-6} R^{2r+2n-6} \alpha_{n-3}^{r+n-3}}{f' \alpha_n^6 i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} g' \alpha_{n-3}} (R^2 - 2R\alpha_{n-3} \cos p + \alpha_{n-3}^2)^2,$$

und man hat sonach für grosse  $r$

$$\begin{aligned} 16) \quad x'_r &= \alpha_n + \frac{R^{2r+2n-4}}{\alpha_n^{2r+2n-2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} f' \alpha_n^2}{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi (R^2 - 2R\alpha_n \cos \varphi + \alpha_n^2)} \times \\ &\times \left\{ \alpha_n - R \cos \varphi + \frac{\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos 3\varphi + R^2}{\sqrt{\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos \varphi + R^2}} \sin(\chi + (r+n-1)2\varphi) \right\} \\ &+ \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-3}}{\alpha_n^{r+n-3}} \cdot \frac{f' \alpha_n}{g' \alpha_{n-3}} \cdot \frac{(R^2 - 2R\alpha_{n-3} \cos \varphi + \alpha_{n-3}^2)^2}{(\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos \varphi + R^2)^2}. \end{aligned}$$

Ist im zweiten Fall

$$\left. \begin{matrix} \alpha_{n-3} \\ \alpha_{n-4} \end{matrix} \right\} = R' \cdot (\cos \varphi' \pm i \cdot \sin \varphi'),$$

so sei noch

$$s_x = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-5}) = x^{n-5} + S_1 x^{n-4} + \dots, \text{ und}$$

$$A'_r = R'^{n-5} \sin r \varphi' + S_1 \cdot R'^{n-4} \sin(r+1) \varphi' + \dots$$

$$B'_r = R'^{n-5} \cos r \varphi' + S_1 \cdot R'^{n-4} \cos(r+1) \varphi' + \dots$$

Der zweite Näherungswert für  $(\alpha_1' \dots \alpha_n)$  ist derselbe wie p. 34. Dagegen hat man jetzt zu nehmen

$$(\alpha_1' \dots \alpha_{n-1}) = \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-3}} + \frac{\alpha_{n-4}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-4}}.$$

Hier ist

$$g' \alpha_{n-3} = (\alpha_{n-3} - \alpha_{n-1})(\alpha_{n-3} - \alpha_{n-2})(\alpha_{n-3} - \alpha_{n-4}) \cdot s \alpha_{n-3},$$

$$g' \alpha_{n-4} = (\alpha_{n-4} - \alpha_{n-1})(\alpha_{n-4} - \alpha_{n-2})(\alpha_{n-4} - \alpha_{n-3}) \cdot s \alpha_{n-4};$$

und man findet

$$(\alpha_{n-3} - \alpha_{n-1})(\alpha_{n-3} - \alpha_{n-2}) = (R'^2 \cos 2\varphi' - 2R'R \cos \varphi \cos \varphi' + R^2) + i \cdot (R' \cos \varphi' - R \cos \varphi) \cdot 2R' \sin \varphi' = M + iN,$$

ebenso

$$(\alpha_{n-4} - \alpha_{n-1})(\alpha_{n-4} - \alpha_{n-2}) = M - iN;$$

ferner ist

$$s \alpha_{n-3} = B'_{-n+5} - i \cdot A'_{-n+5}, \quad s \alpha_{n-4} = B'_{-n+5} + i \cdot A'_{-n+5}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-3}} + \frac{\alpha_{n-4}^{r+n-2}}{g' \alpha_{n-4}} &= \frac{R'^{r+n-2}}{2R' \sin \varphi' i \cdot s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4}} \times \\ &\times \left( \frac{R'_{r+3} + i A'_{r+3}}{M + iN} - \frac{B'_{r+3} - i A'_{r+3}}{M - iN} \right) \\ &= \frac{R'^{r+n-3}}{s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4} \sin \varphi'} \cdot \frac{M A'_{r+3} - N B'_{r+3}}{M^2 + N^2}. \end{aligned}$$

Nun findet sich weiter

$$M^2 + N^2 = (R'^2 - 2R'R \cos(\varphi' + \varphi) + R^2)(R'^2 - 2R'R \cos(\varphi' - \varphi) + R^2),$$

und

$$MA'_{r+3} - NB'_{r+3} = R'^2 A'_{r+1} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+2} + R^2 A'_{r+3}.$$

Man hat folglich im Ganzen

$$(\alpha_1' \dots \alpha_{n-1}') = \frac{R'^{r+n-3}}{i\alpha_{n-1} i\alpha_{n-2} \sin \varphi} \cdot A'_{r+1} + \frac{R'^{r+n-3}}{s\alpha_{n-3} s\alpha_{n-4} \sin \varphi'} \times \\ \times \frac{R'^2 A'_{r+1} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+2} + R^2 A'_{r+3}}{(R'^2 - 2R'R \cos(\varphi + \varphi') + R^2)(R'^2 - 2R'R \cos(\varphi - \varphi') + R^2)}.$$

Für  $(r+2)(r+1)(r+1)$ ,  $(r)(r+2)(r+2)$  und  $(r)(r+1)(r+3)$  erhält man dann als zweite Näherungswerte Ausdrücke, in welchen die beiden ersten Glieder die nämlichen sind wie p. 35. Die dritten Glieder dagegen werden

$$\frac{\alpha_n^{2r+2n+1} R'^{r+n-2}}{f' \alpha_n^2 s\alpha_{n-3} s\alpha_{n-4} \sin \varphi'} \times \\ \times \frac{(R'^2 A'_{r+2} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+3} + R^2 A'_{r+4})}{(R'^2 - 2R'R \cos(\varphi' + \varphi) + R^2)(R'^2 - 2R'R \cos(\varphi' - \varphi) + R^2)},$$

resp.

$$\alpha_n^{2r+2n} R'^{r+n-1} (R'^2 A'_{r+3} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+4} + R^2 A'_{r+5}), \text{ und}$$

$$\alpha_n^{2r+2n-1} R'^{r+n} (R'^2 A'_{r+4} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+5} + R^2 A'_{r+6}),$$

Werden diese Ausdrücke dann in die Zahlendeterminante eingesetzt, so werden von den 27 Determinanten die vier ersten dieselben wie im ersten Fall. Für die drei folgenden aber; die allein noch in Betracht kommen, erhält man, abgesehen von dem gemeinsamen Factor

$$\frac{1}{f' \alpha_n^6 i\alpha_{n-1}^2 i\alpha_{n-2}^2 \sin^2 \varphi s\alpha_{n-3} s\alpha_{n-4} \sin \varphi'} (R'^2 - 2R'R \cos(\varphi + \varphi') + R^2) \times \\ \times \frac{\alpha_n^{6r+6n-6} R^{2r+2n-7} R'^{r+n-4}}{(R'^2 - 2R'R \cos(\varphi - \varphi') + R^2)}$$

die Summe

$$R'^2 \begin{vmatrix} R^2 A_{r+2} & R^2 A_{r+3} & R'^2 (R'^2 A'_{r+4} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+5} + R^2 A'_{r+6}) \\ R A_{r+1} & R A_{r+2} & R' (R'^2 A'_{r+3} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+4} + R^2 A'_{r+5}) \\ A_r & A_{r+1} & (R'^2 A'_{r+2} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+3} + R^2 A'_{r+4}) \end{vmatrix} + \\ + R'R \begin{vmatrix} R^2 A_{r+2} & R'^2 (R'^2 A'_{r+3} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+4} + R^2 A'_{r+5}) & R^2 A_{r+4} \\ R A_{r+1} & R' (R'^2 A'_{r+2} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+3} + R^2 A'_{r+4}) & R A_{r+3} \\ A_r & (R'^2 A'_{r+1} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+2} + R^2 A'_{r+3}) & A_{r+2} \end{vmatrix} + \\ + R^2 \begin{vmatrix} R'^2 (R'^2 A'_{r+2} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+3} + R^2 A'_{r+4}) & R^2 A_{r+3} & R^2 A_{r+4} \\ R' (R'^2 A'_{r+1} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+2} + R^2 A'_{r+3}) & A_{r+2} & R A_{r+3} \\ (R'^2 A'_{r+1} - 2R'R \cos \varphi A'_{r+2} + R^2 A'_{r+3}) & A_{r+1} & A_{r+2} \end{vmatrix}.$$

Die Determinanten lassen sich wieder so umformen, dass sie die ersten Colonnen gleich haben. Man kann sie dann in eine zusammenfassen, und indem man die zweite Zeile mit  $-2R \cos \varphi$ , die dritte mit  $R^2$  multiplicirt und zur ersten addirt, werden die ersten Glieder der ersten Zeile null. Man erhält so den Ausdruck

$$\begin{aligned} & R i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi \{ R'^4 (R'^2 A'_{r+4} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+5} + R^2 A'_{r+6}) \\ & \quad - R'^3 R 4 \cos \varphi (R'^2 A'_{r+3} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+4} + R^2 A'_{r+5}) \\ & \quad + R'^2 R^2 (2 + 4 \cos^2 \varphi) (R'^2 A'_{r+2} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+3} + R^2 A'_{r+4}) \\ & \quad - R' R^3 4 \cos \varphi (R'^2 A'_{r+1} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+2} + R^2 A'_{r+3}) \\ & \quad + R^4 (R'^2 A'_r - 2R' R \cos \varphi A'_{r+1} + R^2 A'_{r+2}) \} = \\ & R i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi (R'^2 - 2R' R \cos(\varphi' + \varphi) + R^2) \times \\ & \times (R'^2 - 2R' R \cos(\varphi' - \varphi) + R^2) (R'^2 A'_{r+4} - 2R' R \cos \varphi A'_{r+5} + R^2 A'_{r+6}). \end{aligned}$$

Der letzte Factor ist

$$\begin{aligned} & (R'^2 \cos \varphi' - 2R' R \cos \varphi + R^2 \cos \varphi') A'_{r+3} + (R'^2 - R^2) \sin \varphi' B'_{r+3} = \\ & \quad \alpha' A'_{-n+5} + \beta' B'_{r+3} = \\ & \quad (\alpha' A'_{-n+5} + \beta' B'_{-n+5}) \cos(r+n-2)\varphi' + \\ & \quad + (\alpha' B'_{-n+5} - \beta' A'_{-n+5}) \sin(r+n-2)\varphi' \\ & = A' \cos(r+n-2)\varphi' + B' \sin(r+n-2)\varphi' \\ & = \sqrt{A'^2 + B'^2} \sin(\chi' + (r+n-2)\varphi'), \end{aligned}$$

wenn ich

$$\frac{A'}{B'} = \tan \chi'$$

setze, wobei sich noch ergibt

$$\begin{aligned} A'^2 + B'^2 &= (A'^2_{-n+5} + B'^2_{-n+5}) (\alpha'^2 + \beta'^2) \\ &= s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4} (R'^2 - 2R' R \cos(\varphi' + \varphi) + R^2) (R'^2 - 2R' R \cos(\varphi' - \varphi) + R^2), \end{aligned}$$

und

$$\chi' = \alpha' + \beta',$$

wenn man

$$\frac{A'_{-n+5}}{B'_{-n+5}} = \tan \alpha' \quad \text{und} \quad \frac{\beta'}{\alpha'} = \tan \beta'$$

setzt.

Die Summe dieser drei Determinanten nähert sich also für grosse  $r$  dem Werte

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_n^{6r+6n-6} R^{2r+2n-6} R' r^{n-4}}{f' \alpha_n^6 i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin \varphi'} \times \\ & \times \sqrt{\frac{(R'^2 - 2R' R \cos(\varphi' + \varphi) + R^2)(R'^2 - 2R' R \cos(\varphi' - \varphi) + R^2)}{s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4}}} \times \\ & \times \sin(\chi' + (r+n-2)\varphi'). \end{aligned}$$

Im Ganzen aber hat man im zweiten Fall

$$\begin{aligned}
 17) \quad x'_r &= \alpha_n + \frac{R^{2r+2n-4}}{\alpha_n^{2r+2n-2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} f' \alpha_n^2}{i \alpha_{n-1} i \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi (R^2 - 2R \alpha_n \cos \varphi + \alpha_n^2)} \times \\
 &\times \left\{ \alpha_n - R \cos \varphi + \frac{\alpha_n^2 - 2R \alpha_n \cos 3\varphi + R^2}{\sqrt{\alpha_n^2 - 2R \alpha_n \cos \varphi + R^2}} \cdot \sin(\chi + (r+n-1)2\varphi) \right\} \\
 &+ \frac{R'^r + n-4}{\alpha_n^{r+1+n-3}} f' \alpha_n \frac{\sqrt{(R'^2 - 2R' R \cos(\varphi' + \varphi) + R^2)(R'^2 - 2R' R \cos(\varphi' - \varphi) + R^2)}}{\sin \varphi' \sqrt{s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4}} (\alpha_n^2 - 2R \alpha_n \cos \varphi + R^2)^2} \\
 &\times \sin(\chi' + (r+n-2)\varphi').
 \end{aligned}$$

Für die kleinste Wurzel hat man in diesem Fall ebenso nach Abh. I.

$$\begin{aligned}
 x_{-r} &= \frac{(\alpha_1^{-r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{-r} \dots \alpha_n)} = \alpha_1 + \frac{(\alpha_2^{-r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{-r} \dots \alpha_n)} \\
 &= \alpha_1 + \frac{R^{-r+n-2}}{\alpha_1^{-r+1+n-1}} \cdot \frac{f' \alpha_1}{\sin \varphi \sqrt{m \alpha_2 m \alpha_3}} \cdot \sin(\psi + (-r+n-1)\varphi),
 \end{aligned}$$

wenn

$$\frac{A_{-n+3}}{B_{-n+3}} = \tan \psi$$

gesetzt wird, und dann

$$18) \quad x'_{-r} = x_{-r} - \Delta x_{-r} \frac{\Delta x_{-r} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-r} \Delta x_{-r-1}}{\Delta^2 x_{-r} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-r} \Delta^2 x_{-r-1}}$$

wobei

$$\left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{-r+1} & \Delta x_{-r+2} \\ \Delta x_{-r} & \Delta x_{-r+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{-r} & \Delta x_{-r+1} \\ \Delta x_{-r-1} & \Delta x_{-r} \end{vmatrix}},$$

$$\left(2 \frac{R}{\alpha_1} \cos \varphi\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{-r} & \Delta x_{-r+2} \\ \Delta x_{-r-1} & \Delta x_{-r+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{-r} & \Delta x_{-r+1} \\ \Delta x_{-r-1} & \Delta x_{-r} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_{-r+1} + \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-r} \Delta x_{-r-1}}{\Delta x_{-r}}.$$

Von den Beispielen der Abh. I. gehört hierher die grösste Wurzel des dritten und die kleinste Wurzel des zweiten Beispiels.

Im dritten Beispiel hat man

$$x_5 = \frac{35779}{6224} = 5,748553 \, 9845, \quad x_6 = \frac{205664}{35779} = 5,748176 \, 3045,$$

$$x_7 = \frac{1182225}{205664} = 5,748332\ 2312, \quad x_9 = \frac{39065224}{6795874} = 5,748373\ 7926,$$

$$x_8 = \frac{6795874}{1182225} = 5,748376\ 1551, \quad x_{10} = \frac{224561400}{39065224} = 5,748370\ 9807.$$

$$\left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_7 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_7 & \Delta x_8 \\ \Delta x_6 & \Delta x_7 \\ \Delta x_6 & \Delta x_7 \\ \Delta x_5 & \Delta x_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_6 & \Delta x_7 \\ \Delta x_6 & \Delta x_7 \\ \Delta x_5 & \Delta x_6 \end{vmatrix}} = 0,056150..., \quad \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_8 = 0,056182...$$

$$\cos \varphi_7 = \frac{\Delta x_7 + \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_7 \Delta x_5}{2 \frac{R}{\alpha_5} \Delta x_6} = 0,30743..., \quad \cos \varphi_8 = 0,30736...$$

Daraus folgt  $\varphi_7 = 72^\circ 5'$ ,  $\varphi_8 = 72^\circ 6'$ , und man erkennt, dass bei den  $x_r$  immer höchstens 3 und wenigstens 2 Glieder zwischen zwei Zeichenwechseln stehen.

Weiter ist dann

$$\Delta x_7 \frac{\Delta x_7 - \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_7 \Delta x_8}{\Delta^2 x_7 - \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_7 \Delta^2 x_8} = -0,000038\ 6210,$$

also

$$x'_7 = 5,748370\ 8522 \text{ und sicher zu gross } x^0_7 = 5,748409\ 4732.$$

$$\Delta x_8 \frac{\Delta x_8 - \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_8 \Delta x_7}{\Delta^2 x_8 - \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_8 \Delta^2 x_7} = 0,000005\ 3051,$$

also

$$x'_8 = 5,748370\ 8500 \text{ und sicher zu klein } x^0_8 = 5,748365\ 5449.$$

Im zweiten Beispiel hat man

$$x_{-9} = \frac{526}{1908} = 0,275681\ 341719, \quad x_{-12} = \frac{25105}{91065} = 0,275682\ 205018,$$

$$x_{-10} = \frac{1908}{6921} = 0,275682\ 704811, \quad x_{-13} = \frac{91065}{330326} = 0,275682\ 204852,$$

$$x_{-11} = \frac{6921}{25105} = 0,275682\ 135032, \quad x_{-14} = \frac{330326}{1198213} = 0,275682\ 203414.$$

$$\left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-12} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{-11} & \Delta x_{-10} \\ \Delta x_{-12} & \Delta x_{-11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{-12} & \Delta x_{-11} \\ \Delta x_{-13} & \Delta x_{-12} \end{vmatrix}} = 47,7263 \dots, \quad \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-13} = 47,7162 \dots$$

$$\cos \varphi_{-12} = \frac{\Delta x_{-11} + \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-12} \Delta x_{-13}}{2 \frac{R_1}{\alpha_1} \cdot \Delta x_{-12}} = -0,59742 \dots,$$

$$\cos \varphi_{-13} = -0,59790 \dots$$

Demnach  $\varphi_{-12} = 126^\circ 41'$ ,  $\varphi_{-13} = 126^\circ 44'$ . Daraus folgt, dass bei den  $x_r$  höchstens 4, mindestens 3 Glieder zwischen 2 Zeichenfolgen liegen. Der in Abh. I. zweifelhaft gebliebene Wert  $x_{-13}$  ist also schon hieraus als zu gross zu erkennen.

Dann ist

$$\Delta x_{-12} \cdot \frac{\Delta x_{-13} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-12} \cdot \Delta x_{-13}}{\Delta^2 x_{-12} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-12} \cdot \Delta^2 x_{-13}} = 0,000\,000\,001367,$$

also

$$x'_{-12} = 0,275682\,203651 \text{ und sicher zu klein } x^0_{-12} = 0,275682\,202284;$$

und

$$\Delta x'_{-13} \cdot \frac{\Delta x_{-13} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-13} \cdot \Delta x_{-14}}{\Delta^2 x_{-13} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-13} \cdot \Delta^2 x_{-14}} = 0,000000\,001201,$$

also

$$x'_{-13} = 0,275682\,203651 \text{ und sicher zu klein } x^0_{-13} = 0,275682\,202450.$$

### §. 3.

Ist  $\alpha_n = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $\alpha_{n-1} = R(\cos \varphi - i \sin \varphi)$ ,  $\alpha_{n-2}$  ein einzelner reeller Wert, so hat man nach Abh. I.

$$\begin{aligned} R_r^2 &= \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_n) \end{vmatrix}} = \alpha_n \alpha_{n-1} + \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_n) \end{vmatrix}} \\ &= R^2 + \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-2} \cdot \frac{R A_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1}}{h' \alpha_{n-1} \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} RA_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1} &= ((R - \alpha_{n-2} \cos \varphi) A_{-n+2} + \alpha_{n-1} \sin \varphi B_{-n+2}) \cos(r+n)\varphi \\ &\quad + ((R - \alpha_{n-2} \cos \varphi) B_{-n+2} - \alpha_{n-2} \sin \varphi B_{-n+1}) \sin(r+n)\varphi \\ &= A \cos(r+n)\varphi + B \sin(r+n)\varphi = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\psi + (r+n)\varphi), \end{aligned}$$

wenn man

$$\frac{A}{B} = \tan \psi$$

setzt. Dabei findet sich noch

$$A^2 + B^2 = h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)$$

und

$$\psi = \alpha + \beta,$$

wenn man

$$\frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}} = \tan \alpha, \quad \frac{\alpha_{n-2} \sin \varphi}{R - \alpha_{n-1} \cos \varphi} = \tan \beta$$

setzt. Man hat sonach für grosse  $r$

$$\begin{aligned} 19) \quad R_r^2 &= R^2 + \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-2} \cdot \frac{\sqrt{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)}}{h'_{\alpha_{n-2}} \sin \varphi} \times \\ &\quad \times \sin(\psi + (r+n)\varphi). \end{aligned}$$

Nun ergibt sich ganz wie im vorigen Paragraphen

$$20) \quad \frac{\Delta^2 R_r^2 - \frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2} \cdot \Delta^2 R_{r-1}^2}{\Delta R_r^2} = - \frac{R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2}{R^2},$$

ferner

$$21) \quad \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R^2}\right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_r^2 & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r+1}^2 & \Delta R_r^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 \end{vmatrix}},$$

$$22) \quad \left(2 \frac{\alpha_{n-1}}{R} \cos \varphi\right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_r^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta R_{r+1}^2 + \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R^2}\right)_r \Delta R_{r-1}^2}{\Delta R_r^2}$$

Weiter ist dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-2} \cdot \frac{\sqrt{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)}}{h'_{\alpha_{n-2}} \sin \varphi} \cdot \sin(\psi + (r+n)\varphi) = \\ \Delta R_r^2 \cdot \frac{\Delta R_r^2 - \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R^2}\right)_r \Delta R_{r-1}^2}{\Delta^2 R_r^2 - \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R^2}\right)_r \Delta^2 R_{r-1}^2}, \end{aligned}$$

also der gesuchte Näherungswert

$$23) \quad R_r^{2'} = R_r^2 - \Delta R_r^2 \cdot \frac{\Delta R_r^2 - \left(\frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2}\right)_r \Delta R_{r-1}^2}{\Delta^2 R_r^2 - \left(\frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2}\right)_r \Delta^2 R_{r-1}^2}.$$

Um den Fehler zu bestimmen, bringe ich dies wieder auf die Form

$$23^a) \quad R_r^{2'} = R_r^2 + \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2, & R_{r+2}^2 \\ \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & R_r^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2, & 1 \\ \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & 1 \\ \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & 1 \end{vmatrix}}.$$

Auch hier konnte man wieder

$$\left(\frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2}\right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{r+1}^2, & \Delta R_{r+2}^2 \\ \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \end{vmatrix}}$$

setzen. Es würde dann  $R_{r-1}^{2'}$  derselbe Wert, der jetzt  $R_r^{2'}$  ist. Es gilt darüber dieselbe Bemerkung wie oben.

Weiter sind nun für die  $R_r^2$  ihre Ausdrücke durch Divisionscoefficienten einzuführen. Damit aber der Ausdruck nicht zu complicirt wird, ist eine weitere Abkürzung notwendig. Ich setze

$$\left| \begin{matrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_n) \end{matrix} \right| = \varrho, \quad \left| \begin{matrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2}) \end{matrix} \right| = \bar{\varrho},$$

so dass also ist

$$R_r^2 = R^2 + \frac{\varrho + 1}{\varrho}, \quad \Delta R_r^2 = - \frac{\begin{vmatrix} \varrho + 1, & \bar{\varrho} + 2 \\ \varrho, & \bar{\varrho} + 1 \end{vmatrix}}{\varrho \cdot \bar{\varrho} + 1}.$$

Werden diese Ausdrücke oben eingesetzt und die Nenner weggeschafft, so erhält man:



$$24) R_r' = R^2 +$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \varrho+2. \left| \begin{array}{c} \varrho+1, \\ \varrho, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+2}}{\overline{\varrho+1}}, & \varrho. \left| \begin{array}{c} \varrho+2, \\ \varrho+1, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+3}}{\overline{\varrho+2}}, & \varrho. \varrho+1. \overline{\varrho+3} \\ \hline \varrho+1. \left| \begin{array}{c} \varrho, \\ \varrho-1, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+1}}{\overline{\varrho}}, & \varrho-1. \left| \begin{array}{c} \varrho+1, \\ \varrho, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+2}}{\overline{\varrho+1}}, & \varrho-1. \varrho. \overline{\varrho+2} \\ \hline \varrho. \left| \begin{array}{c} \varrho-1, \\ \varrho-2, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho}}{\overline{\varrho-1}}, & \varrho-2. \left| \begin{array}{c} \varrho, \\ \varrho-1, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho-1}}{\overline{\varrho}}, & \varrho-2. \varrho-1. \overline{\varrho+1} \\ \hline \varrho+2. \left| \begin{array}{c} \varrho+1, \\ \varrho, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+2}}{\overline{\varrho+1}}, & \varrho. \left| \begin{array}{c} \varrho+2, \\ \varrho+1, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+3}}{\overline{\varrho+2}}, & \varrho. \varrho+1. \overline{\varrho+2} \\ \hline \varrho+1. \left| \begin{array}{c} \varrho, \\ \varrho-1, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+1}}{\overline{\varrho}}, & \varrho-1. \left| \begin{array}{c} \varrho+1, \\ \varrho, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+2}}{\overline{\varrho+1}}, & \varrho-1. \varrho. \overline{\varrho+1} \\ \hline \varrho. \left| \begin{array}{c} \varrho-1, \\ \varrho-2, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho}}{\overline{\varrho-1}}, & \varrho-2. \left| \begin{array}{c} \varrho, \\ \varrho-1, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+1}}{\overline{\varrho}}, & \varrho-2. \varrho-1. \varrho \\ \hline \end{array}$$

Dies ist wieder der genaue Wert des Fehlers. Um zu finden, welchem Wert er sich für grosse  $r$  nähert, sind die Näherungswerte einzusetzen. Man hat aber in diesem Fall als erste Näherungswerte

$$(\alpha_1' \dots \alpha_n) = \frac{R^{r+n-2}}{h \alpha_n h \alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot A_{r+1}, \quad (\alpha_1' \dots \alpha_{n-2}) = \frac{\alpha_{n-2} r^{n-3}}{h' \alpha_{n-1}};$$

demnach

$$\varrho = \frac{R^{2r+2n-4}}{h \alpha_n h \alpha_{n-1}}, \quad \overline{\varrho} = \frac{\alpha_{n-2} R^{r+n-3}}{h' \alpha_{n-2} h \alpha_n h \alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot (R A_{r+1} - \alpha_{n-2} A_r);$$

und unter Anwendung der Gleichung

$$R(R A_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1}) - \alpha_{n-2} (R A_{r+3} - \alpha_{n-2} A_{r+2}) = A_{r+2} (R^2 - 2 R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2);$$

$$\varrho+2. \left| \begin{array}{c} \varrho+1, \\ \varrho, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+2}}{\overline{\varrho+1}} = \frac{R^{5r+5n-5} \alpha_{n-2} r^{n-2}}{h \alpha_n^3 h \alpha_{n-1}^3 h' \alpha_{n-2} \sin \varphi} \times \\ \times (R^2 - 2 R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2) \cdot A_{r+2};$$

$$\varrho. \left| \begin{array}{c} \varrho+2, \\ \varrho+1, \end{array} \right| \frac{\overline{\varrho+3}}{\overline{\varrho+2}} = \frac{R^{5r+5n-6} \alpha_{n-2} r^{n-1}}{h \alpha_n^3 h \alpha_{n-1}^3 h' \alpha_{n-2} \sin \varphi} \times \\ \times (R^2 - 2 R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2) \cdot A_{r+3};$$

$$\varrho. \varrho+1. \varrho+2 = \frac{R^{6r+6n-6}}{h \alpha_n^3 h \alpha_{n-1}^3};$$

$$\varphi \cdot \varphi + 1 \cdot \overline{\varphi + 3} = \frac{R^{5r+5n-6} \alpha_{n-2}^{r+n}}{h \alpha_n^3 h \alpha_{n-1}^3 h' \alpha_{n-2} \sin \varphi} (R A_{r+4} - \alpha_{n-2} A_{r+3}).$$

Diese Werte im Nenner eingesetzt geben für denselben

$$\frac{R^{16r+16n-34} \alpha_{n-2}^{2r+2n-7} (R^2 - 2R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)^2}{h \alpha_n^9 h \alpha_{n-1}^9 h' \alpha_{n-2}^2 \sin^2 \varphi} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \alpha_{n-2}^2 A_{r+2}, & \alpha_{n-2}^2 A_{r+3}, & R^2 \\ \alpha_{n-2} A_{r+1}, & \alpha_{n-2} A_{r+2}, & R \\ A_r, & A_{r+1}, & 1 \end{vmatrix},$$

und wenn man wieder die ersten Glieder der ersten Zeile zum Verschwinden bringt

$$\frac{R^{16r+16n-34} \alpha_{n-2}^{2r+2n-6} (R^2 - 2R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)^3}{h \alpha_n^8 h \alpha_{n-1}^8 h' \alpha_{n-2}^2}.$$

Den Zähler untersuche ich wieder lieber in der Form die er erhält, wenn man die letzte Colonne zur zweiten, und diese dann zur ersten addirt, also in der Form

$$\begin{vmatrix} \varphi + 2 \cdot \varphi + 1 \cdot \overline{\varphi + 1}, & \varphi \cdot \varphi + 2 & \overline{\varphi + 2}, & \varphi \cdot \varphi + 1 & \overline{\varphi + 3} \\ \varphi + 1 \cdot \varphi & \overline{\varphi}, & \varphi - 1 \cdot \varphi + 1 \cdot \overline{\varphi + 1}, & \varphi - 1 \cdot \varphi & \overline{\varphi + 2} \\ \varphi \cdot \varphi - 1 & \overline{\varphi - 1}, & \varphi - 2 \cdot \varphi & \overline{\varphi}, & \varphi - 2 \cdot \varphi - 1 \cdot \overline{\varphi + 1} \end{vmatrix}.$$

Setzt man hier die ersten Näherungswerte ein, so erhält man als Factor die Determinante

$$\begin{vmatrix} R A_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1}, & R A_{r+3} - \alpha_{n-2} A_{r+2}, & R A_{r+4} - \alpha_{n-2} A_{r+3} \\ R A_{r+1} - \alpha_{n-2} A_r, & R A_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1}, & R A_{r+3} - \alpha_{n-2} A_{r+2} \\ R A_r - \alpha_{n-2} A_{r-1}, & R A_{r+1} - \alpha_{n-2} A_r, & R A_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1} \end{vmatrix}$$

und diese ist identisch null, wie man erkennt, wenn man die zweite Colonne mit  $-2 \cos \varphi$  multiplicirt, und sie und die erste zur dritten addirt.

Man muss sonach wieder die zweiten Näherungswerte einsetzen, und sind dabei wieder die beiden Fälle zu unterscheiden, ob  $\alpha_{n-3}$  ein einzelner Wert ist, oder ob  $\alpha_{n-3}$  und  $\alpha_{n-4}$  ein Paar conjugirte Werte sind.

Im ersten Fall ist

$$(\alpha_1' \dots \alpha_n) = \frac{R^{r+n-2}}{h \alpha_n h \alpha_{n-1} \sin \varphi} A_{r+1} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-1}}{f' \alpha_{n-2}},$$

$$(\alpha_1' \dots \alpha_{n-2}) = \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-3}}{h' \alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-3}}{h' \alpha_{n-3}}.$$

Dann wird bei Vernachlässigung der bei grossen  $r$  gegen die übrigen verschwindenden Glieder

$$\varrho = \frac{R^{2r+2n-4}}{h^2 \alpha_n \alpha_{n-1}} - \frac{R^{r+n-3} \alpha_{n-2}^{r+n-2}}{h \alpha_n \alpha_{n-1} f' \alpha_{n-2} \sin \varphi} \cdot C_{r+2},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$R^2 A_{r+2} - 2 R \alpha_{n-2} A_{r+1} + \alpha_{n-2}^2 A_r = C_{r+2},$$

und

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{R^{r+n-3} \alpha_{n-2}^{r+n-3}}{h \alpha_n \alpha_{n-1} h' \alpha_{n-2} \sin \varphi} \cdot (R A_{r+1} - \alpha_{n-2} A_r) \\ &\quad + \frac{R^{r+n-3} \alpha_{n-3}^{r+n-3}}{h \alpha_n \alpha_{n-1} h' \alpha_{n-3} \sin \varphi} \cdot (R A_{r+1} - \alpha_{n-3} A_r). \end{aligned}$$

Ebenso wird weiter

$$\begin{aligned} \varrho + 1 \cdot \varrho + 2 \cdot \overline{\varrho + 1} &= \frac{R^{5r+5n-4} \alpha_{n-2}^{r+n-2}}{h \alpha_n^2 \alpha_{n-1}^3 h' \alpha_{n-2} \sin \varphi} \cdot (R A_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1}) \\ &\quad - \frac{R^{4r+4n-5} \alpha_{n-2}^{2r+2n-3}}{h \alpha_n^3 \alpha_{n-1}^3 h' \alpha_{n-2} f' \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi} \cdot (R C_{r+3} + \alpha_{n-2} C_{r+4}) (R A_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1}) \\ &\quad + \frac{R^{5r+5n-4} \alpha_{n-3}^{r+n-2}}{h \alpha_n^3 \alpha_{n-1}^3 h' \alpha_{n-3} \sin \varphi} \cdot (R A_{r+2} - \alpha_{n-3} A_{r+1}), \\ \varrho \cdot \varrho + 2 \cdot \overline{\varrho + 2} &= \frac{R^{5r+5n-5} \alpha_{n-2}^{r+n-1}}{\text{,, ,,}} \cdot (R A_{r+3} - \alpha_{n-2} A_{r+2}) \\ &\quad - \frac{R^{4r+4n-6} \alpha_{n-2}^{2r+2n-3}}{\text{,, ,,}} \cdot (R^2 C_{r+2} + \alpha_{n-2}^2 C_{r+4}) (R A_{r+3} - \alpha_{n-2} A_{r+2}) \\ &\quad + \frac{R^{5r+5n-5} \alpha_{n-3}^{r+n-1}}{\text{,, ,,}} \cdot (R A_{r+3} - \alpha_{n-3} A_{r+2}), \\ \varrho \cdot \varrho + 1 \cdot \overline{\varrho + 3} &= \frac{R^{5r+5n-6} \alpha_{n-2}^{r+n}}{\text{,, ,,}} \cdot (R A_{r+4} - \alpha_{n-2} A_{r+3}) \\ &\quad - \frac{R^{4r+4n-6} \alpha_{n-2}^{2r+2n-2}}{\text{,, ,,}} \cdot (R C_{r+2} + \alpha_{n-2} C_{r+3}) (R A_{r+4} - \alpha_{n-2} A_{r+3}) \\ &\quad + \frac{R^{5r+5n-6} \alpha_{n-3}^{r+n}}{\text{,, ,,}} \cdot (R A_{r+4} - \alpha_{n-3} A_{r+3}). \end{aligned}$$

Werden diese Ausdrücke in die Determinante eingesetzt, so zerfällt diese wieder in 27 Einzeldeterminanten, von welchen jedoch nur die 7 ersten in Betracht kommen. Die erste, welche in allen Columnen die ersten Glieder dieser Ausdrücke enthält, ist nichts anderes, als die Determinante der ersten Näherungswerte und wird identisch null.

Die drei nächsten sind die, welche in je zwei Columnen die ersten Glieder, in der dritten die zweiten Glieder der Ausdrücke ent-

halten. Sie lassen sich ähnlich behandeln wie die Determinanten in § 2. Man kann sie nämlich leicht so umformen, dass sie die beiden ersten Columnen gleich haben. Dann lassen sie sich in eine zusammenfassen. In dieser lassen sich die ersten Glieder der ersten Zeile zum Verschwinden bringen in Folge der Identität

$$A_{r+1} + A_{r-1} = 2A_r \cos \varphi.$$

Da nach

$$f'_{\alpha_{n-2}} = (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2) \cdot h'_{\alpha_{n-2}},$$

erhält man schliesslich für die Summe dieser drei Determinanten

$$\frac{R^{14r+14n-31} \alpha_{n-2}^{4r+4n-10} (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)^2}{h\alpha_n^8 h\alpha_{n-1}^8 h'_{\alpha_{n-2}} \alpha_{n-2}^4 \sin^2 \varphi} \times \\ \times \{ R^2 A_r (RA_r - \alpha_{n-2} A_{r-1}) - 2R\alpha_{n-2} A_{r+1} (RA_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1}) \\ + \alpha_{n-2}^2 A_{r+2} (RA_{r+4} - \alpha_{n-2} A_{r+3}) \}.$$

Die drei folgenden Determinanten sind diejenigen, welche in je zwei Columnen die ersten Glieder, in der dritten die dritten Glieder der obigen Ausdrücke enthalten. Auch sie lassen sich wie die vorhergehenden behandeln und geben als Summe

$$\frac{R^{15r+15n-30} \alpha_{n-2}^{2r+2n-6} \alpha_{n-3}^{r+n-4}}{h\alpha_n^8 h\alpha_{n-1}^8 h'_{\alpha_{n-2}} h'_{\alpha_{n-3}} \sin \varphi} \times \\ \times (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2) (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})^2 \times \\ \times \{ \alpha_{n-2}^2 (RA_r - \alpha_{n-3} A_{r-1}) - 2\alpha_{n-2} \alpha_{n-3} (RA_{r+2} - \alpha_{n-3} A_{r+1}) \\ + \alpha_{n-3}^2 (RA_{r+4} - \alpha_{n-3} A_{r+3}) \}.$$

Der ganze Fehler nähert sich sonach dem Werte

$$\frac{\alpha_{n-2}^{2r+2n-4}}{R^{2r+2n-3}} \cdot \frac{1}{h'_{\alpha_{n-2}} \sin^2 \varphi (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)} \times \\ \times \{ R^2 A_r (RA_r - \alpha_{n-2} A_{r-1}) - 2R\alpha_{n-2} A_{r+1} (RA_{r+2} - \alpha_{n-2} A_{r+1}) \\ + \alpha_{n-2}^2 A_{r+2} (RA_{r+4} - \alpha_{n-2} A_{r+3}) \} \\ + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-4}}{R^{r+n-4}} \cdot \frac{(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})^2}{h'_{\alpha_{n-3}} \sin \varphi \cdot (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)^2} \times \\ \times \{ \alpha_{n-2}^2 (RA_r - \alpha_{n-3} A_{r-1}) - 2\alpha_{n-2} \alpha_{n-3} (RA_{r+2} - \alpha_{n-3} A_{r+1}) \\ + \alpha_{n-3}^2 (RA_{r+4} - \alpha_{n-3} A_{r+3}) \}.$$

Diese Ausdrücke sind noch weiter umzuformen.

Die Klammer des ersten Teiles wird, wenn ich alle

$$A_r \text{ auf } A_{-n+2} \text{ und } B_{-n+2},$$

resp. auf

$$\frac{A_{-n+2}^2 + B_{-n+2}}{2} = \frac{1}{2} h\alpha_n h\alpha_{n-1}, \quad \frac{A_{-n+2}^2 - B_{-n+2}}{2}$$

und

$$A_{-n+2}, B_{-n+2}$$

reducire:

$$\begin{aligned} & \frac{A_{-n+2} + B_{-n+2}}{2} \cdot \{R^3 - 3R^2\alpha_{n-2}\cos\varphi + R\alpha_{n-2}(2 + \cos 2\varphi) - \alpha_{n-2}^3\cos\varphi\} \\ & + \frac{A_{-n+2} - B_{-n+2}}{2} \times \\ & \times \{R^3\cos(2r+2n-4)\varphi - R^2\alpha_{n-2}(\cos(2r+2n-5)\varphi + 2\cos(2r+2n-1)\varphi) \\ & + R\alpha_{n-2}(2\cos(2r+2n-2)\varphi + \cos(2r+2n+2)\varphi) - \alpha_{n-2}^3\cos(2r+2n+1)\varphi\} \\ & + A_{-n+2}B_{-n+2}\{R^3\sin(2r+2n-4)\varphi - R^2\alpha_{n-2}\sin(2r+2n-5)\varphi \\ & + 2\sin(2r+2n-1)\varphi + R\alpha_{n-2}(2\sin(2r+2n-2)\varphi + \sin(2r+2n+2)\varphi) \\ & - \alpha_{n-2}^3\sin(2r+2n+1)\varphi\} \\ & = \frac{1}{2}h\alpha_n h\alpha_{n-1}(R^3 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}^3)(R - \alpha_{n-2}\cos\varphi) \\ & + \left[ \frac{A_{-n+2} - B_{-n+2}}{2} \cdot a + A_{-n+2}B_{-n+2}b \right] \cdot \cos(2r+2n-2)\varphi \\ & + \left[ -\frac{A_{-n+2} - B_{-n+2}}{2} \cdot b + A_{-n+2}B_{-n+2}a \right] \cdot \sin(2r+2n-2)\varphi \\ & = C + A \cdot \cos(2r+2n-2)\varphi + B \cdot \sin(2r+2n-2)\varphi \\ & = C + \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\chi + (2r+2n-2)\varphi), \end{aligned}$$

wenn

$$\begin{aligned} R^3 \cdot \cos(-2\varphi) - R^2\alpha_{n-2}(\cos(-3\varphi) + 2\cos\varphi) \\ + R\alpha_{n-2}(2 + \cos 4\varphi) - \alpha_{n-2}^3\cos 3\varphi = a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^3 \cdot \sin(-2\varphi) - R^2\alpha_{n-2}(\sin(-3\varphi) + 2\sin\varphi) \\ + R\alpha_{n-2}\sin 4\varphi - \alpha_{n-2}^3\sin 3\varphi = b \end{aligned}$$

und

$$\frac{A}{B} = \tan \chi$$

gesetzt wird. Dabei ergibt sich noch

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \frac{1}{4}(A_{-n+2} + B_{-n+2})^2(\alpha^2 + b^2) = \\ &= \frac{1}{4}h\alpha_n^2 h\alpha_{n-1}^2(R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}^3)(R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos 3\varphi + \alpha_{n-2}^3)^2, \end{aligned}$$

und

$$\chi = 2\alpha - 90 + \gamma,$$

wenn man

$$\frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}} = \tan \alpha, \quad \frac{b}{a} = \tan \gamma \text{ setzt.}$$

Die Klammer des zweiten Teils lässt sich auf die Form bringen

$$\begin{aligned}
& [\alpha_{n-2}^2(RA_{-n+1} - \alpha_{n-3}A_{-n}) - 2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}(RA_{-n+3} - \alpha_{n-3}A_{-n+2}) \\
& + \alpha_{n-3}^2(RA_{-n+5} - \alpha_{n-3}A_{-n+4})] \cdot \cos(r+n-1)\varphi \\
& + [\alpha_{n-2}^2(RB_{-n+1} - \alpha_{n-3}B_{-n}) - 2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}(RB_{-n+3} - \alpha_{n-3}B_{-n+2}) \\
& + \alpha_{n-3}^2(RB_{-n+5} - \alpha_{n-3}B_{-n+4})] \cdot \sin(r+n-1)\varphi \\
& = A' \cdot \cos(r+n-1)\varphi + B' \cdot \sin(r+n-1)\varphi \\
& = \sqrt{A'^2 + B'^2} \cdot \sin(\chi' + (r+n-1)\varphi),
\end{aligned}$$

wenn

$$\frac{A'}{B'} = \tan \chi'$$

gesetzt wird. Dabei findet sich

$$A'^2 + B'^2 = h\alpha_n h\alpha_{n-1} (R^2 - 2R\alpha_{n-3} \cos \varphi + \alpha_{n-3}^2) \times$$

$$\times (\alpha_{n-2}^2 - 2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3} \cos 2\varphi + \alpha_{n-3}^2)^2,$$

und

$$\chi' = \alpha + \gamma',$$

wenn man noch

$$\tan \gamma' = \frac{b'}{a'}$$

setzt, und

$$\begin{aligned}
& \alpha_{n-2}^2(R\cos(-\varphi) - \alpha_{n-3}\cos(-2\varphi)) - 2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}(R\cos\varphi - \alpha_{n-3}) \\
& + \alpha_{n-3}^2(R\cos 3\varphi - \alpha_{n-3}\cos 2\varphi) = a' \\
& \alpha_{n-2}^2(R\sin(-\varphi) - \alpha_{n-3}\sin(-2\varphi)) - 2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}R\sin\varphi \\
& + \alpha_{n-3}^2(R\sin 3\varphi - \alpha_{n-3}\sin 2\varphi) = b'.
\end{aligned}$$

Es ist also schliesslich gefunden

$$\begin{aligned}
25) \quad R_r^{2'} &= R^2 + \frac{\alpha_{n-2}^{2r+2n-4}}{l^{2r+2n-3}} \cdot \frac{h\alpha_n h\alpha_{n-1}}{h'\alpha_{n-2}^2 \sin^2 \varphi} \times \\
& \times \left[ R - \alpha_{n-2} \cos \varphi + \frac{R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos 3\varphi + \alpha_{n-2}^2}{\sqrt{R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2}} \sin(\chi' + (r+n-1)2\varphi) \right] \\
& + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-4}}{R^{r+n-4}} \cdot \frac{(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})^2 (\alpha_{n-2}^2 - 2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3} \cos 2\varphi + \alpha_{n-3}^2)}{h'\alpha_{n-3} \sin \varphi (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)^2} \times \\
& \times \sqrt{h\alpha_n h\alpha_{n-1} (R^2 - 2R\alpha_{n-3} \cos \varphi + \alpha_{n-3}^2)} \cdot \sin(\chi' + (r+n-1)\varphi).
\end{aligned}$$

Ist im zweiten Fall

$$\alpha_{n-3} = R'(\cos \varphi' + i \sin \varphi'), \quad \alpha_{n-4} = R'(\cos \varphi' - i \sin \varphi'),$$

so ist der zweite Näherungswert von  $(\alpha_1^r \dots \alpha_n)$  der nämliche wie p. 48; dagegen erhält man jetzt analog § 2.

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2}) = \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-2}} + \frac{R'^{r+n-4}}{s\alpha_{n-3} s\alpha_{n-4} \sin \varphi'} \cdot \frac{R'A'r+1 - \alpha_{n-2}A'r+2}{R'^2 - 2R'\alpha_{n-2} \cos \varphi' + \alpha_{n-2}^2}$$

Es behält dann auch  $\varrho$  seinen Wert, aber es wird

$$\varrho = \frac{R^{r+n-3} \alpha_{n-2}^{r+n-3}}{h \alpha_n h \alpha_{n-1} h' \alpha_{n-2} \sin \varphi} \cdot (R A_{r+1} - \alpha_{n-2} A_r) \\ + \frac{R^{r+n-3}}{h \alpha_n h \alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot \frac{R'^{r+n-4}}{s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4} \sin \varphi' (R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos \varphi' + \alpha_{n-2}^2)} \times \\ \times \begin{vmatrix} R A_{r+1}, & R' (R' A'_{r+2} - \alpha_{n-2} A'_{r+3}) \\ A_r, & (R' A'_{r+1} - \alpha_{n-2} A'_{r+2}) \end{vmatrix}$$

Es bleiben daher auch in den Ausdrücken für

$$\varrho + 1, \varrho + 2, \overline{\varrho + 1}, \quad \varrho, \varrho + 2, \overline{\varrho + 2}, \quad \varrho, \varrho + 1, \overline{\varrho + 3}$$

je die beiden ersten Glieder dieselben, dagegen werden die dritten Glieder, abgesehen von dem gemeinsamen Factor

$$\frac{R^{5r+5n-6} R'^{r+n-3}}{h \alpha_n^3 h \alpha_{n-1}^3 \sin \varphi s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4} \sin \varphi' (R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos \varphi' + \alpha_{n-2}^2)}$$

beziehungsweise

$$R^2 \cdot \begin{vmatrix} R A_{r+2}, & R' A'_{r+3} - \alpha_{n-2} A'_{r+4} \\ R' A_{r+1}, & R' A'_{r+2} - \alpha_{n-2} A'_{r+3} \end{vmatrix}, \\ RR' \cdot \begin{vmatrix} R A_{r+3}, & R' A'_{r+4} - \alpha_{n-2} A'_{r+5} \\ R' A_{r+2}, & R' A'_{r+3} - \alpha_{n-2} A'_{r+4} \end{vmatrix}, \\ R'^2 \cdot \begin{vmatrix} R A_{r+4}, & R' A'_{r+5} - \alpha_{n-2} A'_{r+6} \\ R' A_{r+3}, & R' A'_{r+4} - \alpha_{n-2} A'_{r+5} \end{vmatrix}.$$

Setzt man daher diese Ausdrücke in die Zahlerdeterminante ein, so verschwindet von den in Betracht kommenden 7 Determinanten die erste wieder identisch, die drei nächsten werden dieselben wie im ersten Fall, die drei letzten werden anders. Sie lassen sich aber wieder so umformen, dass sie die beiden ersten Columnen gleich haben, und dann in eine zusammenfassen. Wird dann wieder die zweite Zeile mit  $-2\alpha_{n-2} \cos \varphi$ , die dritte mit  $\alpha_{n-2}^2$  multiplicirt, und beide zur ersten addirt, so verschwinden die beiden ersten Glieder dieser Zeile, und das dritte lässt sich mit  $(R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos \varphi' + \alpha_{n-2}^2)$  dividiren. So erhält man als Summe der drei Determinanten

$$\frac{R^{15r+15n-30} \alpha_{n-2}^{2r+2n-6} R'^{r+n-5} (R^2 - 2R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)}{h \alpha_n^3 h \alpha_{n-1}^3 h' \alpha_{n-2}^2 \sin \varphi s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4} \sin \varphi'} \times \\ \times \{ R \cdot [R'^3 A_{r+4} A'_{r+4} - R'^2 \alpha_{n-2} (2A_{r+2} A'_{r+3} + A_{r+4} A'_{r+3}) \\ + R' \alpha_{n-2}^2 (2A_{r+3} A'_{r+2} + A_r A'_{r+2}) - \alpha_{n-2}^3 A_r A'_{r+1}] \\ - R' \cdot [R'^3 A_{r+3} A'_{r+5} - R'^2 \alpha_{n-2} (2A_{r+1} A'_{r+4} + A_{r+3} A'_{r+4}) \\ + R' \alpha_{n-2}^2 (2A_{r+1} A'_{r+3} + A_{r-1} A'_{r+3}) - \alpha_{n-2} A_{r-1} A'_{r+2}] \}.$$

Werden hier die  $A_r$  und  $A'_r$  sämmtlich auf

$$A_{-n+2} \text{ und } B_{-n+2}, \quad A'_{-n+5} \text{ und } B'_{-n+5}$$

reducirt, resp. auf

$$\frac{A_{-n+2}A'_{-n+5} + B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2} \text{ und } \frac{A_{-n+2}A'_{-n+5} - B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2},$$

$$\frac{A_{-n+2}B'_{-n+5} - B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2} \text{ und } \frac{A_{-n+2}B'_{-n+5} + B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2},$$

wobei noch constant

$$(A_r A'_s + B_r B'_s)^2 + (A_r B'_s - B_r A'_s)^2 = (A_r A'_s - B_r B'_s)^2 + (A_r B'_s + B_r A'_s)^2 = \\ = (A_r^2 + B_r^2)(A_s'^2 + B_s'^2) = h\alpha_n h\alpha_{n-1} s\alpha_{n-3} s\alpha_{n-4}$$

ist, so erhält man für die ganze Klammer

$$A' \cdot \cos(r+n-1)(\varphi - \varphi') - B' \cdot \sin(r+n-1)(\varphi - \varphi') \\ + C' \cos(r+n-1)(\varphi + \varphi') - D' \sin(r+n-1)(\varphi + \varphi').$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$A' = \frac{A_{-n+2}A'_{-n+5} + B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2} \cdot a' \\ - \frac{A_{-n+2}B'_{-n+5} - B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2} \cdot b',$$

$$B' = \frac{A_{-n+2}A'_{-n+5} - B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2} \cdot b' \\ + \frac{A_{-n+2}B'_{-n+5} + B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2} \cdot a',$$

$$C' = \frac{A_{-n+2}A'_{-n+5} - B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2} \cdot c' \\ + \frac{A_{-n+2}B'_{-n+5} + B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2} \cdot d',$$

$$D' = \frac{A_{-n+2}A'_{-n+5} + B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2} \cdot d' \\ - \frac{A_{-n+2}B'_{-n+5} - B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2} \cdot c';$$

$$a' = R(m \cdot \cos(\varphi + \varphi') - n \cdot \sin(\varphi + \varphi')) - R'm, \\ b' = R(n \cdot \cos(\varphi + \varphi') + m \cdot \sin(\varphi + \varphi')) - R'n, \\ c' = R(m' \cdot \cos(\varphi - \varphi') - n' \cdot \sin(\varphi - \varphi')) - R'm', \\ d' = R(n' \cdot \cos(\varphi - \varphi') + m' \cdot \sin(\varphi - \varphi')) - R'n';$$



$$\begin{aligned}
 m &= R'^2 \cdot \cos(2\varphi - \varphi') - R'^2 \alpha_{n-2} (2 + \cos 2\varphi) \\
 &\quad + R' \alpha_{n-2}^2 (2 \cos \varphi' + \cos(-2\varphi + \varphi')) - \alpha_{n-2}^3 \cos(-2\varphi + 2\varphi'), \\
 n &= R'^2 \cdot \sin(2\varphi - \varphi') - R'^2 \alpha_{n-2} (\sin 2\varphi) \\
 &\quad + R' \alpha_{n-2}^2 (2 \sin \varphi' + \sin(-2\varphi + \varphi')) - \alpha_{n-2}^3 \sin(-2\varphi + 2\varphi'), \\
 m' &= R'^2 \cdot \cos(2\varphi + \varphi') - R'^2 \alpha_{n-2} (2 + \cos 2\varphi) \\
 &\quad + R' \alpha_{n-2}^2 (2 \cdot \cos(-\varphi') + \cos(-2\varphi - \varphi')) - \alpha_{n-2}^3 \cos(-2\varphi - 2\varphi'), \\
 n' &= R'^2 \cdot \sin(2\varphi + \varphi') - R'^2 \alpha_{n-2} \sin 2\varphi \\
 &\quad + R' \alpha_{n-2}^2 (2 \cdot \sin(-\varphi') + \sin(-2\varphi - \varphi')) - \alpha_{n-2}^3 \sin(-2\varphi - 2\varphi').
 \end{aligned}$$

Setzt man dann weiter

$$\frac{A'}{B'} = \tan \chi', \quad \frac{C'}{D'} = \tan \chi'',$$

so wird der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \sqrt{A'^2 + B'^2} \cdot \sin(\chi' - (r+n-1)(\varphi - \varphi')) \\
 + \sqrt{C'^2 + D'^2} \cdot \sin(\chi'' - (r+n-1)(\varphi + \varphi')).
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
 A'^2 + B'^2 &= \frac{1}{4} h \alpha_n h \alpha_{n-1} s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4} (a'^2 + b'^2) \\
 &= \frac{1}{4} h \alpha_n h \alpha_{n-1} s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4} (R^2 - 2RR' \cos(\varphi - \varphi') + R'^2) \cdot (m^2 + n^2), \\
 C'^2 + D'^2 &= \frac{1}{4} h \alpha_n h \alpha_{n-1} s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4} (c'^2 + d'^2) \\
 &= \frac{1}{4} h \alpha_n h \alpha_{n-1} s \alpha_{n-3} s \alpha_{n-4} (R^2 - 2RR' \cos(\varphi + \varphi') + R'^2) \cdot (m'^2 + n'^2) \\
 m^2 + n^2 &= (R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos \varphi' \\
 &\quad + \alpha_{n-2}^2) (R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos(2\varphi - \varphi') + \alpha_{n-2}^2)^2, \\
 m'^2 + n'^2 &= (R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos \varphi' \\
 &\quad + \alpha_{n-2}^2) (R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos(2\varphi + \varphi') + \alpha_{n-2}^2);
 \end{aligned}$$

ferner

$$\chi' = 90^\circ - \alpha + \alpha' - \delta - \varepsilon, \quad \chi'' = 270^\circ - \alpha - \alpha' - \delta' - \varepsilon',$$

wenn wieder

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}}, \quad \tan \alpha' = \frac{A'_{-n+5}}{B'_{-n+5}}, \quad \tan \delta = \frac{n}{m}, \quad \tan \delta' = \frac{n'}{m'}, \\
 \tan \varepsilon &= \frac{R \cdot \sin(\varphi + \varphi')}{R \cdot \cos(\varphi + \varphi') - R'}, \quad \tan \varepsilon' = \frac{R \cdot \sin(\varphi - \varphi')}{R \cdot \cos(\varphi - \varphi') - R'}
 \end{aligned}$$

gesetzt wird.

Die Summe der drei Determinanten ist also für grosse  $r$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{R^{15r+15n-30} \alpha_{n-2}^{2r+2n-6} R'^{r+n-5} (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)}{h\alpha_n^8 h\alpha_{n-1}^8 h'^2 \alpha_{n-2} \sin \varphi \sin \varphi'} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{h\alpha_n h\alpha_{n-1}}{s\alpha_{n-3} s\alpha_{n-4}}} \cdot (R'^2 - 2R'\alpha_{n-2} \cos \varphi' + \alpha_{n-2}^2) \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & (R'^2 - 2R'\alpha_{n-2} \cos (2\varphi - \varphi') + \alpha_{n-2}^2) \times \\ & \times \sqrt{R^2 - 2RR' \cos (\varphi + \varphi') + R'^2} \cdot \sin (\chi' - (r+n-1)(\varphi - \varphi')) \\ & + (R'^2 - 2R'\alpha_{n-2} \cos (2\varphi + \varphi') + \alpha_{n-2}^2) \times \\ & \times \sqrt{R^2 - 2RR' \cos (\varphi - \varphi') + R'^2} \cdot \sin (\chi'' - (r+n-1)(\varphi + \varphi')) \end{aligned} \right\}.$$

Man hat demnach schliesslich im zweiten Fall

$$26) \quad R^{2r} = R^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{n-2}^{2r+2n-4}}{R^{2r+2n-3}} \cdot \frac{h\alpha_n h\alpha_{n-1}}{h'^2 \alpha_{n-2} \sin^2 \varphi} \times$$

$$\times \left[ R - \alpha_{n-2} \cos \varphi + \frac{R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos 3\varphi + \alpha_{n-2}^2}{\sqrt{R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2}} \cdot \sin (\chi + (r+n-1)2\varphi) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{R'^{r+n-5}}{R'^{r+n-4}} \cdot \frac{1}{\sin \varphi \cdot \sin \varphi'} \cdot (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)^2 \times$$

$$\times \sqrt{\frac{h\alpha_n h\alpha_{n-1}}{s\alpha_{n-3} s\alpha_{n-4}}} \cdot (R'^2 - 2R'\alpha_{n-2} \cos \varphi' + \alpha_{n-2}^2) \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & (R'^2 - 2R'\alpha_{n-2} \cos (2\varphi - \varphi') + \alpha_{n-2}^2) \times \\ & \times \sqrt{R^2 - 2RR' \cos (\varphi + \varphi') + R'^2} \cdot \sin (\chi' - (r+n-1)(\varphi - \varphi')) \\ & + (R'^2 - 2R'\alpha_{n-2} \cos (2\varphi + \varphi') + \alpha_{n-2}^2) \times \\ & \times \sqrt{R^2 - 2RR' \cos (\varphi - \varphi') + R'^2} \cdot \sin (\chi'' - (r+n-1)(\varphi + \varphi')) \end{aligned} \right\}.$$

Was  $2R \cos \varphi$  betrifft, so hat man nach Abb. I.

$$(2R \cos \varphi)_r = \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_n) \end{vmatrix}} =$$

$$= \alpha_n + \alpha_{n-1} + \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_n) \end{vmatrix}},$$

und daraus ergibt sich durchaus analog dem Vorhergehenden

$$27) \quad (2R \cos \varphi)_r = 2R \cos \varphi + \left( \frac{\alpha_{n-2}}{R} \right)^{r+n-2} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{h\alpha_n h\alpha_{n-1} (R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)}}{R \cdot h' \alpha_{n-2} \sin \varphi} \cdot \sin (\psi + (r+n-1)\varphi);$$

$$28) \frac{\Delta^2(2R \cos \varphi)_r - \frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2} \cdot \Delta^2(2R \cos \varphi)_{r-1}}{\Delta(2R \cos \varphi)_r} = \frac{R^2 - 2R\alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2}{R^2};$$

$$29) \left( \frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2} \right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta(2R \cos \varphi)_r & \Delta(2R \cos \varphi)_{r+1} \\ \Delta(2R \cos \varphi)_{r-1} & \Delta(2R \cos \varphi)_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta(2R \cos \varphi)_{r-1} & \Delta(2R \cos \varphi)_r \\ \Delta(2R \cos \varphi)_{r-2} & \Delta(2R \cos \varphi)_{r-1} \end{vmatrix}};$$

$$30) \left( 2 \frac{\alpha_{n-2}}{R} \cdot \cos \varphi \right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta(2R \cos \varphi)_{r-1} & \Delta(2R \cos \varphi)_{r+1} \\ \Delta(2R \cos \varphi)_{r-2} & \Delta(2R \cos \varphi)_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta(2R \cos \varphi)_{r-1} & \Delta(2R \cos \varphi)_r \\ \Delta(2R \cos \varphi)_{r-2} & \Delta(2R \cos \varphi)_{r-1} \end{vmatrix}} \\ = \frac{\Delta(2R \cos \varphi)_{r+1} + \left( \frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2} \right)_r \cdot \Delta(2R \cos \varphi)_{r-1}}{\Delta(2R \cos \varphi)_r};$$

$$31) (2R \cos \varphi)_{r'} = (2R \cos \varphi)_r - \Delta(2R \cos \varphi)_r \times \\ \times \frac{\Delta(2R \cos \varphi)_r - \left( \frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2} \right)_r \cdot \Delta(2R \cos \varphi)_{r-1}}{\Delta^2(2R \cos \varphi)_r - \left( \frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2} \right)_r \cdot \Delta^2(2R \cos \varphi)_{r-1}}$$

Setze ich dann noch zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \end{vmatrix} = \sigma + 1,$$

so ergibt sich weiter

$$32) (2R \cos \varphi)_{r'} = 2R \cos \varphi +$$

$$\begin{vmatrix} \varrho+2. \begin{vmatrix} \varrho+1, & \sigma+2 \\ \varrho, & \sigma+1 \end{vmatrix}, & \varrho. \begin{vmatrix} \varrho+2, & \sigma+3 \\ \varrho+1, & \sigma+2 \end{vmatrix}, & \varrho. \varrho+1. \sigma+3 \\ \varrho+1. \begin{vmatrix} \varrho, & \sigma+1 \\ \varrho-1, & \sigma \end{vmatrix}, & \varrho-1. \begin{vmatrix} \varrho+1, & \sigma+2 \\ \varrho, & \sigma+1 \end{vmatrix}, & \varrho-1. \varrho. \sigma+2 \\ \varrho. \begin{vmatrix} \varrho-1, & \sigma \\ \varrho-2, & \sigma-1 \end{vmatrix}, & \varrho-2. \begin{vmatrix} \varrho, & \sigma+1 \\ \varrho-1, & \sigma \end{vmatrix}, & \varrho-2. \varrho-1. \sigma+1 \\ \varrho+2. \begin{vmatrix} \varrho+1, & \sigma+2 \\ \varrho, & \sigma+1 \end{vmatrix}, & \varrho. \begin{vmatrix} \varrho+2, & \sigma+3 \\ \varrho+1, & \sigma+2 \end{vmatrix}, & \varrho. \varrho+1. \varrho+2 \\ \varrho+1. \begin{vmatrix} \varrho, & \sigma+1 \\ \varrho-1, & \sigma \end{vmatrix}, & \varrho-1. \begin{vmatrix} \varrho+1, & \sigma+2 \\ \varrho, & \sigma+1 \end{vmatrix}, & \varrho-1. \varrho. \varrho+1 \\ \varrho. \begin{vmatrix} \varrho-1, & \sigma \\ \varrho-2, & \sigma-1 \end{vmatrix}, & \varrho-2. \begin{vmatrix} \varrho, & \sigma+1 \\ \varrho-1, & \sigma \end{vmatrix}, & \varrho-2. \varrho-1. \varrho \end{vmatrix}$$

Dies ist der genaue Wert des Fehlers. Für grosse  $r$  nähert sich der Ausdruck, wenn  $\alpha_{n-3}$  eine einzelne Wurzel ist, dem Werte

$$\begin{aligned}
 33) \quad (2R \cos \varphi)'_r &= 2R \cos \varphi + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{n-2}^{2r+2n-4}}{R^{2r+2n-2}} \cdot \frac{h \alpha_n h \alpha_{n-1}}{h' \alpha_{n-2}^2 \sin^2 \varphi} \times \\
 &\times \left[ R \cos \varphi - \alpha_{n-2} + \frac{R^2 - 2R \alpha_{n-2} \cos 3\varphi + \alpha_{n-2}^2}{\sqrt{R^2 - 2R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2}} \sin(\chi + (2r+2n-3)\varphi) \right] \\
 &+ \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-4}}{R^{r+n-3}} \frac{(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})^2}{h' \alpha_{n-3} \sin \varphi} \frac{\alpha_{n-2}^2 - 2\alpha_{n-2} \alpha_{n-3} \cos 2\varphi + \alpha_{n-3}^2}{(R^2 - 2R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)^2} \times \\
 &\times \sqrt{h \alpha_n h \alpha_{n-1} (R^2 - 2R \alpha_{n-3} \cos \varphi + \alpha_{n-3}^2)} \sin(\chi' + (r+n-2)\varphi).
 \end{aligned}$$

Ist aber

$$\alpha_{n-3} = R'(\cos \varphi' + i \sin \varphi'), \quad \alpha_{n-4} = R'(\cos \varphi' - i \sin \varphi'),$$

so hat man statt des letzten Gliedes den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{R'^{r+n-5}}{R^{r+n-3}} \frac{1}{\sin \varphi \sin \varphi' (R^2 - 2R \alpha_{n-2} \cos \varphi + \alpha_{n-2}^2)^2} \times \\
 &\times \sqrt{\frac{h \alpha_n h \alpha_{n-1}}{8 \alpha_{n-3} 8 \alpha_{n-4}} (R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos \varphi' + \alpha_{n-2}^2)} \times \\
 &\times \left\{ \begin{aligned} &(R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos(2\varphi - \varphi') + \alpha_{n-2}^2) \times \\ &\times \sqrt{R^2 - 2RR' \cos(\varphi + \varphi') + R'^2} \sin(\chi' + \varphi - (r+n-1)(\varphi - \varphi')) \\ &+ (R'^2 - 2R' \alpha_{n-2} \cos(2\varphi + \varphi') + \alpha_{n-2}^2) \times \\ &\times \sqrt{R^2 - 2RR' \cos(\varphi - \varphi') + R'^2} \sin(\chi' + \varphi - (r+n-1)(\varphi + \varphi')) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Dabei bedeuten  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\chi'$ ,  $\chi''$  die nämlichen Constanten wie in den entsprechenden Ausdrücken bei  $R, \varphi$ .

Handelt es sich um die kleinsten Wurzeln, so sind überall die  $r$  negativ zu nehmen, und bei den genäherten Ausdrücken die  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2} \dots$  resp. durch  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$  zu ersetzen, nur ist es wieder besser bei  $R_{-r}^{\varphi}$

$$\left( \frac{\alpha_3^{\varphi}}{R^2} \right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{-r+1}^2 & \Delta R_{-r+2}^2 \\ \Delta R_{-r}^2 & \Delta R_{-r+1}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_{-r}^2 & \Delta R_{-r+1}^2 \\ \Delta R_{-r-1}^2 & \Delta R_{-r}^2 \end{vmatrix}},$$

und bei  $(2R \cos \varphi)_{-r}$

$$\left( \frac{\alpha_3^{\varphi}}{R^2} \right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1} & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2} \\ \Delta 2R \cos \varphi_{-r} & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{-r} & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1} \\ \Delta 2R \cos \varphi_{-r-1} & \Delta 2R \cos \varphi_{-r} \end{vmatrix}}$$

zu setzen. Von den Beispielen der I. Abh. gehören hierher die grössten Wurzeln des zweiten Beispiels. Es ist dort

$$R_5^3 = \frac{1908}{526} = 3,627376\ 425855\ 513,$$

$$R_6^3 = \frac{6921}{1908} = 3,627358\ 490566\ 037,$$

$$R_7^3 = \frac{25105}{6921} = 3,627365\ 987574\ 049,$$

$$R_8^3 = \frac{91065}{25105} = 3,627365\ 066719\ 776,$$

$$R_9^3 = \frac{330326}{91065} = 3,627365\ 068906\ 824,$$

$$R_{10}^3 = \frac{1198213}{330326} = 3,627365\ 087822\ 333.$$

Dann wird

$$\left(\frac{\alpha_n - 2^3}{R^3}\right)_7 = 0,020952\ 13879, \quad \left(\frac{\alpha_n - 2^3}{R^3}\right)_8 = 0,020952\ 02926;$$

$$\Delta R_7^3 \frac{\Delta R_7^3 - \left(\frac{\alpha_n - 2^3}{R^3}\right)_7 \Delta R_6^3}{\Delta^2 R_7^3 - \left(\frac{\alpha_n - 2^3}{R^3}\right)_7 \Delta^2 R_6^3} = 0,000000\ 902862\ 142,$$

demnach

$$R_7^{3'} = 3,627365\ 084711\ 907,$$

und gewiss zu klein

$$R_7^{3''} = 3,627364\ 181849\ 765;$$

$$\Delta R_8^3 \frac{\Delta R_8^3 - \left(\frac{\alpha_n - 2^3}{R^3}\right)_8 \Delta R_7^3}{\Delta^2 R_8^3 - \left(\frac{\alpha_n - 2^3}{R^3}\right)_8 \Delta^2 R_7^3} = -0,000000\ 017992\ 065,$$

demnach

$$R_8^{3'} = 3,627365\ 084711\ 841,$$

und gewiss zu gross

$$R_8^{3''} = 3,627365\ 102703\ 906.$$

$$2R \cos \varphi_5 = -\frac{1197}{526} = -2,275665\ 399239\ 5437,$$

$$2R \cos \varphi_6 = -\frac{4342}{1908} = -2,275681\ 341719\ 0775,$$

$$2R \cos \varphi_7 = -\frac{15750}{6921} = -2,275682\ 704811\ 4434,$$

$$2R \cos \varphi_8 = -\frac{57131}{25105} = -2,275682 \ 135032 \ 8619,$$

$$2R \cos \varphi_9 = -\frac{207235}{91065} = -2,275682 \ 205018 \ 3934,$$

$$2R \cos \varphi_{10} = -\frac{751717}{330326} = -2,275682 \ 204852 \ 1763.$$

$$\left(\frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2}\right)_7 = 0,020952 \ 02764, \quad \left(\frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2}\right)_8 = 0,020952 \ 01339;$$

$$2R \cos \varphi_7' = -2,275682 \ 203650 \ 9899,$$

$$2R \cos \varphi_8' = -2,275682 \ 203650 \ 9860.$$

## § 4.

Ist

$$\alpha_n = R(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \alpha_{n-1} = R(\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

$$\alpha_{n-2} = R'(\cos \varphi' + i \sin \varphi'), \quad \alpha_{n-3} = R'(\cos \varphi' - i \sin \varphi'),$$

so ist nach Abh. I.

$$R_r^2 = \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_n) \end{vmatrix}} = \alpha_n \alpha_{n-1} + \frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n), (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_{n-2})}{(\alpha_1^r \dots \alpha_n), (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2})} \cdot \frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n), (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_{n-2})}{(\alpha_1^r \dots \alpha_n), (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)}$$

$$= R^2 + \left(\frac{R'}{R}\right)^{r+n-2} \cdot \frac{R A_{r+2} A'_{r+2} - R' A_{r+1} A'_{r+3}}{R' \cdot q^{\alpha_{n-2}} q^{\alpha_{n-3}} \sin \varphi \cdot \sin \varphi'}.$$

Nun wird, wenn man  $A_{r+2} A'_{r+2}$  und  $A_{r+1} A'_{r+3}$  durch  $A_{-n+2}$ ,  $B_{-n+2}$ ,  $A'_{-n+2}$ ,  $B'_{-n+2}$  resp. durch

$$\frac{A_{-n+2} A'_{-n+2} - B_{-n+2} B'_{-n+2}}{2}, \quad \frac{A_{-n+2} B'_{-n+2} + B_{-n+2} A'_{-n+2}}{2},$$

$$\frac{A_{-n+2} A'_{-n+2} + B_{-n+2} B'_{-n+2}}{2}, \quad \frac{A_{-n+2} B'_{-n+2} - B_{-n+2} A'_{-n+2}}{2}$$

ausdrückt,

$$R A_{r+2} A'_{r+2} - R' A_{r+1} A'_{r+3} = A \cos(r+n)(\varphi + \varphi') + B \sin(r+n)(\varphi + \varphi')$$

$$+ C \cos(r+n)(\varphi - \varphi') - D \sin(r+n)(\varphi - \varphi')$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) + \sqrt{C^2 + D^2} \sin(\psi - (r+n)(\varphi - \varphi')),$$

wenn

$$A = (R - R' \cos(\varphi - \varphi')) \frac{A_{-n+2} A'_{-n+2} - B_{-n+2} B'_{-n+2}}{2} \\ + R' \sin(\varphi - \varphi') \frac{A_{-n+2} B'_{-n+2} + B_{-n+2} A'_{-n+2}}{2},$$

$$B = (R - R' \cos(\varphi - \varphi')) \frac{A_{-n+2} B'_{-n+2} + B_{-n+2} A'_{-n+2}}{2} \\ - R' \sin(\varphi - \varphi') \frac{A_{-n+2} A'_{-n+2} - B_{-n+2} B'_{-n+2}}{2}$$

$$C = (R - R' \cos(\varphi + \varphi')) \frac{A_{-n+2} A'_{-n+2} + B_{-n+2} B'_{-n+2}}{2} \\ - R' \sin(\varphi + \varphi') \frac{A_{-n+2} B'_{-n+2} - B_{-n+2} A'_{-n+2}}{2},$$

$$D = (R - R' \cos(\varphi + \varphi')) \frac{A_{-n+2} B'_{-n+2} - B_{-n+2} A'_{-n+2}}{2} \\ + R' \sin(\varphi + \varphi') \frac{A_{-n+2} A'_{-n+2} + B_{-n+2} B'_{-n+2}}{2},$$

$$\tan \psi = \frac{A}{B}, \quad \tan \psi' = \frac{C}{D}$$

gesetzt wird. Dabei ergibt sich dann

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{4} (R^2 - 2RR' \cos(\varphi - \varphi') + R'^2) (A_{-n+2}^2 + B_{-n+2}^2) \\ \times (A'_{-n+2}^2 + B'_{-n+2}^2) \\ = \frac{1}{4} h a_n h a_{n-1} q a_{n-2} q a_{n-3} (R^2 - 2RR' \cos(\varphi - \varphi') + R'^2),$$

und ebenso

$$C^2 + D^2 = \frac{1}{4} h a_n h a_{n-1} q a_{n-2} q a_{n-3} (R^2 - 2RR' \cos(\varphi + \varphi') + R'^2);$$

ferner

$$\psi = (\alpha' - 2\varphi' - 90^\circ + \alpha + \beta), \quad \psi' = (\alpha' - 2\varphi' + 90^\circ - \alpha - \beta'),$$

wenn noch

$$\frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}} = \tan \alpha, \quad \frac{A'_{-n+2}}{B'_{-n+2}} = \tan \alpha',$$

$$\frac{R' \sin(\varphi - \varphi')}{R - R' \cos(\varphi - \varphi')} = \tan \beta, \quad \frac{R' \sin(\varphi + \varphi')}{R - R' \cos(\varphi + \varphi')} = \tan \beta'$$

gesetzt wird. Man hat also im Ganzen

$$34) \quad R_r^2 = R^2 + \frac{R' r + n - 3}{R' r + n - 2} \cdot K [M \sin(\psi + (r + n)(\varphi + \varphi')) \\ + N \sin(\psi' - (r + n)(\varphi - \varphi'))],$$

wobei gesetzt ist

$$K = \frac{1}{2 \sin \varphi \sin \varphi'} \sqrt{\frac{h a_n h a_{n-1}}{q a_{n-2} q a_{n-3}}}, \quad M = \sqrt{R^2 - 2 R R' \cos(\varphi - \varphi') + R'^2},$$

$$N = \sqrt{R^2 - 2 R R' \cos(\varphi + \varphi') + R'^2}.$$

Daraus ergibt sich nun weiter

$$\begin{aligned} \Delta R_{r-1}^2 &= \frac{R' r + n - 4}{R' r + n - 3} \cdot K \left\{ M \left[ \frac{R'}{R} \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin(\psi + (r+n-1)(\varphi + \varphi')) \right] + N \left[ \frac{R'}{R} \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin(\psi' - (r+n-1)(\varphi - \varphi')) \right] \right\} \\ &= \frac{R' r + n - 4}{R' r + n - 3} \cdot K \left\{ M \left[ \left( \frac{R'}{R} - \cos(\varphi + \varphi') \right) \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin(\varphi + \varphi') \cos(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) \right] + N \left[ \left( \frac{R'}{R} - \cos(\varphi - \varphi') \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) - \sin(\varphi - \varphi') \cos(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \right] \right\}. \\ \Delta R_r^2 &= \frac{R' r + n - 3}{R' r + n - 2} \cdot K \left\{ M \left[ \frac{R'}{R} \sin(\psi + (r+n+1)(\varphi + \varphi')) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) \right] + N \left[ \frac{R'}{R} \sin(\psi' - (r+n+1)(\varphi - \varphi')) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \right] \right\} \\ &= \frac{R' r + n - 3}{R' r + n - 2} \cdot K \left\{ M \left[ \left( \frac{R'}{R} \cos(\varphi + \varphi') - 1 \right) \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R'}{R} \sin(\varphi + \varphi') \cos(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) \right] \right. \\ &\quad \left. + N \left[ \left( \frac{R'}{R} \cos(\varphi - \varphi') - 1 \right) \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{R'}{R} \sin(\varphi - \varphi') \cos(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt



$$\begin{aligned} \Delta R_r^2 - \frac{R'^2}{R^2} \Delta R_{r-1}^2 &= \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}} \\ &\times K \left\{ M \frac{-R^2 + 2RR' \cos(\varphi + \varphi') - R'^2}{R^2} \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) \right. \\ &\quad \left. + N \frac{-R^2 + 2RR' \cos(\varphi - \varphi') - R'^2}{R^2} \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \right\} \\ &= - \frac{R'^2 - 2RR' \cos \varphi \cos \varphi' + R^2}{R^2} \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}} \\ &\times K \{ M \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) + N \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \} \\ &- 2 \sin \varphi \sin \varphi' \cdot K \frac{R'^{r+n-2}}{R^{r+n-1}} \{ M \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) \\ &- N \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \}. \end{aligned}$$

Ganz ebenso ergibt sich aber

$$\begin{aligned} (R_{r+2}^2 - R_r^2) - \frac{R'^4}{R^4} (R_r^2 - R_{r-2}^2) &= - \left( \frac{R'^4}{R^4} - 2 \frac{R'^2}{R^2} \cos 2\varphi \cos 2\varphi' + 1 \right) \\ &\times \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}} K \{ M \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) + N \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \} \\ &- 2 \sin 2\varphi \sin 2\varphi' K \frac{R'^{r+n-1}}{R^{r+n}} \{ M \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) \\ &- N \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \}. \end{aligned}$$

Werden aus beiden Gleichungen die letzten Glieder eliminirt, so kommt:

$$\begin{aligned} 35) \quad \frac{R'^4}{R^4} (R_r^2 - R_{r-2}^2) - \frac{R'^3}{R^3} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \cdot \Delta R_{r-1}^2 + \frac{R'}{R} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \times \\ \times \Delta R_r^2 - (R_{r+2}^2 - R_r^2) \\ = \left( \frac{R'^2}{R^2} - 2 \frac{R'}{R} \cos(\varphi + \varphi') + 1 \right) \left( \frac{R'^2}{R^2} - 2 \frac{R'}{R} \cos(\varphi - \varphi') + 1 \right) \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}} \times \\ \times K \{ M \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) + N \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi')) \}. \end{aligned}$$

Wird die entsprechende Gleichung für  $r-1$  gebildet, von der vorhergehenden abgezogen und zugleich der Wert von  $\Delta R_{r-1}^2$  beachtet, so erhält man

$$\begin{aligned} 36) \quad \frac{\frac{R'^4}{R^4} (\Delta R_{r-1}^2 - \Delta R_{r-3}^2) - \frac{R'^3}{R^3} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta^2 R_{r-2}^2}{\Delta R_{r-1}^2} \\ + \frac{\frac{R'}{R} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta^2 R_{r-1}^2 - (\Delta R_{r+1}^2 - \Delta R_{r-1}^2)}{\Delta R_{r-1}^2} \\ = \left( \frac{R'^2}{R^2} - 2 \frac{R'}{R} \cos(\varphi + \varphi') + 1 \right) \left( \frac{R'^2}{R^2} - 2 \frac{R'}{R} \cos(\varphi - \varphi') + 1 \right); \end{aligned}$$

Es gibt sonach die 35) selbst wieder

$$\begin{aligned} & \frac{R'r+n-3}{R'r+n-2} K [M \sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi')) + N \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi'))] \\ &= \Delta R_{r-1}^2 \frac{\frac{R'^4}{R^4} (R_r^2 - R_{r-2}^2) - \frac{R'^3}{R^3} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta R_{r-1}^2 +}{\frac{R'^4}{R^4} (\Delta R_{r-1}^2 - \Delta R_{r-3}^2) - \frac{R'^3}{R^3} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta^2 R_{r-2}^2 +} \\ & \quad + \frac{R'}{R} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta R_r^2 - (R_{r+2}^2 - R_r^2) \\ & \quad + \frac{R'}{R} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta^2 R_{r-1}^2 - (\Delta R_{r+1}^2 - \Delta R_{r-1}^2) \end{aligned}$$

Dies ist die gewünschte Correctur und man hat jetzt

$$\begin{aligned} 37) \quad R_r^{2'} &= R_r^2 - \Delta R_{r-1}^2 \times \\ & \times \frac{\frac{R'^4}{R^4} (R_r^2 - R_{r-2}^2) - \frac{R'^3}{R^3} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta R_{r-1}^2 +}{\frac{R'^4}{R^4} (\Delta R_{r-1}^2 - \Delta R_{r-3}^2) - \frac{R'^3}{R^3} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta^2 R_{r-2}^2 +} \\ & \quad + \frac{R'}{R} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta R_r^2 - (R_{r+2}^2 - R_r^2) \\ & \quad + \frac{R'}{R} 4 \cos \varphi \cos \varphi' \Delta^2 R_{r-1}^2 - (\Delta R_{r+1}^2 - \Delta R_{r-1}^2) \end{aligned}$$

Was die constanten Factoren betrifft, so ergeben sich diese aus der 36). Diese lässt sich nämlich auf die Form bringen

$$\begin{aligned} 38) \quad \frac{R'^4}{R^4} \Delta R_{r-3}^2 - \frac{R'^3}{R^3} a \Delta R_{r-2}^2 + \frac{R'^2}{R^2} b \Delta R_{r-1}^2 - \frac{R'}{R} a \Delta R_r^2 \\ + \Delta R_{r+1}^2 = 0, \end{aligned}$$

wo, wie auch im Folgenden

$$4 \cos \varphi \cos \varphi' = a,$$

$$\begin{aligned} 2 + 4 \cos(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi') &= 4 \cos^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi' - 2 = \\ = 2 \cos 2\varphi + 2 \cos 2\varphi' + 2 &= 8 \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\varphi + \varphi') - 2 \cos(2\varphi + 2\varphi') = b \end{aligned}$$

gesetzt ist. Bildet man noch die drei analogen Gleichungen für  $r-1$ ,  $r-2$ ,  $r-3$ , so ergibt die gewöhnliche Methode

$$39) \quad \frac{R'^4}{R^4} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-3}^2 & . & . & . \\ \Delta R_{r-4}^2 & . & . & . \\ \Delta R_{r-5}^2 & . & . & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \Delta R_{r-4}^2 & . & . & . \\ \Delta R_{r-5}^2 & . & . & . \\ \Delta R_{r-6}^2 & . & . & . \end{vmatrix}},$$

$$\frac{R'^3}{R^3} 4 \cos \varphi \cos \varphi' = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 & \Delta R_{r+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\frac{R'}{R} 4 \cos \varphi \cos \varphi' = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_{r+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Die 37) lässt sich dann weiter auf eine Form bringen, welche den genauen Wert des Fehlers zeigt. Zunächst nimmt das zweite Glied der rechten Seite durch Division leicht die Form an

$$R_r^2 + \frac{\begin{vmatrix} R_{r-2}^2 & R_r^2 \\ R_{r-3}^2 & R_{r-1}^2 \end{vmatrix} \frac{R'^4}{R^4} - \begin{vmatrix} R_{r-1}^2 & R_r^2 \\ R_{r-2}^2 & R_{r-1}^2 \end{vmatrix} a \frac{R'^3}{R^3} + \begin{vmatrix} R_r^2 & R_{r+1}^2 \\ R_{r-1}^2 & R_r^2 \end{vmatrix} a \frac{R'}{R}}{(\Delta R_{r-1}^2 - \Delta R_{r-3}^2) \frac{R'^4}{R^4} - \Delta^2 R_{r-2}^2 a \frac{R'^3}{R^3} + \Delta^2 R_{r-1}^2 a \frac{R'}{R}} - \frac{\begin{vmatrix} R_r^2 & R_{r+2}^2 \\ R_{r-1}^2 & R_{r+1}^2 \end{vmatrix}}{-(\Delta R_{r+1}^2 - \Delta R_{r-1}^2)}.$$

Werden hier für die Constanten ihre Werte aus 39) eingeführt, so lässt sich der Nenner leicht in die Form einer Determinante 5ten Grades bringen, nämlich

$$\begin{vmatrix} \Delta R_{r-1}^2 - \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-1}^2 - \Delta R_{r-2}^2 & 0 & -\Delta R_r^2 + \Delta R_{r-1}^2 & \\ \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 & \\ \Delta R_{r-4}^2 & \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & -\Delta R_{r+1}^2 + \Delta R_{r-1}^2 & \\ & & & \Delta R_{r+1}^2 & \\ & & & \Delta R_r^2 & \\ & & & \vdots & \end{vmatrix};$$

Wird noch die zweite Zeile zur ersten addirt, so gibt dies

$$\Delta R_{r-1}^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-4}^2 & \Delta R_{r-3}^2 & \Delta R_{r-2}^2 & \Delta R_{r-1}^2 & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Der Zähler aber nimmt ebenso die Form an

$$\begin{vmatrix} R_{r-2}^2, & R_r^2 \\ R_{r-3}^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} R_{r-1}^2, & R_r^2 \\ R_{r-2}^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix}, \quad 0, \quad \begin{vmatrix} R_{r+1}^2, & R_r^2 \\ R_r^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} R_{r+2}^2, & R_r^2 \\ R_{r+1}^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix} \\
 \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\
 \Delta R_{r-4}^2, & \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{vmatrix}.$$

Wird hier die zweite Zeile mit  $-R_r^2$  multiplicirt und zur ersten addirt, so erhält man

$$-\Delta R_{r-1}^2 \begin{vmatrix} R_{r-2}^2, & R_{r-1}^2, & R_r^2, & R_{r+1}^2, & R_{r+2}^2 \\ \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-4}^2, & \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Man hat sonach, wenn noch Zeilen und Colonnen vertauscht werden

$$37^a) \quad R'^2_r = \begin{vmatrix} \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2, & R_{r+2}^2 \\ \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & R_{r+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2, & 1 \\ \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Es ist leicht zu sehen, dass, wenn ich zur Gewinnung der 39) statt der Gleichungen für  $r, r-1, r-2, r-3$ , die für  $r+1, r, r-1, r-2$  oder für  $r+2, r+1, r, r-1$  oder für  $r+3, r+2, r+1, r$  genommen hätte, ich analog einfache Determinanten bekommen hätte, und nach Anbringung der Correctur der Fehler derselbe gewesen wäre, wie nach dieser Formel für  $R_{r+1}^2, R_{r+2}^2, R_{r+3}^2$ . Es gilt darüber dieselbe Bemerkung wie oben. Bei den grössten Wurzeln ist die hier gewählte Combination, bei den kleinsten die letzte die vorteilhafteste.

Um nun den genauen Wert des Fehlers darzustellen, führe ich wieder die Bezeichnung  $\varrho$  und  $\bar{\varrho}$  der p. 46. ein, und es ergibt sich wie dort

$$\begin{aligned}
 40) \quad R^{2r} = R^2 + & \frac{
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \varrho \cdot \varrho+1 \cdot \varrho+2 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho-1, \overline{\varrho} \\ \varrho-2, \overline{\varrho-1} \end{array} \right| & \varrho-2 \cdot \varrho+1 \cdot \varrho+2 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho, \overline{\varrho+1} \\ \varrho-1, \overline{\varrho} \end{array} \right| \\
 \varrho-1 \cdot \varrho \cdot \varrho+1 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho-2, \overline{\varrho-1} \\ \varrho-3, \overline{\varrho-2} \end{array} \right| & \varrho-3 \cdot \varrho \cdot \varrho+1 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho-1, \overline{\varrho} \\ \varrho-2, \overline{\varrho-1} \end{array} \right| \\
 \vdots & \vdots \\
 \varrho \cdot \varrho+1 \cdot \varrho+2 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho-1, \overline{\varrho} \\ \varrho-2, \overline{\varrho-1} \end{array} \right| & \varrho-2 \cdot \varrho+1 \cdot \varrho+2 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho, \overline{\varrho+1} \\ \varrho-1, \overline{\varrho} \end{array} \right| \\
 \vdots & \vdots \\
 \varrho-2 \cdot \varrho-1 \cdot \varrho+2 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho+1, \overline{\varrho+2} \\ \varrho, \overline{\varrho+1} \end{array} \right| & \varrho-2 \cdot \varrho-1 \cdot \varrho \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho+2, \overline{\varrho+3} \\ \varrho+1, \overline{\varrho+2} \end{array} \right| \\
 \varrho-3 \cdot \varrho-2 \cdot \varrho+1 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho, \overline{\varrho+1} \\ \varrho-1, \overline{\varrho} \end{array} \right| & \varrho-3 \cdot \varrho-2 \cdot \varrho-1 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho+1, \overline{\varrho+2} \\ \varrho, \overline{\varrho+1} \end{array} \right| \\
 \vdots & \vdots \\
 \varrho-2 \cdot \varrho-1 \cdot \varrho+2 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho+1, \overline{\varrho+2} \\ \varrho, \overline{\varrho+1} \end{array} \right| & \varrho-2 \cdot \varrho-1 \cdot \varrho \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho+2, \overline{\varrho+3} \\ \varrho+1, \overline{\varrho+2} \end{array} \right| \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}
 }{
 \begin{array}{c}
 \varrho-2 \cdot \varrho-1 \cdot \varrho \cdot \varrho+1 \cdot \overline{\varrho+3} \\
 \varrho-3 \cdot \varrho-2 \cdot \varrho-1 \cdot \varrho \cdot \overline{\varrho+2} \\
 \vdots \\
 \varrho-2 \cdot \varrho-1 \cdot \varrho \cdot \varrho+1 \cdot \overline{\varrho+2} \\
 \vdots
 \end{array}
 }
 \end{aligned}$$

Um nun zu finden, welchem Wert sich der Fehler für grosse  $r$  nähert, sind wieder statt der Divisionscoefficienten ihre Näherungswerte einzusetzen. Man hat aber in unserm Fall als erste Näherungswerte

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot A_{r+1},$$

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2}) = \frac{R^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} \sin \varphi} \cdot A'_{r+1};$$

demnach

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n^2 h\alpha_{n-1}^2 \sin^2 \varphi} \left| \begin{array}{cc} A_{r+1}, A_{r+2} \\ A_r, A_{r+1} \end{array} \right| = \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}}; \\
 \varrho &= \frac{R^{r+n-3}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot \frac{R^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} \sin \varphi} \left| \begin{array}{cc} RA_{r+1}, R'A'_{r+2} \\ A_r, A'_{r+1} \end{array} \right| \\
 &= \frac{R^{r+n-5}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot \frac{R^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} \sin \varphi} \cdot K_{r+1};
 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{cc} \varphi, & \overline{\varphi+1} \\ \varphi-1, & \overline{\varphi} \end{array} \right| = \frac{R^{3r+3n-8} R'^{r+n-4}}{h\alpha_n^2 h\alpha_{n-1}^2 \sin \varphi q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} \sin \varphi'} (RK_{r+1} - R'K_{r+2}).$$

In Folge davon wird der Nenner der 40):

$$\frac{R^{46r+46n-188} R'^{4r+4n-30}}{h\alpha_n^{25} h\alpha_{n-1}^{25} \sin^4 \varphi q\alpha_{n-3}^4 q\alpha_{n-3}^4 \sin^4 \varphi'} \times$$

$R'^4(RK_r - R'K_{r+1}),$	$R'^4(RK_{r+1} - R'K_{r+2}),$	$R'^4(RK_{r+2} - R'K_{r+3}),$
$R'^3(RK_{r-1} - R'K_r),$	$R'^3(RK_r - R'K_{r+1}),$	$R'^3(RK_{r+1} - R'K_{r+2}),$
$R'^2(RK_{r-2} - R'K_{r-1}),$	.	.
$R'(RK_{r-3} - R'K_{r-2}),$	.	.
$(RK_{r-4} - R'K_{r-3}),$	.	.

$R'^4(RK_{r+3} - R'K_{r+4}),$	$R^4$
$R'^4(RK_{r+2} - R'K_{r+3}),$	$R^3$
.	$R^2$
.	$R$
.	1

Nun verificirt sich leicht die wichtige Identität

$$41) A_r A'_s - a A_{r-1} A'_{s-1} + b A_{r-2} A'_{s-2} - a A_{r-3} A'_{s-3} + A_{r-4} A'_{s-4} = 0.$$

Wird demnach in unserer Determinante die 2te und 4te Zeile mit  $-a$ , die 3te mit  $b$  multiplicirt, und werden dann alle Zeilen zur ersten addirt, so verschwinden die vier ersten Glieder der ersten Zeile, und man erhält für die Determinante den Wert

$$(R^2 - 2RR' \cos(\varphi + \varphi') + R'^2)(R^2 - 2RR' \cos(\varphi - \varphi') + R'^2) \cdot R'^6 \times$$

$RK_{r-1} - R'K_r,$	$RK_r - R'K_{r+1},$	$RK_{r+1} - R'K_{r+2},$	$RK_{r+2} - R'K_{r+3}$
$RK_{r-2} - R'K_{r-1},$	$RK_{r-1} - R'K_r,$	$RK_r - R'K_{r+1},$	$RK_{r+1} - R'K_{r+2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dass diese Determinante 4ten Grades constant ist ergibt sich schon daraus, dass sie mit Hilfe der 41) leicht in die umgeformt werden kann, für welche  $r$  um 1 kleiner oder grösser ist. Der Wert ergibt sich folgendermassen:

Man findet leicht

$$42) A_{r+i} A'_{s+k} = A_r A'_s \cos i\varphi \cos k\varphi' + A_r B'_s \cos i\varphi \sin k\varphi' \\ + B_r A'_s \sin i\varphi \cos k\varphi' + B_r B'_s \sin i\varphi \sin k\varphi';$$

$$A_{r+i} B'_{s+k} = A_r B'_s \cos i\varphi \cos k\varphi' - A_r A'_s \cos i\varphi \sin k\varphi' \\ + B_r B'_s \sin i\varphi \cos k\varphi' - B_r A'_s \sin i\varphi \sin k\varphi';$$

$$B_{r+i} A'_{s+k} = B_r A'_s \cos i\varphi \cos k\varphi' + B_r B'_s \cos i\varphi \sin k\varphi' \\ - A_r A'_s \sin i\varphi \cos k\varphi' - A_r B'_s \sin i\varphi \sin k\varphi';$$

$$B_{r+i} B'_{s+k} = B_r B'_s \cos i\varphi \cos k\varphi' - B_r A'_s \cos i\varphi \sin k\varphi' \\ - A_r B'_s \sin i\varphi \cos k\varphi' + A_r A'_s \sin i\varphi \sin k\varphi'.$$

Demnach ergibt sich nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten

$$\begin{aligned}
 43) \quad & \begin{vmatrix} A_r A'_s, & A_{r+1} A'_{s+1}, & A_{r+2} A'_{s+2}, & A_{r+3} A'_{s+3} \\ A_{r-1} A'_{s-1}, & A_r A'_s, & A_{r+1} A'_{s+1}, & A_{r+2} A'_{s+2} \\ A_{r-2} A'_{s-2}, & A_{r-1} A'_{s-1}, & A_r A'_s, & A_{r+1} A'_{s+1} \\ A_{r-3} A'_{s-3}, & A_{r-2} A'_{s-2}, & A_{r-1} A'_{s-1}, & A_r A'_s \end{vmatrix} = \\
 & \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ \cos \varphi \cos \varphi', & \cos \varphi \sin \varphi', & \sin \varphi \cos \varphi', & \sin \varphi \sin \varphi' \\ \cos 2\varphi \cos 2\varphi', & \cos 2\varphi \sin 2\varphi', & \sin 2\varphi \cos 2\varphi', & \sin 2\varphi \sin 2\varphi' \\ \cos 3\varphi \cos 3\varphi', & \cos 3\varphi \sin 3\varphi', & \sin 3\varphi \cos 3\varphi', & \sin 3\varphi \sin 3\varphi' \end{vmatrix} \times \\
 & \times \begin{vmatrix} A_r A'_s, & A_r B'_s, & B_r A'_s, & B_r B'_s \\ A_{r-1} A'_{s-1}, & A_{r-1} B'_{s-1}, & B_{r-1} A'_{s-1}, & B_{r-1} B'_{s-1} \\ A_{r-2} A'_{s-2}, & A_{r-2} B'_{s-2}, & B_{r-2} A'_{s-2}, & B_{r-2} B'_{s-2} \\ A_{r-3} A'_{s-3}, & A_{r-3} B'_{s-3}, & B_{r-3} A'_{s-3}, & B_{r-3} B'_{s-3} \end{vmatrix} \\
 = & \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ \cos \varphi \cos \varphi', & \cos \varphi \sin \varphi', & \sin \varphi \cos \varphi', & \sin \varphi \sin \varphi' \\ \cos 2\varphi \cos 2\varphi', & . & . & . \\ \cos 3\varphi \cos 3\varphi', & . & . & . \end{vmatrix}^2 \times \\
 & \times \begin{vmatrix} A_r A'_s, & A_r B'_s, & B_r A'_s, & B_r B'_s \\ A_r B'_s, & -A_r A'_s, & B_r B'_s, & -B_r A'_s \\ B_r A'_s, & B_r B'_s, & -A_r A'_s, & -A_r B'_s \\ B_r B'_s, & -B_r A'_s, & -A_r B'_s, & A_r A'_s \end{vmatrix} \\
 = & 16. \sin^4 \varphi \sin^4 \varphi' \sin^2(\varphi + \varphi') \sin^2(\varphi - \varphi') \cdot [(A_r A'_s + B_r B'_s)^2 \\
 & + (A_r B'_s - B_r A'_s)^2] \cdot [(A_r A'_s - B_r B'_s)^2 + (A_r B'_s + B_r A'_s)^2].
 \end{aligned}$$

Die Ableitung bleibt dieselbe, wenn an Stelle von  $A_r A'_s$ , irgend eine lineare Function solcher Ausdrücke tritt. In unserm Fall ist dies  $RR_{r-1} - R'K_r$ , und es ergibt sich daraus der Wert der Determinante

$$\begin{aligned}
 44) \quad & 16. \sin^4 \varphi \sin^4 \varphi' \sin^2(\varphi + \varphi') \sin^2(\varphi - \varphi') h a_n^2 h a_{n-1}^2 q a_{n-2}^2 q a_{n-3}^2 \times \\
 & \times (R^2 - 2RR' \cos(\varphi + \varphi') + R'^2)^2 \cdot (R^2 - 2RR' \cos(\varphi - \varphi') + R'^2)^2, \\
 & \text{so dass also der ganze Nenner für grosse } r \text{ sich dem Werte nähert} \\
 & \frac{R^{46r+46n-188} R'^{4r+4n-24}}{h a_n^{24} h a_{n-1}^{24} q a_{n-2}^2 q a_{n-3}^2} \cdot 16. \sin^2(\varphi + \varphi') \sin^2(\varphi - \varphi') \times \\
 & \times (R^2 - 2RR' \cos(\varphi + \varphi') + R'^2)^3 \cdot (R^2 - 2RR' \cos(\varphi - \varphi') + R'^2)^3.
 \end{aligned}$$

Den Zähler betrachte ich wieder lieber in der Form

$$\begin{vmatrix} \varphi - 1. \varphi. \varphi + 1. \varphi + 2. \varphi - 1, & \varphi - 2. \varphi. \varphi + 1. \varphi + 2. \varphi, & \varphi - 2. \varphi - 1. \varphi + 1. \varphi + 2. \varphi + 1, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi - 2. \varphi - 1. \varphi. \varphi + 2. \varphi + 2, & \varphi - 2. \varphi - 1. \varphi. \varphi + 1. \varphi + 2, & \\ \vdots & \vdots & \end{vmatrix},$$

die ich erhalte, wenn ich die letzte Colonne zur vorletzten, und so fort, jede zur vorhergehenden addire. Für die ersten Näherungswerte wird daraus

$$\frac{R^{45r+45n-180} R'^{5r+5n-25}}{h\alpha_n^{25} h\alpha_{n-1}^{25} \sin \varphi^5 q\alpha_n-2^5 q\alpha_n-3^5 \sin \varphi'^5} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} K_r, & K_{r+1}, & K_{r+2}, & K_{r+3}, & K_{r+4} \\ K_{r-1}, & K_r, & K_{r+1}, & K_{r+2}, & K_{r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

in Folge der Gleichung 41), durch welche ich z. B. alle Glieder der letzten Colonne auf den Wert null bringen kann. Es ist demnach zu den zweiten Näherungswerten überzugehen, und sind dabei wieder die beiden Fälle zu unterscheiden, ob  $\alpha_{n-4}$  ein einzelner reeller Wert ist, oder ob  $\alpha_{n-4}$  und  $\alpha_{n-5}$  auch noch ein Paar complexe Werte sind. Ich untersuche zunächst den ersten Fall. Es sind hier die Näherungswerte

$$(\alpha_1' \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f' \alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f' \alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-1}}{f' \alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-1}}{f' \alpha_{n-3}} =$$

$$= \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} A_{r+1} + \frac{R'^{r+n-2}}{q\alpha_n-2 q\alpha_n-3 \sin \varphi'} \times$$

$$\times \frac{R^2 A'_{r+3} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+2} + R'^2 A'_{r+1}}{M^2 N^2}$$

wie analog p. 34. gefunden wird, und

$$(\alpha_1' \dots \alpha_{n-2}) = \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-3}}{h' \alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-3}}{h' \alpha_{n-3}} + \frac{\alpha_{n-4}^{r+n-3}}{h' \alpha_{n-4}} =$$

$$= \frac{R'^{r+n-4}}{q\alpha_n-2 q\alpha_n-3 \sin \varphi'} A'_{r+1} + \frac{\alpha_{n-4}^{r+n-3}}{h' \alpha_{n-4}}.$$

Hieraus erhält man bei Vernachlässigung des gegen die andern verschwindenden Gliedes

$$Q = \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}} + \frac{R^{r+n-3}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot \frac{R'^{r+n-2}}{q\alpha_n-2 q\alpha_n-3 \sin \varphi' M^2 N^2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} RA_{r+1}, & R'(R^2 A'_{r+4} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+3} + R'^2 A'_{r+2}) \\ A_r, & (R^2 A'_{r+3} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+2} + R'^2 A'_{r+1}) \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot \frac{R'^{r+n-3}}{q\alpha_n-2 q\alpha_n-3 \sin \varphi' M^2 N^2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} R'(R^2 A'_{r+3} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+2} + R'^2 A'_{r+1}), & RA_{r+2} \\ (R^2 A'_{r+2} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+1} + R'^2 A'_r), & A_{r+1} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}} - \frac{R^{r+n-3}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot \frac{R'^{r+n-3}}{q\alpha_n-2 q\alpha_n-3 \sin \varphi' M^2 N^2} \cdot Q_r,$$



wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$Q_r = R^2 A_{r+2} (R^2 A'_{r+2} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+1} + R'^2 A'_r) \\ - 2RR' A_{r+1} (R^2 A'_{r+3} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+2} + R'^2 A'_{r+1}) \\ + R'^2 A_r (R^2 A'_{r+4} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+3} + R'^2 A'_{r+2});$$

und

$$\varrho = \frac{R^{r+2n-3}}{h a_n h a_{n-1} \sin \varphi} \cdot \frac{R'^{r+2n-4}}{q a_{n-2} q a_{n-3} \sin \varphi'} \cdot K_{r+1} - \frac{R^{2r+2n-6} (R^2 - R'^2)}{q a_{n-2} q a_{n-3} M^2 N^2} \\ + \frac{R^{r+2n-3} a_{n-4} r^{n-3}}{h a_n h a_{n-1} \sin \varphi h' a_{n-4}} \cdot (R A_{r+1} - a_{n-4} A_r).$$

Dann erhält man weiter, wieder unter Vernachlässigung der gegen die andern verschwindenden Glieder

$$(\varrho-1) \cdot \varrho \cdot (\varrho+1) \cdot (\varrho+2) \cdot (\overline{\varrho-1}) = \frac{R^{2r+2n-16} R'^{r+2n-5}}{h a_n^5 h a_{n-1}^5 \sin \varphi q a_{n-2} q a_{n-3} \sin \varphi'} K_r$$

$$- \frac{R^{2r+2n-17} R'^{2r+2n-10}}{h a_n^5 h a_{n-1}^5 \sin^2 \varphi q a_{n-2}^2 q a_{n-3}^2 \sin^2 \varphi'} \cdot \frac{K_r}{M^2 N^2} \times \\ \times (R^3 R' Q_{r-1} + R^2 R'^2 Q_r + R R'^3 Q_{r+1} + R'^4 Q_{r+2})$$

$$- \frac{R^{2r+2n-12} R'^{2r+2n-8} (R^2 - R'^2)}{h a_n^4 h a_{n-1}^4 q a_{n-2} q a_{n-3} M^2 N^2} + \frac{R^{2r+2n-16} a_{n-4} r^{n-4}}{h a_n^5 h a_{n-1}^5 \sin \varphi h' a_{n-4}} \times \\ \times (R A_r - a_{n-4} A_{r-1});$$

$$(\varrho-2) \cdot \varrho \cdot (\varrho+1) \cdot (\varrho+2) \cdot \overline{\varrho} = \frac{R^{2r+2n-17} R'^{r+2n-4}}{\text{,,} \text{,,}} K_{r+1}$$

$$- \frac{R^{2r+2n-18} R'^{2r+2n-9}}{\text{,,} \text{,,}} K_{r+1} (R^4 Q_{r-2} + R^3 R' Q_{r-1} + R R'^3 Q_{r+1} + R'^4 Q_{r+2})$$

$$- \frac{R^{2r+2n-14} R'^{2r+2n-6} (R^2 - R'^2)}{\text{,,} \text{,,}} + \frac{R^{2r+2n-17} a_{n-4} r^{n-3}}{\text{,,} \text{,,}} \times \\ \times (R A_{r+1} - a_{n-4} A_r);$$

$$(\varrho-2) \cdot (\varrho-1) \cdot (\varrho+1) \cdot (\varrho+2) \cdot (\overline{\varrho+1}) = \frac{R^{2r+2n-18} R'^{r+2n-3}}{\text{,,} \text{,,}} K_{r+2}$$

$$- \frac{R^{2r+2n-19} R'^{2r+2n-8} \cdot K_{r+2}}{\text{,,} \text{,,}} (R^4 Q_{r-2} + R^3 R' Q_{r-1} + R R'^3 Q_{r+1} + R'^4 Q_{r+2})$$

$$- \frac{R^{2r+2n-16} R'^{2r+2n-4} (R^2 - R'^2)}{\text{,,} \text{,,}} + \frac{R^{2r+2n-18} a_{n-4} r^{n-2}}{\text{,,} \text{,,}} \times \\ \times (R A_{r+2} - a_{n-4} A_{r+1});$$

$$\begin{aligned}
 (q-2).(q-1).q.(q+2).(\overline{q+2}) &= \frac{R^{9r+9n-19} R^{r+n-2}}{\text{,,} \quad \text{,,}} K_{r+3} \\
 - \frac{R^{8r+8n-20} R^{2r+2n-7} . K_{r+3}}{\text{,,} \quad \text{,,}} (R^4 Q_{r-2} + R^3 R' Q_{r-1} + R^2 R'^2 Q_r + R'^4 Q_{r+2}) \\
 - \frac{R^{8r+8n-18} R^{2r+2n-2} (R^2 - R'^2)}{\text{,,} \quad \text{,,}} + \frac{R^{8r+9n-19} \alpha_{n-4}^{r+n-1}}{\text{,,} \quad \text{,,}} \times \\
 &\times (RA_{r+3} - \alpha_{n-4} A_{r+2}); \\
 (q-2).(q-1).q.(q+1).(\overline{q+3}) &= \frac{R^{9r+9n-20} R^{r+n-1}}{\text{,,} \quad \text{,,}} K_{r+4} \\
 - \frac{R^{8r+8n-21} R^{2r+2n-6} . K_{r+4}}{\text{,,} \quad \text{,,}} (R^4 Q_{r-2} + R^3 R' Q_{r-1} + R^2 R'^2 Q_r + R R'^3 Q_{r+1}) \\
 - \frac{R^{8r+8n-20} R^{2r+2n} (R^2 - R'^2)}{\text{,,} \quad \text{,,}} + \frac{R^{8r+9n-20} \alpha_{n-4}^{r+n}}{\text{,,} \quad \text{,,}} \times \\
 &\times (RA_{r+4} - \alpha_{n-4} A_{r+3}).
 \end{aligned}$$

Werden diese Werte in die Zählerdeterminante eingesetzt, so zerfällt diese in 1024 Einzeldeterminanten. Von diesen kommen aber nur in Betracht: die erste, welche in allen Colonnen das 1ste Glied enthält und identisch null wird, wie wir schon gesehen haben; ausserdem

die fünf, welche je in einer Colonne das 2te  
 die fünf,       ,,       ,,       ,,       3te } Glied, in allen übrigen  
 die fünf,       ,,       ,,       ,,       4te } das erste enthalten.

Es wäre dem Leser zu viel zugemutet, wenn ich die Auswertung dieser fünfzehn Determinanten hier durchführen wollte, und sei deshalb nur der betretene Weg angedeutet.

Mit Hülfe der Gleichung 41), welche für die  $K_r$  sowohl als für die  $Q_r$  gültig bleibt, lassen sich immer je fünf zusammengehörige Determinanten so umformen, dass sie die vier ersten Colonnen gleich haben. Dann kann man sie in eine zusammenfassen und wieder mit Hülfe der 41) durch Addition der Zeilen die 4 ersten Glieder zum Verschwinden bringen. Man hat dann noch in den 3 Fällen das letzte Glied der ersten Zeile multiplicirt mit der Determinante 4ten Grades

$$\begin{vmatrix} K_{r-1}, & K_r, & K_{r+1}, & K_{r+2} \\ K_{r-2}, & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix},$$

welche ein besonderer Fall der 43) ist, und nach der dortigen Entwicklung den Wert bekommt

$$16 \sin^4 \varphi \cdot \sin^4 \varphi' \cdot \sin^2 (\varphi + \varphi') \sin^2 (\varphi - \varphi') h \alpha_n^2 h \alpha_{n-1}^2 q \alpha_{n-2}^2 q \alpha_{n-3}^2 M^2 N^2.$$

Die letzten Glieder der ersten Zeilen erfordern verschiedene Behandlung, und man kommt schliesslich zu dem Resultat:

$$45) \quad R'^2 r = R^2 + \frac{R'^{2r+2n-10}}{R^{2r+2n-7}} \cdot A \cdot \{ B \cdot \sin(\chi + (r+n-4)(2\varphi+2\varphi')) \\ + C \cdot \sin(\chi - (r+n-4)(2\varphi-2\varphi')) + D \cdot \sin(w + (r+n-4)2\varphi') \\ + E \cdot \sin(w' + (r+n-4)2\varphi) + F \} + \frac{\alpha_{n-4}^{r+n-8}}{R^{r+n-8}} \cdot G \cdot \sin(v + (r+n-2)\varphi);$$

wo die Werte der Constanten die folgenden sind:

$$A = \frac{h \alpha_n h \alpha_{n-1}}{8 q \alpha_{n-2} q \alpha_{n-3} \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi' \cdot M^2 N^2},$$

$$B = \frac{1}{N} \cdot (R^2 - 2RR' \cos(3\varphi + 3\varphi') + R'^2)(R^2 - 2RR' \cos(3\varphi + \varphi') \\ + R'^2)(R^2 - 2RR' \cos(\varphi + 3\varphi') + R'^2),$$

$$C = \frac{1}{M} \cdot (R^2 - 2RR' \cos(3\varphi - 3\varphi') + R'^2)(R^2 - 2RR' \cos(3\varphi - \varphi') \\ + R'^2)(R^2 - 2RR' \cos(\varphi - 3\varphi') + R'^2),$$

$$D = 2 \cdot (R^2 - 2RR' \cos(\varphi + 3\varphi') + R'^2)(R^2 - 2RR' \cos(\varphi - 3\varphi') + R'^2) \times \\ \times \sqrt{R^2 - 2RR' \cos \varphi \cdot \cos \varphi' + R'^2 \cos^2 \varphi},$$

$$E = 2(R^2 - 2RR' \cos(3\varphi + \varphi') + R'^2)(R^2 - 2RR' \cos(3\varphi - \varphi') + R'^2) \times \\ \times \sqrt{R^2 - 2RR' \cos \varphi \cdot \cos \varphi' + R'^2 \cos^2 \varphi'},$$

$$F = 2(R - R' \cos \varphi \cdot \cos \varphi') M^2 N^2,$$

$$G = \frac{(\alpha_{n-4}^2 - 2\alpha_{n-4} R' \cos \varphi' + R'^2)^2 (\alpha_{n-4}^2 - 2\alpha_{n-4} R' \cos(2\varphi + \varphi') + R'^2)}{h' \alpha_{n-4} \sin \varphi \cdot M^4 N^4} \\ \times (\alpha_{n-4}^2 - 2\alpha_{n-4} R' \cos(2\varphi - \varphi') + R'^2) \times \\ \times \sqrt{h \alpha_n h \alpha_{n-1} (R^2 - 2R \alpha_{n-4} \cos \varphi + \alpha_{n-4}^2)}.$$

Die Werte der constanten Winkel aber werden

$$\chi = 90 + 2\alpha' - 4\varphi' + 2\alpha + \gamma + \delta + \varepsilon,$$

wenn gesetzt wird

$$\tan \alpha = \frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}}, \quad \tan \alpha' = \frac{A'_{-n+4}}{B'_{-n+4}},$$

$$\tan \gamma = \frac{(R^2 - R'^2) \sin(\varphi - \varphi')}{R^2 \cos(\varphi - \varphi') - 2RR' + R'^2 \cos(\varphi - \varphi')}.$$

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{R^2 R' (\sin(\varphi + \varphi') - a \sin(2\varphi + 2\varphi') + R R'^2 (a \sin(5\varphi + 5\varphi') - \sin(6\varphi + 6\varphi')) - R'^3 \sin(7\varphi + 7\varphi')}{R^3 + R^2 R' (\cos(\varphi + \varphi') - a \cos(2\varphi + 2\varphi')) + R R'^2 (a \cos(5\varphi + 5\varphi') - \cos(6\varphi + 6\varphi')) - R'^3 \cos(7\varphi + 7\varphi')}$$

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{R^4 \sin(-5\varphi - 3\varphi') - R^3 R' a \sin(-3\varphi - \varphi') + R^2 R'^2 b \sin(-\varphi + \varphi')}{R^4 \cos(-5\varphi - 3\varphi') - R^3 R' a \cos(-3\varphi - \varphi') + R^2 R'^2 b \cos(-\varphi + \varphi') - R R'^3 a \sin(\varphi + 3\varphi') + R'^4 \sin(3\varphi + 5\varphi') - R R'^3 a \cos(\varphi + 3\varphi') + R'^4 \cos(3\varphi + 5\varphi')}$$

$$\chi' = 90^\circ + 2\alpha' - 4\varphi' - 2\alpha - \gamma' - \delta' - \varepsilon',$$

wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tang} \gamma' = \frac{(R^2 - R'^2) \sin(\varphi + \varphi')}{R^2 \cos(\varphi + \varphi') - 2R R' + R'^2 \cos(\varphi + \varphi')}$$

$$\operatorname{tang} \delta' = \frac{R^2 R' (\sin(\varphi - \varphi') - a \sin(2\varphi - 2\varphi')) + R R'^2 (a \sin(5\varphi - 5\varphi') - \sin(6\varphi - 6\varphi')) - R'^3 \sin(7\varphi - 7\varphi')}{R^3 + R^2 R' (\cos(\varphi - \varphi') - a \cos(2\varphi - 2\varphi')) + R R'^2 (a \cos(5\varphi - 5\varphi') - \cos(6\varphi - 6\varphi')) - R'^3 \cos(7\varphi - 7\varphi')}$$

$$\operatorname{tang} \varepsilon' = \frac{R^4 \sin(-5\varphi + 3\varphi') - R^3 R' a \sin(-3\varphi + \varphi') + R^2 R'^2 b \sin(-\varphi - \varphi')}{R^4 \cos(-5\varphi + 3\varphi') - R^3 R' a \cos(-3\varphi + \varphi') + R^2 R'^2 b \cos(-\varphi - \varphi') - R R'^3 a \sin(\varphi - 3\varphi') + R'^4 \sin(3\varphi - 5\varphi') - R R'^3 a \cos(\varphi - 3\varphi') + R'^4 \cos(3\varphi - 5\varphi')}$$

$$\omega = 2\alpha' - 4\varphi' - 90^\circ - \zeta' + \eta_1 - \eta_2 + \vartheta,$$

wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tang} \zeta' = \frac{(R^2 - R'^2) \sin \varphi'}{R^2 \cos \varphi' - 2R R' \cos \varphi + R'^2 \cos \varphi'}$$

$$\operatorname{tang} \eta_1 = \frac{-2R R' \cos \varphi \sin 3\varphi' + R'^2 \sin 6\varphi'}{R^2 - 2R R' \cos \varphi \cos 3\varphi' + R'^2 \cos 6\varphi'}$$

$$\operatorname{tang} \eta_2 = \frac{R' \cos \varphi \sin \varphi'}{R - R' \cos \varphi \cos \varphi'}$$

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{R^4 \sin(-3\varphi') - R^3 R' a \sin(-\varphi') + R^2 R'^2 b \sin \varphi'}{R^4 \cos(-3\varphi') - R^3 R' a \cos(-\varphi') + R^2 R'^2 b \cos \varphi' - R R'^3 a \sin 3\varphi' + R'^4 \sin 5\varphi' - R R'^3 a \cos 3\varphi' + R'^4 \cos 5\varphi'}$$

$$\omega' = 2\alpha - 90^\circ + \zeta' + \eta'_1 - \eta'_2 + \vartheta',$$

wenn gesetzt wird

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \zeta' &= \frac{(R^2 - R'^2) \sin \varphi}{R^2 \cos \varphi - 2RR' \cos \varphi' + R'^2 \cos \varphi}, \\ \operatorname{tang} \eta'_1 &= \frac{-2RR' \cos \varphi' \sin 3\varphi + R'^2 \sin 6\varphi}{R^2 - 2RR' \cos \varphi' \cos 3\varphi + R'^2 \cos 6\varphi}, \\ \operatorname{tang} \eta'_2 &= \frac{R' \cos \varphi' \cdot \sin \varphi}{R - R' \cos \varphi' \cdot \cos \varphi}, \\ \operatorname{tang} \vartheta' &= \frac{R^4 \cdot \sin(-5\varphi) - R^3 R' a \cdot \sin(-3\varphi) + R^2 R'^2 b \sin(-\varphi)}{R^4 \cdot \cos(-5\varphi) - R^3 R' a \cdot \cos(-3\varphi) + R^2 R'^2 b \cos(-\varphi)} \\ &\quad - \frac{RR'^3 a \cdot \sin \varphi + R'^4 \sin 3\varphi}{-RR'^3 a \cdot \cos \varphi + R'^4 \cos 3\varphi}, \\ v &= \alpha + 2\mu + \nu\end{aligned}$$

wenn gesetzt wird

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \mu &= \frac{(\alpha_{n-4}^2 - R^2) \sin 2\varphi}{\alpha_{n-4}^2 \cos 2\varphi - 2\alpha_{n-4} R' \cos \varphi' + R'^2 \cos 2\varphi}, \\ \operatorname{tang} \nu &= \frac{\alpha_{n-4} \sin \varphi}{R - \alpha_{n-4} \cos \varphi}.\end{aligned}$$

Im zweiten Fall sei

$$\alpha_{n-4} = R''(\cos \varphi'' + i \cdot \sin \varphi''), \quad \alpha_{n-3} = R''(\cos \varphi'' - i \cdot \sin \varphi'').$$

Man hat dann als zweite Näherungswerte wie beim ersten Fall

$$\begin{aligned}(\alpha_1' \dots \alpha_n) &= \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} A_{r+1} + \frac{R'^{r+n-2}}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} \sin \varphi'} \times \\ &\quad \frac{R^2 A'_{r+3} - 2RR' \cos \varphi A'_{r+2} + R'^2 A'_{r+1}}{M^2 N^2},\end{aligned}$$

und analog, wenn noch

$$(\chi - \alpha_1)(\chi - \alpha_2) \dots (\chi - \alpha_{n-6}) = t$$

und

$$R'^2 - 2R'R'' \cos(\varphi' - \varphi'') + R''^2 = M'^2,$$

$$R'^2 - 2R'R'' \cdot \cos(\varphi' + \varphi'') + R''^2 = N'^2$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}(\alpha_1' \dots \alpha_{n-2}) &= \frac{R'^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} \sin \varphi'} \cdot A'_{r+1} + \frac{R''^{r+n-4}}{t\alpha_{n-4} t\alpha_{n-5} \sin \varphi''} \times \\ &\quad \times \frac{R'^2 A''_{r+3} - 2R'R'' \cos \varphi' A''_{r+2} + R''^2 A''_{r+1}}{M'^2 N'^2}\end{aligned}$$

Dann wird auch  $\varphi$  derselbe Wert wie p. 70., dagegen wird jetzt

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{R^{r+n-3} R'^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} \sin \varphi'} \cdot K_{r+1} - \frac{R'^{2r+2n-6} (R^2 - R'^2)}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} M^2 N^2} \\ &\quad + \frac{R^{r+n-3} R''^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi t\alpha_{n-4} t\alpha_{n-5} \sin \varphi'' M'^2 N'^2} \cdot P_{r+1},\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$P_{r+1} = RA_{r+1}(R'^2 A''_{r+3} - 2R' R'' \cos \varphi' A''_{r+2} + R''^2 A''_{r+1}) \\ - R' A_r (R'^2 A''_{r+4} - 2R' R'' \cos \varphi' A''_{r+3} + R''^2 A''_{r+2}).$$

In Folge davon werden auch bei den Näherungswerten für die  $(\varrho-1) \cdot \varrho \cdot (\varrho+1) (\varrho+2) (\bar{\varrho}-1)$  u. s. f. die drei ersten Glieder die nämlichen wie p. 71., nur die vierten Glieder werden anders, nämlich der Reihe nach

$$\left. \begin{aligned} R^{2r+9n-16} R''_{r+n-5} \cdot P_r, \\ R^{2r+9n-17} R''_{r+n-4} \cdot P_{r+1}, \\ R^{2r+9n-18} R''_{r+n-3} \cdot P_{r+2}, \\ R^{2r+9n-19} R''_{r+n-2} \cdot P_{r+3}, \\ R^{2r+9n-20} R''_{r+n-1} \cdot P_{r+4}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{abgesehen von dem gemeinsamen Nenner} \\ &h a_n^5 h a_{n-1}^5 \sin \varphi \cdot t a_{n-4} t a_{n-5} \sin \varphi'' \cdot M'^2 N'^2. \end{aligned}$$

Von den Einzeldeterminanten, in welche der Zähler durch Einsetzen der Näherungswerte zerfällt, werden dann auch die 11 ersten die nämlichen wie im ersten Fall. Die fünf aber, welche in je einer Colonne das vierte, in den übrigen das erste Glied der Näherungswerte enthalten, werden anders. Sie lassen sich aber analog behandeln, und man findet schliesslich

$$46) \quad R'^2 = R^2 + \frac{R'^{2r+2n-10}}{R^{2r+2n-7}} \cdot A \cdot \{ B \cdot \sin(\chi + (r+n-4)(2\varphi + 2\varphi')) \\ + C \sin(\chi' - (r+n-4)(2\varphi - 2\varphi')) \\ + D \sin(\omega + (r+n-4)2\varphi') + E \cdot \sin(\omega' + (r+n-4)2\varphi) + F \} \\ + \frac{R''_{r+n-9}}{R^{r+n-8}} \cdot H \cdot \{ J \cdot \sin(\xi - (r+n-2)(\varphi - \varphi')) \\ + K \cdot \sin(\xi' + (r+n-2)(\varphi + \varphi')) \}.$$

Dabei haben die Constanten  $A, B, C, D, E, F, \chi, \chi', \omega, \omega'$  die Bedeutung wie p. 73. Die übrigen bedeuten

$$H = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h a_n h a_{n-5}}{t a_{n-4} t a_{n-5}}} \cdot \frac{M' N'}{\sin \varphi \cdot \sin \varphi'' M^4 N^4},$$

$$J = (R'^2 - 2R' R'' \cos(2\varphi - \varphi'' + \varphi') + R''^2) \times \\ \times (R'^2 - 2R' R'' \cos(2\varphi - \varphi'' - \varphi') + R''^2) \times \\ \times \sqrt{R'^2 - 2R' R'' \cos(\varphi + \varphi'') + R''^2};$$

$$K = (R'^2 - 2R' R'' \cos(2\varphi + \varphi'' + \varphi') + R''^2) \times \\ \times (R'^2 - 2R' R'' \cos(2\varphi + \varphi'' - \varphi') + R''^2) \times \\ \times \sqrt{R'^2 - 2R' R'' \cos(\varphi - \varphi'') + R''^2};$$

$$\xi = \alpha'' - 3\varphi'' + 90 - \alpha - \varrho + \sigma - o,$$

wenn gesetzt wird

$$\tan \alpha'' = \frac{A'' - n + 6}{B'' - n + 6}, \quad \tan o = \frac{R' \cdot \sin(\varphi + \varphi'')}{R - R' \cos(\varphi + \varphi'')},$$

$$\tan \varrho = \frac{R''^4 \sin(2\varphi - 2\varphi'') - aR''^3 R' \sin(\varphi - \varphi'')}{R''^4 \cos(2\varphi - 2\varphi'') - aR''^3 R' \cos(\varphi - \varphi'') + aR'' R'^3 \sin(\varphi - \varphi'') - R'^4 \sin(2\varphi - 2\varphi'') + bR''^2 R'^2 - aR'' R'^3 \cos(\varphi - \varphi'') + R'^4 \cos(2\varphi - 2\varphi'')},$$

$$\tan \sigma = \frac{(R'^2 - R''^2) \sin(2\varphi - \varphi'')}{R'^2 \cos(2\varphi - \varphi'') - 2R' R' \cos \varphi' + R'^2 \cos(2\varphi - \varphi'')};$$

$$\xi' = \alpha'' - 3\varphi'' - 90 + \alpha + \varrho' - \sigma' + o',$$

wenn gesetzt wird

$$\tan o' = \frac{R' \sin(\varphi - \varphi'')}{R - R' \cos(\varphi - \varphi'')},$$

$$\tan \varrho' = \frac{R''^4 \sin(2\varphi + 2\varphi'') - aR''^3 R' \sin(\varphi + \varphi'')}{R''^4 \cos(2\varphi + 2\varphi'') - aR''^3 R' \cos(\varphi + \varphi'') + aR'' R'^3 \sin(\varphi + \varphi'') - R'^4 \sin(2\varphi + 2\varphi'') + bR''^2 R'^2 - aR'' R'^3 \cos(\varphi + \varphi'') + R'^4 \cos(2\varphi + 2\varphi'')},$$

$$\tan \sigma' = \frac{(R'^2 - R''^2) \sin(2\varphi + \varphi'')}{R'^2 \cos(2\varphi + \varphi'') - 2R' R' \cos \varphi' + R'^2 \cos(2\varphi + \varphi'')}.$$

Handelt es sich um die kleinsten Wurzeln, so ist einfach  $r$  negativ zu nehmen und statt  $\alpha_n, \alpha_{n-1} \dots$  resp.  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  zu schreiben. Ich erhalte dann

$$\begin{aligned} 47) \quad R^2_{-r} &= R^2_{-r} - \Delta R^2_{-r-1} \cdot \frac{\frac{R'^4}{R^4} (R^2_{-r} - R^2_{-r-2})}{\frac{R'^4}{R^4} (\Delta R^2_{-r-1} - \Delta R^2_{-r-3})} \\ &\quad - \frac{R'^3}{R^3} a \cdot \Delta R^2_{-r-1} + \frac{R'}{R} a \cdot \Delta R^2_{-r} - (R^2_{-r+2} - R^2_{-r}) \\ &\quad - \frac{R^3}{R^3} a \cdot \Delta^2 R^2_{-r-2} + \frac{R'}{R} a \Delta^2 R^2_{-r-1} - (\Delta R^2_{-r+1} - \Delta R^2_{-r-1}) \end{aligned}$$

Die Constanten aber werden, um möglichst wenig Werte über den zu corrigirenden hinaus berechnen zu müssen, diesmal bequemer bestimmt durch die Gleichungen

$$\left(\frac{R'^4}{R^4}\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3}, & \Delta R^2_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'^3}{R^3} 4 \cos \varphi \cdot \cos \varphi'\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3}, & \Delta R^2_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'}{R} 4 \cos \varphi \cdot \cos \varphi'\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Es wird dann

$$R^{2'}_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3}, & \Delta R^2_{-r+4}, & R^2_{-r+2} \\ \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3}, & R^2_{-r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3}, & \Delta R^2_{-r+4} & 1 \\ \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3}, & \Delta R^2_{-r+4} & 1 \\ \Delta R^2_{-r}, & \Delta R^2_{-r+1}, & \Delta R^2_{-r+2}, & \Delta R^2_{-r+3}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Was die Berechnung von  $2R \cos \varphi$  betrifft, so hat man nach Abb. I.

$$\begin{aligned} (2R \cos \varphi)_r &= \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_n) \end{vmatrix}} = \alpha_n + \alpha_{n-1} \\ &+ \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_n) \end{vmatrix}} = 2R \cos \varphi \\ &+ \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-1}} \cdot \frac{RA_{r+1}A'_{r+2} - R'A_rA'_{r+3}}{q^{\alpha_n-2}q^{\alpha_{n-3}} \sin \varphi \sin \varphi'}. \end{aligned}$$

Daraus enthält man dieselbe Entwicklung wie p. 49, nur dass statt  $A_{-n+2}$  und  $B_{-n+2}$  jetzt  $A_{-n+1}$  und  $B_{-n+1}$  steht. Da dann weiter  $\frac{A_{-n+1}}{B_{-n+1}} = \frac{A_{-n+2} \cos \varphi - B_{-n+2} \sin \varphi}{B_{-n+2} \cos \varphi + A_{-n+2} \sin \varphi}$  ist, sieht man, dass statt  $\alpha$  jetzt  $\alpha - \varphi$ , und folglich statt  $\psi$  und  $\psi'$  jetzt  $\psi - \varphi$  und  $\psi' + \varphi$  zu setzen ist. Es ist sonach

$$\begin{aligned} 48) \quad (2R \cos \varphi)_r &= 2R \cos \varphi + \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-1}} \cdot K \times \\ &\times [M \cdot \sin(\psi - \varphi + (r+n)(\varphi + \varphi')) + N \cdot \sin(\psi' + \varphi - (r+n)(\varphi - \varphi'))], \end{aligned}$$



wo die Constanten dieselben sind wie p. 50. Dann ergibt sich weiter ganz analog

$$49) (2R \cos \varphi)'_r = (2R \cos \varphi)_r - \Delta(2R \cos \varphi)_{r-1} \times \\ \times \frac{\frac{R'^4}{R^4} (2R \cos \varphi_r - 2R \cos \varphi_{r-2}) - \frac{R'^3}{R^3} a \cdot \Delta 2R \cos \varphi_{r-1}}{\frac{R'^4}{R^4} (\Delta 2R \cos \varphi_{r-1}) - \Delta 2R \cos \varphi_{r-3} - \frac{R'^3}{R^3} a \cdot \Delta^2 2R \cos \varphi_{r-2}} \\ + \frac{\frac{R'}{R} a \cdot \Delta 2R \cos \varphi_r - (2R \cos \varphi_{r+2} - 2R \cos \varphi_r)}{\frac{R'}{R} a \cdot \Delta^2 2R \cos \varphi_{r-1} - (\Delta 2R \cos \varphi_{r+1} - \Delta 2R \cos \varphi_{r-1})},$$

wobei die Constanten zu berechnen sind aus den Gleichungen

$$\left(\frac{R^4}{R^4}\right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{r-2} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-1} & \Delta 2R \cos \varphi_r & \Delta 2R \cos \varphi_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{r+3} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-2} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-1} & \Delta 2R \cos \varphi_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'^3}{R^4} 4 \cos \varphi \cdot \cos \varphi'\right)_r \\ = \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{r-3} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-1} & \Delta 2R \cos \varphi_r & \Delta 2R \cos \varphi_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{r-3} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-2} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-1} & \Delta 2R \cos \varphi_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'}{R} 4 \cos \varphi \cdot \cos \varphi'\right)_r \\ = \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{r-3} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-2} & \Delta 2R \cos \varphi_{r+1} & \Delta 2R \cos \varphi_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{r-3} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-2} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-1} & \Delta 2R \cos \varphi_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte kommt

$$(2R \cos \varphi)'_r \\ = \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{r-2} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-1} & \Delta 2R \cos \varphi_r & \Delta 2R \cos \varphi_{r+1} & 2R \cos \varphi_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{r-2} & \Delta 2R \cos \varphi_{r-1} & \Delta 2R \cos \varphi_r & \Delta 2R \cos \varphi_{r+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Haben  $\varphi$  und  $\sigma$  dieselbe Bedeutung wie p. 57., so hat man den genauen Wert des Fehlers in der Form

$$\begin{aligned}
 50) \quad (2R \cos \varphi)'_r &= 2R \cos \varphi + \frac{\left| \begin{array}{c} \varrho \cdot \varrho + 1 \cdot \varrho + 2 \\ \varrho - 1, \sigma \\ \vdots \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \varrho - 1, \sigma \\ \varrho - 2, \sigma - 1 \\ \vdots \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \varrho \cdot \varrho + 1 \cdot \varrho + 2 \\ \varrho - 1, \sigma \\ \vdots \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \varrho - 1, \sigma \\ \varrho - 2, \sigma + 1 \\ \vdots \end{array} \right|} \\
 &\quad \frac{\varrho - 2 \cdot \varrho + 1 \cdot \varrho + 2 \left| \begin{array}{c} \varrho, \sigma + 1 \\ \varrho - 1, \sigma \\ \vdots \end{array} \right| \cdot \varrho - 2 \cdot \varrho - 1 \cdot \varrho + 2 \left| \begin{array}{c} \varrho + 1, \sigma + 2 \\ \varrho, \sigma + 1 \\ \vdots \end{array} \right|}{\varrho - 2 \cdot \varrho + 1 \cdot \varrho + 2 \left| \begin{array}{c} \varrho, \sigma + 1 \\ \varrho - 1, \sigma \\ \vdots \end{array} \right| \cdot \varrho - 2 \cdot \varrho - 1 \cdot \varrho + 2 \left| \begin{array}{c} \varrho + 1, \sigma + 2 \\ \varrho, \sigma + 1 \\ \vdots \end{array} \right|} \\
 &\quad \frac{\varrho - 2 \cdot \varrho - 1 \cdot \varrho \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho + 2, \sigma + 3 \\ \varrho + 1, \sigma + 2 \\ \vdots \end{array} \right| \cdot \varrho - 2 \cdot \varrho - 1 \cdot \varrho \cdot \varrho + 1 \cdot \sigma + 3}{\varrho - 2 \cdot \varrho - 1 \cdot \varrho \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho + 2, \sigma + 3 \\ \varrho + 1, \sigma + 2 \\ \vdots \end{array} \right| \cdot \varrho - 2 \cdot \varrho - 1 \cdot \varrho \cdot \varrho + 1 \cdot \varrho + 2}
 \end{aligned}$$

Um den Ausdruck zu finden, welchem sich der Fehler für grosse  $r$  nähert, hat man als erste Näherungswerte

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}}, \\
 \sigma &= \frac{R^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot \frac{R^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} \sin \varphi'} \cdot \left| \begin{array}{c} RA_r, R'A'_{r+1} \\ A_{r-1}, A'_{r+2} \end{array} \right| \\
 &= \frac{R^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi} \cdot \frac{R^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3} \sin \varphi'} \cdot K'_{r+1}, \\
 \varrho \cdot \varrho + 1 \cdot \varrho + 2 \cdot \left| \begin{array}{c} \varrho - 1, \sigma \\ \varrho - 2, \sigma - 1 \end{array} \right| &= \frac{R^{2r+2n-18} R^{r+n-5}}{h\alpha_n^5 h\alpha_{n-1}^5 \sin \varphi q\alpha_{n-3} q\alpha_{n-3} \sin \varphi'} \times \\
 &\quad \times (RK'_{r+1} - R'K'_{r+1}).
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte und das analoge Verfahren wie oben wird der Nenner

$$\frac{R^{46r+46n-192} R^{14r+4n-24}}{h\alpha_n^{23} h\alpha_{n-1}^{23} q\alpha_{n-2}^2 q\alpha_{n-3}^2} \cdot 16 \cdot \sin^2(\varphi + \varphi') \cdot \sin^2(\varphi - \varphi') \cdot M^6 N^6.$$

Der Zähler wird null und man muss zu den zweiten Näherungswerten übergehen. Dabei sind wieder die beiden Fälle zu unterscheiden.

Im ersten Fall, wenn  $\alpha_{n-4}$  ein einzelner Wert ist, ist  $\varrho$  derselbe Wert wie p. 70. und

$$\sigma = \frac{R^{r+n-4} R'^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi q^{\alpha_n-2} q^{\alpha_{n-3}} \sin \varphi'} \cdot K'_{r+1} \\ - \frac{R'^{2r+2n-6} (2R \cos \varphi - 2R' \cos \varphi')}{q^{\alpha_n-2} q^{\alpha_{n-3}} M^2 N^2} \\ + \frac{R^{r+n-4} \alpha_{n-4} (R A_r - \alpha_{n-4} A_{r-1})}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} \sin \varphi \cdot h' \alpha_{n-4}}.$$

In Folge davon wird

$$(\varphi-1) \cdot \varphi \cdot (\varphi+1) (\varphi+2) (\sigma-1) = \frac{R^{9r+9n-17} R'^{r+n-5} K'_r}{h\alpha_n^5 h\alpha_{n-1}^5 \sin \varphi q^{\alpha_n-2} q^{\alpha_{n-3}} \sin \varphi'} \\ - \frac{R^{8r+8n-18} R'^{2r+2n-10}}{h\alpha_n^5 h\alpha_{n-1}^5 \sin^2 \varphi q^{\alpha_n-2} q^{\alpha_{n-3}} \sin^2 \varphi'} \cdot \frac{K'_r}{M^2 N^2} \times \\ \times (R^3 R' Q_{r-1} + R^2 R'^2 Q_r + R R'^3 Q_{r+1} + R'^4 R_{r+2}) \\ - \frac{R^{8r+8n-12} R'^{2r+2n-8} (2R \cos \varphi - 2R' \cos \varphi')}{h\alpha_n^4 h\alpha_{n-1}^4 q^{\alpha_n-2} q^{\alpha_{n-3}} M^2 N^2} \\ + \frac{R^{9r+9n-17} \alpha_{n-4} (R A_{r-1} - \alpha_{n-4} A_{r-2})}{h\alpha_n^5 h\alpha_{n-1}^5 \sin \varphi \cdot h' \alpha_{n-4}}$$

Durch Einsetzen dieses und der analogen Werte zerfällt wieder die Determinante in Einzeldeterminanten, von welchen nur 16 in Betracht kommen. Die erste ist identisch null. Die fünf nächsten unterscheiden sich von den fünf ersten der p. 59. nur dadurch, dass der Exponent von  $R$  um 5 kleiner ist und dass an der Stelle der  $K_r$  die  $K'_r$  stehen; die fünf folgenden unterscheiden sich von den entsprechenden der p. 72. ausser durch den Exponenten von  $R$  nur durch den Factor  $2R \cos \varphi - 2R' \cos \varphi - 2R' \cos \varphi'$  statt  $R^2 - R'^2$ ; bei den fünf letzten endlich ist nur der Exponent von  $R$  um 5 kleiner.

Man erhält als Resultat

$$51) \quad (2R \cos \varphi)'_r = 2R \cos \varphi + \frac{R'^{2r+2n-10}}{R^{2r+2n-6}} \cdot A \times \\ \{B \cdot \sin(\chi - \varphi + (r+n-4)(2\varphi+2\varphi')) + C \cdot \sin(\chi' + \varphi - (r+n-4)(2\varphi-2\varphi')) \\ + D' \cdot \sin(w + \eta_2 - \eta_3 + (r+n-4)2\varphi') + E \cdot \sin(w' - \varphi + (r+n-4)2\varphi) + F''\} \\ + \frac{\alpha_{n-4} r + n - 8}{R^{r+n-7}} \cdot G \cdot \sin(v + (r+n-2)\varphi).$$

Dabei sind die Constanten  $A, B, C, E, G, \chi, \chi', w, w', v, \eta_2$  dieselben wie p. 73.

Dagegen ist jetzt

$$D' = 2(R^2 - 2RR' \cos(\varphi + 3\varphi') + R'^2)(R^2 - 2RR' \cos(\varphi - 3\varphi') + R'^2) \times \\ \times \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi - 2RR' \cos \varphi \cos \varphi' + R'^2}, \\ F' = (2R \cos \varphi - 2R' \cos \varphi') M^2 N^2, \\ \text{tang } \eta_3 = \frac{R' \sin \varphi'}{R \cos \varphi - R' \cos \varphi'}.$$

Im zweiten Fall hat  $\varrho$  den nämlichen Wert wie im ersten. Dagegen wird

$$\sigma = \frac{R^{r+n-4} R'^{r+n-4}}{h_{nn} h_{a_{n-1}} \sin \varphi q_{a_{n-2}} q_{a_{n-3}} \sin \varphi'} K'_{r+1} \\ - \frac{R'^{2r+2n-6} (2R \cos \varphi - 2R' \cos \varphi')}{q_{a_{n-2}} q_{a_{n-3}} M^2 N^2} \\ + \frac{R^{r+n-4} R'^{r+n-4} \cdot P'_{r+1}}{h_{a_n} h_{a_{n-1}} \sin \varphi t_{a_{n-4}} t_{a_{n-5}} \sin \varphi' M'^2 N'^2},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$P'_{r+1} = R A_r (R'^2 A''_{r+3} - 2R' R'' \cos \varphi' A''_{r+1} + R'^2 A''_{r+1}) \\ - R' A_{r-1} (R'^2 A''_{r+4} - 2R' R'' \cos \varphi' A''_{r+3} + R'^2 A''_{r+2}).$$

Es bleiben also auch bei dem Näherungswert für  $(\varrho-1)\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)(\sigma-1)$  die drei ersten Glieder dieselben wie im ersten Fall, das letzte wird

$$\frac{R^{2r+2n-17} R'^{r+n-5} \cdot P'_r}{h_{a_n}^5 h_{a_{n-1}}^5 \sin \varphi t_{a_{n-4}} t_{a_{n-5}} \sin \varphi' M'^2 N'^2}.$$

Es bleiben dann auch die 11 ersten Determinanten dieselben. Die 5 letzten unterscheiden sich von denen der p. 76 nur dadurch, dass der Exponent von  $R$  um 5 kleiner ist, und an Stelle der  $K_r$  und  $P_r$  die  $K'_r$  und  $P'_r$  stehen. Dies übt nur einen Einfluss auf die Werte von  $\xi$  und  $\xi'$ , statt deren man jetzt hat  $\xi + \varphi$  und  $\xi' - \varphi$ . Demnach ist im zweiten Fall

$$52) (2R \cos \varphi)'_r = 2R \cos \varphi \\ + \frac{R'^{2r+2n-10}}{R^{2r+2n-6}} A \{ B \sin(\chi - \varphi + (r+n-4)(2\varphi + 2\varphi')) \\ + C \sin(\chi' + \varphi - (r+n-4)(2\varphi - 2\varphi')) \\ + D' \sin(\omega + \eta_2 - \eta_3 + (r+n-4)2\varphi') \\ + E \sin(\omega' - \varphi + (r+n-4)2\varphi) + F' \} \\ + \frac{R'^{r+4n-9}}{R^{r+n-7}} H \{ J \sin(\xi + \varphi - (r+n-2)(\varphi - \varphi')) \\ + K \sin(\xi' - \varphi + (r+n-2)(\varphi + \varphi')) \},$$

wo die Constanten dieselbe Bedeutung haben wie vorher.

Wenn es sich um die kleinsten Wurzeln handelt, könnte man wieder einfach  $r$  überall negativ nehmen. Es ist aber wieder bequemer zu setzen:

$$53) (2R \cos \varphi)'_{-r} = 2R \cos \varphi_{-r} - \Delta 2R \cos \varphi_{-r-1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\frac{R'^4}{R^4} (2R \cos \varphi_{-r} - 2R \cos \varphi_{-r-2}) - \frac{R'^3}{R^3} a \cdot \Delta 2R \cos \varphi_{-r-1}}{\frac{R'^4}{R^4} (\Delta 2R \cos \varphi_{-r-1} - \Delta 2R \cos \varphi_{-r-3}) - \frac{R'^3}{R^3} a \cdot \Delta^2 2R \cos \varphi_{-r-2}} \\ & + \frac{\frac{R'}{R} a \cdot \Delta 2R \cos \varphi_{-r} - (2R \cos \varphi_{-r+2} - 2R \cos \varphi_{-r})}{+ \frac{R'}{R} a \cdot \Delta^2 2R \cos \varphi_{-r-1} - (\Delta 2R \cos \varphi_{-r+1} - \Delta 2R \cos \varphi_{-r-1})} \end{aligned}$$

und dabei die Constanten zu bestimmen durch die Gleichungen

$$\left( \frac{R'^4}{R^4} \right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+3}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{-r}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left( \frac{R'^3}{R^3} \cdot 4 \cos \varphi \cos \varphi' \right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{-r}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+3}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{-r}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left( \frac{R'}{R} \cdot 4 \cos \varphi \cos \varphi' \right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{-r}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R \cos \varphi_{-r}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, & \Delta 2R \cos \varphi_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Dadurch wird

$$(2R \cos \varphi)'_{-r} = \frac{\begin{array}{c} \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1}, \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, \Delta 2R \cos \varphi_{-r+3}, \\ \Delta 2R \cos \varphi_{-r}, \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1}, \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, \\ \vdots \end{array}}{\begin{array}{c} \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1}, \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, \Delta 2R \cos \varphi_{-r+3}, \\ \Delta 2R \cos \varphi_{-r}, \Delta 2R \cos \varphi_{-r+1}, \Delta 2R \cos \varphi_{-r+2}, \\ \vdots \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \Delta 2R \cos \varphi_{-r+4}, 2R \cos \varphi_{-r+2} \\ \Delta 2R \cos \varphi_{-r+3}, 2R \cos \varphi_{-r+1} \\ \vdots \end{array}}{\begin{array}{c} \Delta 2R \cos \varphi_{-r+4}, 1 \\ \Delta 2R \cos \varphi_{-r+3}, 1 \\ \vdots \end{array}}$$

Von den Beispielen der ersten Abhandlung gehören hierher die kleinsten Wurzeln des 3ten Beispiels. Die numerische Berechnung wird jedoch so umständlich, dass sie kaum praktisch anwendbar ist. Bei dem speciellen Beispiel ist übrigens auch die Annäherung nicht gross, wenn nicht höhere Divisionscoefficienten berechnet werden. Man hat

$$R_{-6}^2 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$R_{-7}^2 = \frac{2.8}{79} = 0,202531 \ 645569 \ 62$$

$$R_{-8}^2 = \frac{2.79}{824} = 0,191747 \ 572815 \ 53$$

$$R_{-9}^2 = \frac{2.824}{8810} = 0,187060 \ 158910 \ 32$$

$$R_{-10}^2 = \frac{2.8810}{94556} = 0,186344 \ 600025 \ 38$$

$$R_{-11}^2 = \frac{2.94556}{1008973} = 0,187430 \ 188914 \ 86$$

$$R_{-12}^2 = \frac{2.1008973}{10 \ 768514} = 0,187393 \ 172354 \ 14$$

$$R_{-13}^2 = \frac{2.10768514}{114 \ 896933} = 0,187446 \ 500421 \ 38$$

$$R_{-14}^2 = \frac{2.114896933}{1226 \ 145888} = 0,187411 \ 521132 \ 14$$

$$R_{-15}^2 = \frac{2.1226145888}{13085 \ 200972} = 0,187409 \ 561476 \ 92$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{R'^4}{R^4}\right)_{-11} = 95,365153\ 4784,$$

$$\left(a \frac{R'^3}{R^3}\right)_{-11} = -25,626882\ 6847,$$

$$\left(a \frac{R'}{R}\right)_{-11} = -2,547611\ 8912,$$

$$\begin{aligned} \Delta R_{-12}^2 \cdot \frac{\frac{R'^4}{R^4} (R_{-11}^2 - R_{-13}^2) - a \frac{R'^3}{R^3} \Delta R_{-12}^2}{\frac{R'^4}{R^4} (\Delta R_{-12}^2 - \Delta R_{-14}^2) - a \frac{R'^3}{R^3} \Delta^2 R_{-13}^2} \\ + a \frac{R'}{R} \Delta R_{-11}^2 - (R_{-9}^2 - R_{-11}^2) \\ \frac{}{+ a \frac{R'}{R} \Delta^2 R_{-12}^2 - (\Delta R_{-10}^2 + \Delta R_{-12}^2)} = 0,000019\ 954556\ 47, \end{aligned}$$

also

$$R_{-11}^{2'} = 0,187410\ 234358\ 39,$$

und gewiss zu klein der Wert

$$R_{-11}^{2''} = 0,187390\ 279801\ 92.$$

$$\left(\frac{R'^4}{R^4}\right)_{-12} = 98,177243\ 8280,$$

$$\left(a \frac{R'^3}{R^3}\right)_{-12} = -25,975808\ 0078,$$

$$\left(a \frac{R'}{R}\right)_{-12} = -2,618366\ 7974,$$

$$\begin{aligned} \Delta R_{-13}^2 \cdot \frac{\frac{R'^4}{R^4} (R_{-12}^2 - R_{-14}^2) - a \frac{R'^3}{R^3} \Delta R_{-13}^2}{\frac{R'^4}{R^4} (\Delta R_{-13}^2 - \Delta R_{-15}^2) - a \frac{R'^3}{R^3} \Delta^2 R_{-14}^2} \\ + a \frac{R'}{R} \Delta R_{-12}^2 - (R_{-10}^2 - R_{-12}^2) \\ \frac{}{+ a \frac{R'}{R} \Delta^2 R_{-12}^2 - (\Delta R_{-11}^2 - \Delta R_{-13}^2)} = -0,000017\ 208624\ 48, \end{aligned}$$

also

$$R_{-12}^{2'} = 0,187410\ 380978\ 62,$$

und gewiss zu gross der Wert

$$R_{-12}^{2''} = 0,187427\ 589603\ 10.$$

Zweibrücken, 31. Januar 1877.

## III.

## Ueber rationale Dreikante und Tetraeder.

Von

R. Hoppe.

Ein Dreieck heisst rational, wenn die Sinus und Cosinus der 3 Winkel rational sind, eine dreikantige Ecke und ein Tetraeder, wenn es die Sinus und Cosinus aller Seiten- und Flächenwinkel sind. Um die Bedingungen der Rationalität auf die notwendigen einzuschränken, so genügt für das Dreieck die Rationalität der Seiten und des Inhalts, für das Tetraeder die der Kanten, des Seiten- und Körperinhalts, für die Ecke die der Sinus und Cosinus aller Seitenwinkel und die des Sinus eines Flächenwinkels. Auch ist das Tetraeder rational, wenn es die Ecken sind, und zwar ist die Bedingung auf 3 Ecken ausgedehnt schon mehr als hinreichend, auf 2 nicht hinreichend.

## §. 1. Rationale Dreikante.

Betrachten wir zuerst eine dreikantige Ecke. Seien  $a, b, c$  die Tangenten der halben Seitenwinkel, dann ist der Cosinus des Flächenwinkels ( $b, c$ ) ausgedrückt durch

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} - \frac{1-b^2}{1+b^2} \frac{1-c^2}{1+c^2} = \frac{b^2+c^2-a^2(1+b^2c^2)}{2bc(1+a^2)}$$

$$\frac{2b}{1+b^2} \frac{2c}{1+c^2}$$

Dies addirt zu 1 und subtrahirt von 1 giebt die 2 Grössen:

$$\frac{(b+c)^2-a^2(1-bc)^2}{2bc(1+a^2)}, \quad \frac{a^2(1+bc)^2-(b-c)^2}{2bc(1+a^2)}$$



Die Zähler zerfallen wieder rational in die Factoren

$$\left. \begin{aligned} D &= a+b+c-abc \\ A &= -a+b+c+abc \\ B &= a-b+c+abc \\ C &= a+b-c+abc \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

daher ist der Sinus des genannten Flächenwinkels

$$\frac{K}{2bc(1+a^2)} = \frac{\sqrt{ABCD}}{2bc(1+a^2)} \quad (2)$$

und  $\frac{K}{4abc}$  das Sinusverhältniss. Die Ecke ist also rational, wenn  $ABCD$  ein Quadrat ist.

Indem wir Winkel  $> 2R$ , deren Zulassung die Untersuchung nutzlos erschweren würde, von der Betrachtung ausschliessen, haben wir es nur mit positiven  $a, b, c$  zu tun. Dann aber sind auch  $A, B, C, D$ , wie eine leichte Betrachtung ergibt, einzeln positiv.

Damit  $ABCD$  ein Quadrat sei, müssen die Factoren die Form haben

$$A = \alpha_1^2 \alpha \varepsilon \xi; \quad B = \beta_1^2 \beta \xi \delta; \quad C = \gamma_1^2 \gamma \delta \varepsilon; \quad D = \delta_1^2 \alpha \beta \gamma$$

wo sämtliche Buchstaben positive rationale Zahlen bedeuten. Eliminirt man  $\alpha, \alpha, \delta$  und setzt

$$\alpha_1 = \frac{\delta_1 \lambda}{\pi}; \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1 \lambda}{h}; \quad \xi = \gamma x; \quad \varepsilon = \frac{\beta x g h}{\lambda^2}$$

woraus umgekehrt

$$g = \frac{\alpha_1 \gamma_1 \varepsilon}{\beta_1 \delta_1 \beta}; \quad h = \frac{\alpha_1 \beta_1 \xi}{\gamma_1 \delta_1 \gamma}; \quad \pi = \frac{\xi}{\gamma}; \quad \lambda = \frac{\alpha_1 \xi}{\delta_1 \gamma}$$

so behält man noch eine Bedingungsgleichung

$$\frac{1+b^2}{b} \frac{1+h^2}{h} = \frac{1+c^2}{c} \frac{1+g^2}{g} \quad (3)$$

welche offenbar durch 2 analoge ersetzt werden kann,

$$\frac{1+c^2}{c} \frac{1+f^2}{f} = \frac{1+a^2}{a} \frac{1+h^2}{h} \quad (4)$$

$$\frac{1+a^2}{a} \frac{1+g^2}{g} = \frac{1+b^2}{b} \frac{1+f^2}{f} \quad (5)$$

Die directen Beziehungen zwischen den 6 Grössen sind:

$$f = \sqrt{\frac{BC}{AD}}; \quad g = \sqrt{\frac{CA}{BD}}; \quad h = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \quad (6)$$

$$a = \frac{b+c}{1-bc} \frac{1-gh}{1+gh}; \quad b = \frac{c+a}{1-ca} \frac{1-hf}{1+hf}; \quad c = \frac{a+b}{1-ab} \frac{1-fg}{1+fg} \quad (7)$$

und zwar hat man:

$$BC + AD = 4bc(1 + a^2)$$

so dass

$$\frac{2f}{1+f^2} = \frac{\sqrt{ABCD}}{2bc(1+a^2)}$$

den Sinus des Flächenwinkels ( $b, c$ ) darstellt. Demnach sind  $f, g, h$  die Tangenten der halben Flächenwinkel, und die Gl. (3) (4) (5) die Proportionen der Sinus der Seiten- und Flächenwinkel.

Kennt man nun 4 Rationalzahlen  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , welche die Gleichung

$$\frac{1+x_1^2}{x_1} \frac{1+x_4^2}{x_4} = \frac{1+x_2^2}{x_2} \frac{1+x_3^2}{x_3} \quad (8)$$

befriedigen, so kann man zunächst 32 verschiedene rationale Dreikante bilden, indem man  $b, c, g, h$  oder deren Reciproke mit den verschiedenen  $x$  identificirt. Je 4 solcher Dreikante sind jedoch bloss Nebenecken von einander, die sämmtlich von denselben 3 sich schneidenden Ebenen gebildet werden. Die Nebenecken sind dadurch kenntlich, dass von den Grössen  $a, b, c$  eine gemeinsam, die beiden andern reciprok sind. Dieselbe Beziehung findet dann immer entsprechend zwischen  $f, g, h$  statt. Handelt es sich also um Bestimmung von  $b, c, g, h$ , so gehören die 4 Combinationen

$$\left(b, c, g, h\right) \left(\frac{1}{b}, c, \frac{1}{g}, h\right) \left(b, \frac{1}{c}, g, \frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{g}, \frac{1}{h}\right)$$

zu Nebenecken. Schliessen wir die Nebenecken aus, so ergeben sich aus jeder Lösung der Gl. (8), die wir abkürzend

$$(x_1, x_4) = (x_2, x_3) \quad (9)$$

schreiben wollen, 8 wesentlich verschiedene Dreikante. Diese aber liefern, wie weiterhin gezeigt werden soll, neue Lösungen.

Es kam nun darauf an eine Lösung mit kleinst möglichen Primfactoren zu erhalten, um von dieser die unbegrenzten Reihen der daraus abgeleiteten zu beginnen. Ich habe deshalb für die vier  $x$  alle echten Brüche bis zum Nenner 9 durchprobiert. Es fand sich nur ein einziges Wertsystem, das der Gleichung genügte:

$$\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{9}, \frac{2}{5}\right) \quad (10)$$

Hieraus ergeben sich nach (7) (6) die 8 rationalen Dreikante

$a$	$b$	$c$	$f$	$g$	$h$	(11)
$\frac{19}{42}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	
$\frac{21}{22}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	
$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{29}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{3}$	
$\frac{41}{13}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{87}{41}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{3}$	
$\frac{3}{29}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{3}$	
$\frac{87}{41}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{41}{13}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	
$\frac{8}{19}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{19}{42}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{3}{7}$	
$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{21}{22}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{3}{7}$	

und liefern folgende 8 neue Lösungen der Gl. (9): (12)

$$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{19}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{19}{42}\right); \quad \left(\frac{3}{7}, \frac{8}{19}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{19}{42}\right)$$

$$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{11}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{21}{22}\right); \quad \left(\frac{3}{7}, \frac{8}{11}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{21}{22}\right)$$

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{29}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{13}\right); \quad \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{29}\right) = \left(\frac{7}{9}, \frac{1}{13}\right)$$

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{41}{87}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{41}\right); \quad \left(\frac{3}{7}, \frac{41}{87}\right) = \left(\frac{7}{9}, \frac{13}{41}\right)$$

Nach jeder lassen sich 8 Dreikante (ohne Nebenecken) bilden, von denen nur je 2 auf die vorigen zurückkommen, im ganzen also 48 neue. Um die daraus hervorgehenden Lösungen mit den alten übersichtlich zusammenzustellen, wollen wir die Productgleichung (9) in die Proportionsform umsetzen und schreiben:

$$(x_1 : x_2) = (x_3 : x_4) \quad (13)$$

abgekürzt statt

$$\frac{1+x_1^2}{x_1} : \frac{1+x_2^2}{x_2} = \frac{1+x_3^2}{x_3} : \frac{1+x_4^2}{x_4} \quad (14)$$

dann ergeben sich nach zweiter Vervielfältigung der Lösungen folgende 2 Gleichheiten von je 8 und 8 Gleichheiten von je 4 Sinusverhältnissen:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{3}{7} : \frac{7}{9}\right) &= \left(\frac{2}{5} : \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{13} : \frac{3}{29}\right) = \left(\frac{13}{41} : \frac{41}{87}\right) = \left(\frac{7.31}{9.67} : \frac{2.67}{17.2}\right) \\
 &= \left(\frac{10.23}{11.47} : \frac{11.23}{6.47}\right) = \left(\frac{49.17}{33.179} : \frac{99.17}{49.179}\right) = \left(\frac{10.107}{31.163} : \frac{6.163}{31.107}\right) \\
 \left(\frac{3}{7} : \frac{2}{5}\right) &= \left(\frac{7}{9} : \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{19}{42} : \frac{8}{19}\right) = \left(\frac{21}{22} : \frac{8}{11}\right) = \left(\frac{49.73}{93.41} : \frac{70.31}{41.73}\right) \\
 &= \left(\frac{51.23}{343} : \frac{49.17}{10.23}\right) = \left(\frac{7.37}{9.13.79} : \frac{6.13}{37.79}\right) = \left(\frac{91.31}{27.71} : \frac{13.71}{18.31}\right) \\
 \left(\frac{2}{5} : \frac{1}{13}\right) &= \left(\frac{2}{3} : \frac{3}{29}\right) = \left(\frac{8.17}{5.19} : \frac{2}{19}\right) = \left(\frac{8.5}{11.17} : \frac{1}{22}\right) \\
 \left(\frac{2}{5} : \frac{13}{41}\right) &= \left(\frac{2}{3} : \frac{41}{87}\right) = \left(\frac{25.11}{8.37} : \frac{2.11}{41}\right) = \left(\frac{37}{8.25} : \frac{19}{2.41}\right) \\
 \left(\frac{3}{7} : \frac{1}{13}\right) &= \left(\frac{7}{9} : \frac{3}{29}\right) = \left(\frac{15.7}{11.17} : \frac{1}{11}\right) = \left(\frac{5.19}{21.17} : \frac{1}{19}\right) \\
 \left(\frac{3}{7} : \frac{13}{41}\right) &= \left(\frac{7}{9} : \frac{41}{87}\right) = \left(\frac{3.25.7}{19.37} : \frac{19}{41}\right) = \left(\frac{25.11}{21.37} : \frac{11}{41}\right) \\
 \left(\frac{7}{9} : \frac{19}{42}\right) &= \left(\frac{2}{3} : \frac{8}{19}\right) = \left(\frac{3.25}{17.41} : \frac{41}{26.29}\right) = \left(\frac{25}{3.17} : \frac{13}{2.19}\right) \\
 \left(\frac{7}{9} : \frac{21}{22}\right) &= \left(\frac{2}{3} : \frac{8}{11}\right) = \left(\frac{3.37}{5.41} : \frac{2.41}{11.13}\right) = \left(\frac{3.5}{37} : \frac{11}{2.13}\right) \\
 \left(\frac{3}{7} : \frac{19}{42}\right) &= \left(\frac{2}{5} : \frac{8}{19}\right) = \left(\frac{17}{25} : \frac{29}{2.19}\right) = \left(\frac{25}{17.41} : \frac{41}{2.29}\right) \\
 \left(\frac{3}{7} : \frac{21}{22}\right) &= \left(\frac{2}{5} : \frac{8}{11}\right) = \left(\frac{37}{5.41} : \frac{2.41}{11.29}\right) = \left(\frac{5}{37} : \frac{11}{2.29}\right)
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Jede der ersteren repräsentirt 28, jede der letzteren 6 Gleichungen; unter diesen 104 Gleichungen sind 9 identisch mit vorausgehenden. Daher hat man im ganzen 95 verschiedene Lösungen.

Um das Gesetz der Vervielfältigung wenigstens recurrirend anzugeben, sind noch die  $f$  rational in den  $b, c, g, h$  darzustellen. Eliminirt man  $a$  zwischen den 2 ersten Gl. (7) und entwickelt daraus  $f$ , so findet man mit Anwendung der Gl. (3):

$$f = \frac{1+gh}{g-h} \frac{b-c}{b+c} \tag{16}$$

Durch (7) ist  $a$  bekannt, und die abgeleitete Lösung

$$(b:g) = (c:h) = (a:f)$$

lautet nun in dem System der  $x$  als Grundlösung ausgedrückt:

$$(x_1:x_2) = (x_3:x_4) = \left( \frac{x_1+x_3}{1-x_1x_3} \frac{1-x_2x_4}{1+x_2x_4} : \frac{x_1+x_3}{x_1-x_3} \frac{x_2-x_4}{1+x_2x_4} \right)$$

Die Vervielfältigung bei jeder successiven Ableitung beruht dann auf 2 Operationen, erstlich der Umkehrung eines der 4 Brüche  $x$ , zweitens der Vertauschung der Mittelglieder der Proportion, woraus:

$$(x_1:x_2) = (x_3:x_4) = \left( \frac{x_1+x_3}{1-x_1x_3} \frac{x_2-x_4}{x_2+x_4} : \frac{x_1+x_3}{x_1-x_3} \frac{1-x_2x_4}{x_2+x_4} \right)$$

$$(x_1:x_3) = (x_2:x_4) = \left( \frac{x_1+x_3}{1-x_1x_3} \frac{1-x_2x_4}{1+x_2x_4} : \frac{x_1+x_3}{x_1-x_3} \frac{x_2-x_4}{1+x_2x_4} \right)$$

Gl. (16) zeigt, dass gleichschenklige Dreikante eine Ausnahme bilden. Setzt man in (1)  $b = c$ , so wird  $B = C$ , also braucht man bloss

$$AD = \{2b + a(1-b^2)\} \{2b - a(1-b^2)\}$$

zum Quadrat zu machen, indem man setzt

$$\left. \begin{aligned} 2b + a(1-b^2) &= \alpha^2\gamma \\ 2b - a(1-b^2) &= \beta^2\gamma \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

woraus nach Elimination von  $\gamma$ :

$$a = \frac{2b}{1-b^2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

oder einfacher:

$$a = \frac{2b}{1-b^2} \frac{1-n^2}{1+n^2} \quad (19)$$

Dies eingeführt in (1) (2) giebt das Sinusverhältniss:

$$\frac{K}{4abc} = \frac{1+b^2}{b} \frac{n}{1+n^2}$$

folglich ist  $\frac{2n}{1+n^2}$  der Sinus der zwei gleichen Flächenwinkel, und  $n$  hat die Bedeutung von  $g = h$ . Den Wert von  $f$  zur Bestimmung des dritten Flächenwinkels erhält man am leichtesten aus (6), nämlich

$$f = \frac{2n}{1-n^2} \frac{1-b^2}{1+b^2} \quad (20)$$

Offenbar lassen sich  $a$  und  $f$  mit ihren Reciproken vertauschen. Demnach findet man immer ein und nur ein rationales gleichschen-

liges Dreikant, wenn man die Tangenten der halben gleichen Seiten- und Flächenwinkel beliebig rational macht (die Nebenecke ungerechnet).

Diesem Falle steht derjenige zur Seite, wo sich 2 Seiten- oder 2 Flächenwinkel zu 2 Rechten ergänzen, was immer gleichzeitig stattfindet, weil ihre Sinus zugleich gleich werden. Hier verschwindet im Ausdruck (7) von  $\alpha$  Zähler und Nenner. Man findet:

$$A = D = \frac{1+b^2}{b}; \quad B = 2a + \frac{1-b^2}{b}; \quad C = 2a - \frac{1-b^2}{b}$$

und hat  $BC$  zum Quadrat zu machen, was bei der Substitution (18) auf  $B, C$  angewandt zu folgendem Werte führt:

$$\alpha = \frac{1-b^2}{2b} \frac{1+n^2}{1-n^2} \quad (21)$$

Ebenso ergibt sich

$$f = \frac{1+b^2}{1-b^2} \frac{1-n^2}{2n} \quad (22)$$

und der resultirende Satz gilt auch für solche Dreikante.

## §. 2. Rationale Tetraeder.

Geht man zur Darstellung rationaler Tetraeder von den Ecken aus, so kann man zunächst 2 Ecken rational wählen, die nur einen Flächenwinkel gemein haben müssen, im übrigen innerhalb gewisser Grenzen beliebig sein können, Grenzen die durch die notwendige Convergenz der Kanten auferlegt werden. Sind nämlich von den 4 Ecken  $A, A', B, C$  die beiden ersten bestimmt durch die Werte  $a, b, c$  und  $a', b', c'$  im Sinne von §. 1., so dass  $b, b'$  der Seite  $ABA'$ ,  $c, c'$  der Seite  $ACA'$  zugehören, so ist  $f = f'$ , und, damit  $AB$  mit  $A'B$ ,  $AC$  mit  $A'C$  convergirt,

$$bb' < 1; \quad cc' < 1$$

Ist dem genügt, so lässt sich bemerken, dass der Inhalt des Tetraeders, gemessen nach der Kante  $AA' = k$ , schon rational ist; denn die Dreiecke  $(ABA')$  und  $(ACA')$  sind rational, und das Tetraeder

$$T = \frac{(ABA') \cdot (ACA')}{6k} \sin(AA')$$

Gleichwol ist die sechste Kante  $BC$  noch nicht als rational bestimmt, und von den anliegenden Seitenwinkeln sind es nur die Tangenten. Es bleibt also noch eine Grösse, etwa  $BC$  rational zu machen. Die Bedingung ist dann, dass

$$\left. \begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos BAC \\ &= A'B^2 + A'C^2 - 2A'B \cdot A'C \cos BA'C \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ein Quadrat wird. Da beide Ausdrücke von Natur identisch sind, so muss sich die Bedingung symmetrisch in den mit gleichen Buchstaben bezeichneten Grössen darstellen lassen.

Man hat:

$$\begin{aligned}\sin ABA' &= \sin(A'AB + AA'B) = \frac{2b(1-b'^2) + 2b'(1-b^2)}{(1+b^2)(1+b'^2)} \\ &= \frac{2(b+b')(1-bb')}{(1+b^2)(1+b'^2)}\end{aligned}$$

$$\sin AA'B = \frac{2b'}{1+b'^2} = \frac{(b+b')(1+bb') - (b-b')(1-bb')}{(1+b^2)(1+b'^2)}$$

daher

$$AB = k \frac{\sin AA'B}{\sin ABA'} = \frac{k}{2} \left( \frac{1+bb'}{1-bb'} - \frac{b-b'}{b+b'} \right)$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$b_1 = \frac{1+bb'}{1-bb'}; \quad b_2 = \frac{b-b'}{b+b'}; \quad c_1 = \frac{1+cc'}{1-cc'}; \quad c_2 = \frac{c-c'}{c+c'}$$

so wird

$$\left. \begin{aligned}AB &= k \frac{b_1 - b_2}{2}; & AC &= k \frac{c_1 - c_2}{2} \\ A'B &= k \frac{b_1 + b_2}{2}; & A'C &= k \frac{c_1 + c_2}{2}\end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Ferner ist, wenn man

$$n = \cos(AA') = \frac{1-f^2}{1+f^2}$$

setzt,

$$\begin{aligned}\cos BAC &= \cos A'AB \cos A'AC + n \sin A'AB \sin A'AC \\ &= \frac{(1-b^2)(1-c^2) + 4nbc}{(1+b^2)(1+c^2)} \\ &= \frac{\{(b+b')(1-bb') - (b-b')(1+bb')\} \times}{\{(b+b')(1+bb') - (b-b')(1-bb')\} \times} \\ &\quad \frac{\{(c+c')(1-cc') - (c-c')(1+cc')\} + 16nbc'b'}{\{(c+c')(1+cc') - (c-c')(1-cc')\}} \\ &= \frac{(1-b_1b_2)(1-c_1c_2) + m}{(b_1-b_2)(c_1-c_2)}\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$m = \frac{16nbc'b'}{(1-bb')(1-cc')(b+b')(c+c')}$$

Dies nebst (24) eingeführt in (23) giebt:

$$4BC^2 = (b_1 \mp b_2)^2 + (c_1 \mp c_2)^2 - 2(1 \mp b_1 b_2)(1 \mp c_1 c_2) - 2m$$

Die Doppelzeichen, entsprechend den 2 Ausdrücken in (23), heben sich nach Entwicklung, und man erhält:

$$4l^2 = 4BC^2 = b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 - 2 - 2b_1 b_2 c_1 c_2 - 2m$$

oder:

(25)

$$4l^2 = \left(\frac{1+bb'}{1-bb'}\right)^2 + \left(\frac{b-b'}{b+b'}\right)^2 + \left(\frac{1+cc'}{1-cc'}\right)^2 + \left(\frac{c-c'}{c+c'}\right)^2 - 2$$

$$- 2 \frac{(1+bb')(b-b')(1+cc')(c-c') + 16bb'cc' \frac{1-f^2}{1+f^2}}{(1-bb')(b+b')(1-cc')(c+c')}$$

Die Bedingung ist nun, dass  $b, c, f$  und  $b', c', f'$  zwei rationalen Ecken entsprechen, und den letzten Ausdruck zum Quadrat machen, überdies dass

$$bb' < 1; \quad cc' < 1$$

sei. Die letzte Bedingung lässt sich immer dadurch erfüllen, dass man, wenn  $bb' > 1$ ;  $cc' > 1$  wird, für  $b, c$  oder für  $b', c'$  oder für alle 4 Grössen die reciproken Werte setzt, wenn dagegen  $bb' > 1$ ;  $cc' < 1$  oder  $bb' < 1$ ;  $cc' > 1$  ist, beziehungsweise mit  $b, b', f$  oder mit  $c, c', f$  dasselbe tut, wenn endlich  $bb'$  oder  $cc'$  beide  $= 1$  werden, die Umkehrung mit dem grössten der reciproken Brüche vornimmt.

Um einzelne Lösungen zu finden, kann man die im vorigen gefundenen rationalen Ecken zu Grunde legen. Für  $f$  ist eine beliebige Lösung der Gl. (8) zu setzen; zu jedem  $f$  gehören unendlich viele  $b$ , zu jeder Combination  $f, b$  vier Werte von  $c$ . Sei z. B.  $f = \frac{3}{8}$ ; dann hat man:

$$b = \begin{matrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{13} & \frac{13}{41} & \frac{22}{21} & \frac{42}{19} \dots \end{matrix} \quad (26)$$

$$c = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{13} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \dots \\ \frac{13}{31} & \frac{2}{19} & \frac{22}{41} & \frac{26}{11} & \frac{38}{13} \dots \\ \frac{22}{21} & 22 & \frac{82}{19} & \frac{82}{143} & \frac{26 \cdot 19}{41} \dots \\ \frac{42}{19} & \frac{9 \cdot 67}{7 \cdot 31} & \frac{33 \cdot 179}{49 \cdot 17} & \frac{51 \cdot 23}{7^3} & \frac{49 \cdot 73}{93 \cdot 41} \dots \end{matrix} \right.$$

Die Werte der  $b, c$  sind dann aus einer, die der  $b', c'$  aus derselben oder einer andern Verticalreihe zu entnehmen, dann für die übrigen



Werte von  $f$  die entsprechenden Tabellen zu construiren und mit ihnen ebenso zu verfahren. Die Versuchsrechnung kürzt sich einigermaßen dadurch, dass man alle Wertsysteme verwerfen kann, bei denen nicht jeder einzelnstehende Primfactor des Zählers von  $1+f^2$  in Zähler oder Nenner von  $bb'cc'$  oder im Nenner von  $(1-bb')(b+b') \times (1-cc')(c+c')$  enthalten ist.

Von den rationalen gleichschenkligen Dreikanten lässt sich verschiedene Anwendung auf die Tetraeder machen, indem man zum gemeinsamen Flächenwinkel einen der zwei gleichen oder den ungleichen wählt.

Ist der gemeinsame Flächenwinkel in beiden Ecken der ungleiche, so ist nach (20) die Bedingung zu erfüllen:

$$f = \frac{1-b^2}{1+b^2} \frac{2g}{1-g^2} = \frac{1-b'^2}{1+b'^2} \frac{2g'}{1-g'^2}$$

Diese Gleichung ist nicht allgemein löslich, doch bietet sich die besondere Lösung

$$b = b'; \quad g = g'$$

dar. Setzt man demgemäss in Gl. (25)  $b = c = b' = c'$ , so kommt:

$$f^2 = \left( \frac{2bf}{1-b^2} \right)^2 \frac{1}{1+f^2}$$

und man hat bloss  $1+f^2$  zum Quadrat zu machen. Hiernach muss  $f$  die Form haben

$$f = \frac{2n}{1-n^2}$$

und die Bedingungsgleichung wird

$$\frac{n-g}{n+g} \frac{1+gn}{1-gn} = b^2$$

Es sind also 4 Zahlen zu finden, die in der reciproken Beziehung stehen:

$$\frac{1-\frac{g}{n}}{1+\frac{g}{n}} = \frac{g'}{n'}; \quad \frac{1-gn}{1+gn} = \frac{g'n'}{n'}$$

Sei zweitens der gemeinsame Flächenwinkel der ungleiche in der einen, der gleiche in der andern Ecke. Dann ist

$$f = \frac{1-b^2}{1+b^2} \frac{2g}{1-g^2}; \quad c' = \frac{2b'}{1-b'^2} \frac{1-f^2}{1+f^2}; \quad c = b$$

und Gl. (25) ist nach Einsetzung der Werte von  $c$ ,  $c'$  und  $f$  durch beliebige  $b$ ,  $b'$ ,  $g$  zu erfüllen.

Nimmt man von beiden Ecken einen der gleichen Flächenwinkel zum gemeinsamen, so können die ungleichen Seitenwinkel beider Ecken noch entweder auf derselben oder auf verschiedener Seite liegen. Im erstern Falle ist

$$c = \frac{2b}{1-b^2} \frac{1-f^2}{1+f^2}; \quad c' = \frac{2b'}{1-b'^2} \frac{1-f^2}{1+f^2}$$

im letztern

$$c = \frac{2b}{1-b^2} \frac{1-f^2}{1+f^2}; \quad b' = \frac{2c'}{1-c'^2} \frac{1-f^2}{1+f^2}$$

Es bleiben dann nach Einführung bzhw.  $b, b', f$  oder  $b, c', f$  beliebig.

Statt der gleichschenkligen Ecken kann man auch solche nehmen, in denen 2 Flächenwinkel sich zu 2 Rechten ergänzen. Hier gehen nur einige Grössen in die reciproken Werte über.

Ferner kann man eine gleichschenklige Ecke mit einer rationalen aus der Tabelle combiniren.

Zum Schluss wollen wir noch die einfachere Aufgabe betrachten, ein rationales Tetraeder von congruenten Seiten darzustellen. Da hier auch die Ecken congruent sind, so ist das Tetraeder rational, wenn eine Ecke es ist. Nun sind aber die Seitenwinkel jeder Ecke einzeln gleich den Winkeln jeder Seite, mithin an die Bedingung gebunden, dass ihre Summe = 2 Rechten sei. Geht man hiervon aus und bezeichnet durch  $\alpha, \beta, \gamma$  die 3 Seitenwinkel, so wird der Cosinus des Gegenwinkels von  $\alpha$

$$= -\frac{\cos(\beta + \gamma) + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} = 1 - 2 \cot \beta \cot \gamma$$

also der Sinus

$$= 2 \sqrt{\cot \beta \cot \gamma (1 - \cot \beta \cot \gamma)} = \frac{2 \sqrt{\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - 1}}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}$$

Die Bedingung ist dann, dass  $\operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} \gamma$  von der Form

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2b}{1-b^2}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2c}{1-c^2}$$

und dass  $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - 1$  ein Quadrat sei; dies giebt die Gleichung:

$$(1-b^2)(1-c^2)(b+c+1-bc)(b+c-1+bc) = k^2 \quad (27)$$

Die Aufsuchung der Lösungen wird durch folgende Bemerkung sehr abgekürzt. Der Nenner des reducirten Bruchs  $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$  muss als Quadrat alle Primfactoren, der Zähler, weil von der Form  $m^2 + n^2$ , alle Primfactoren  $4k-1$  in gerader Potenz enthalten; folglich müssen  $\operatorname{tg} \beta$  und  $\operatorname{tg} \gamma$  überhaupt dieselben Primfactoren  $4k-1$  in ungerader

Potenz haben. Man theile also die Werte von  $\operatorname{tg} \beta$ , tabellarisch entwickelt, zuerst in Classen je nach den Primfactoren  $4k-1$ , ordne die unechten Brüche jeder Classe nach Umkehrung aller echten nach ihrer Grösse, und combinire innerhalb jeder Classe nur solche Brüche, dass im Nenner des Products auch die Primfactoren  $4k+1$  in gerader Potenz erscheinen, wobei noch zu beachten, dass jeder Bruch mit den vorhergehenden und mit deren reciproken Werten zu combiniren, nie aber der grössere beider Brüche umzukehren ist, damit das Product  $> 1$  wird.

Bei einem Umfang der Tabelle, wo Zähler und Nenner von  $\beta$  die Zahl 20 nicht überschreiten, finden sich auf diesem Wege folgende 8 Lösungen:

$$\begin{aligned} \frac{15^2-2^2}{2 \cdot 2 \cdot 15} \frac{5^2-1}{2 \cdot 5} - 1 &= \left(\frac{14}{5}\right)^2; & \frac{10^2-3^2}{2 \cdot 3 \cdot 10} \frac{7^2-3^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} - 1 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \frac{6^2-1}{2 \cdot 6} \frac{7^2-3^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} - 1 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2; & \frac{6^2-1}{2 \cdot 6} \frac{10^2-7^2}{2 \cdot 7 \cdot 10} - 1 &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ \frac{7^2-1}{2 \cdot 7} \frac{6^2-1}{2 \cdot 6} - 1 &= 3^2; & \frac{14^2-3^2}{2 \cdot 3 \cdot 14} \frac{11^2-3^2}{2 \cdot 3 \cdot 11} - 1 &= \left(\frac{5}{3}\right)^2 \\ \frac{33^2-7^2}{2 \cdot 7 \cdot 33} \frac{16^2-5^2}{2 \cdot 5 \cdot 16} - 1 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2; & \frac{33^2-7^2}{2 \cdot 7 \cdot 33} \frac{7^2-4^2}{2 \cdot 4 \cdot 7} - 1 &= \left(\frac{4}{7}\right)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Aus den hier aufgeführten Tangenten der Seitenwinkel kann man leicht Sinus und Cosinus derselben und dann den Sinus des dritten ableiten. Die 3 Sinus ergeben dann die Verhältnisszahlen der Kanten. So erhält man 8 rationale Tetraeder mit congruenten Seiten, deren 3 ungleiche Kanten sich (in gleicher Reihenfolge) verhalten wie die ganzen Zahlen

$$\begin{aligned} 25.73 : 13^2.17 : 12.229; & \quad 51.61 : 91.29 : 20.109 \\ 15.13 : 7.29 : 4.37; & \quad 104.53 : 35.149 : 51.37 \\ 13.41 : 24.37 : 5^2.7; & \quad 75.29 : 143.17 : 56.41 \\ 17.29.277 : 520.281 : 231.569; & \quad 7.29.181 : 200.13^2 : 33.569 \end{aligned} \quad (29)$$

Durch Vertauschung der Kanten würden sich noch 16 Lösungen für Gl. (27) ergeben.

Die Ecken dieser 8 Tetraeder vermehren die in §. 1. aufgestellten rationalen Dreikante. Indem wir dieselben, wie dort, durch die Tangenten der halben Seiten- und Flächenwinkel  $a, b, c, f, g, h$  bestimmen, entnehmen wir die Werte von  $b$  und  $c$  aus den Gl. (28). Hier finden sich die Factoren des Minuends der linken Seite in der Form geschrieben

$$\frac{b'^2 - b''^2}{2b'b''} = \operatorname{tg} \beta$$

woraus dann fließt:

$$b = \frac{b' - b''}{b' + b''}; \quad a = \frac{1 - bc}{b + c}$$

Aus  $a, b, c$  hat man dann nach (1) zu bilden  $A, B, C, D$ , und erhält nach (6) die Werte der  $f, g, h$ . So ergibt sich die folgende Tabelle.

$a$	$b$	$c$	$f$	$g$	$h$	(30)
$\frac{25}{73}$	$\frac{13}{17}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{168}{229}$	
$\frac{51}{61}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{14}{29}$	$\frac{40}{109}$	
$\frac{25}{39}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{28}{29}$	$\frac{16}{37}$	
$\frac{52}{53}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{4}{149}$	$\frac{35}{149}$	$\frac{3}{37}$	
$\frac{13}{41}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{36}{37}$	$\frac{21}{25}$	
$\frac{15}{29}$	$\frac{11}{17}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{28}{41}$	
$\frac{277}{17 \cdot 29}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{240}{281}$	$\frac{693}{2 \cdot 569}$	
$\frac{181}{7 \cdot 29}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{32}{65}$	$\frac{132}{569}$	

Jedes dieser 8 Wertsysteme lässt sich als neue Grundlösung der Gl. (14) betrachten, und daraus nach den Formeln (17) u. f. unbegrenzte Mengen von Lösungen ableiten.

In den Tabellen (15) und (30) kommen die 3 Brüche

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{13}{41}$$

gemeinsam vor. Man kann daher die Vorbedingung der Aufgabe beliebige rationale Tetraeder darzustellen  $f = f'$  auch dadurch erfüllen, dass man für  $f$  je einen der 3 Werte wählt und die  $b, c$  aus der einen, die  $b', c'$  aus der andern Tabelle entnimmt.

## IV.

Ueber ein einfaches Winkelmessinstrument zum  
Gebrauche für die Schule.

Von

**F. W. Fischer.**

Beim Unterrichte in der Trigonometrie scheint es nicht weniger belehrend als anregend zu sein, durch ausgeführte Messungen von Höhen, Entfernungen oder Flächen den Schülern die Anwendung der trigonometrischen Sätze in der Praxis zu zeigen. Das Verständniss und die klare Auffassung der betreffenden Sätze wird einerseits dadurch befestigt und belebt, andererseits aber wird der Schüler aufmerksam gemacht und darauf hingelenkt, wie die Resultate der Wissenschaft auch für das praktische Leben verwertet werden. Auch hat die Erklärung der Messinstrumente etwas Lehrreiches, was namentlich noch für den Unterricht in der Physik nicht zu unterschätzen ist.

Wenngleich jedoch der Nutzen solcher Messungen wol von den meisten anerkannt werden mag, unterbleibt doch deren Ausführung nicht selten, weil dem Lehrer keine geeigneten Apparate zur Verfügung stehen. Einfachere Messapparate sind in den Handlungen, welche mathematische und physikalische Instrumente führen, wenig anzutreffen und feinere für ein mittleres physikalisches Cabinet anzuschaffen, wäre in der Tat nicht zu billigen, da sie zu wenig zur Verwendung kommen können. Auch erfordern feinere Instrumente einige Umständlichkeit in der Behandlung, die oft nur wenige Zuhörer die eigentliche Einrichtung des Messapparates und die ganze Art der Messung überhaupt deutlich erkennen lässt. Dazu kommt, dass eine auch weniger genau, d. h. bis zu einer gewissen Fehlergrenze ausgeführte Messung, wenn dabei die Theorie derselben genau

und bestimmt erklärt werden kann, gewiss denselben Vorteil für den Zuhörer hat, als eine mit grosser Genauigkeit gemachte, welcher vielleicht eine nicht so deutliche theoretische Erklärung gegeben wird.

Im Folgenden möchte ich nun ein einfaches Instrument zur Messung von Winkeln, wie ich es vor einigen Jahren zu eigenem Gebrauche für den Unterricht angefertigt habe, vorführen, welches mir bei der Anstellung von Messungsversuchen ausreichende Dienste leistete.

Ein starker Dreifuss von Eichenholz trägt einen geraden, unten drehrunden, nach oben hin vierkantigen Ständer, welcher bis zu 5<sup>cm</sup> dick und 1,11<sup>m</sup> lang ist, so dass das ganze Gestell ungefähr eine Höhe von 1,42<sup>m</sup> hat. Der obere Teil des Ständers von etwa 32<sup>cm</sup> Länge ist um einen im unteren Teile befestigten Zapfen um seine Längsaxe drehbar und kann durch eine gegen den Zapfen wirkende (eiserne) Druckschraube, welche der Festigkeit wegen in einem um den Ständer gelegten etwa zwei Centimeter breiten, eisernen Bande geht, in jeder Stellung arretirt werden. Der obere Teil trägt weiter eine kreisrunde etwa 62<sup>cm</sup> im Durchmesser haltende Scheibe von dickem Pappendeckel oder dünnem Holze, welche durch ein Charniergelenk so mit demselben verbunden ist, dass dieses, in der Mitte der Scheibe senkrecht zu dieser befestigt, in verticaler Ebene um jenen sich drehen und auch durch eine Druckschraube in jeder durch die Drehung möglichen Stellung gehalten werden kann. Figur 1) stellt eine Seitenansicht des ganzen Instrumentes dar, welche die Beschaffenheit desselben und die Zusammensetzung der einzelnen Teile erkennen lässt. Wenn der obere Teil des Instrumentes aus einander genommen ist, so gibt Figur 2) noch besonders die Seitenansicht eines verticalen Durchschnittes der Kreisscheibe und des damit fest verbundenen Gelenkes, so wie des oberen, eingeschnittenen Theiles des Ständers.

Bei der angegebenen Einrichtung kann die Ebene der Scheibe in die Horizontale und in jede beliebige Lage gegen die Horizontale gebracht werden. An dem Rande der Scheibe ist eine Einteilung von ganzen Graden gemacht und zwar ist bei senkrechter Stellung der Ebene der Scheibe die Linie, welche die beiden Nullpunkte verbindet, (möglichst) horizontal. Ueber dieser Theilung bewegt sich ein in der Mitte der Scheibe drehbar befestigter hölzerner Zeiger, welcher ein Diopter trägt und wegen der Reibung an seinem Drehpunkte sich auf jeden Teilstrich einstellen lässt. Der Zeiger ist aus zwei dünnen, auf einander geleimten Leisten von trockenem Apfelbaumholz gefertigt, um ihm möglichst die Zugkraft des Holzes zu nehmen. Um eine genaue Einteilung des Randes der Scheibe zu erhalten, kann man denselben, nachdem er durch die Peripherie eines auf der Scheibe

verzeichneten, mit ihr concentrischen Kreises, genau markirt ist, zunächst in vier genau gleiche Teile und jeden derselben wieder in drei gleiche Teile einteilen. Einen solchen Bogen von  $30^\circ$  teilt man nun nochmals in drei gleiche Teile und trägt den erhaltenen Teil von  $10^\circ$  auf Zeichenpapier genau auf. Nachdem man nun diesen Bogenteil von  $10^\circ$  in zehn gleiche Teile geteilt hat, führt man diese Bogenteilung längs der Peripherie der Scheibe (oder des darauf verzeichneten, mit der Scheibe concentrischen Kreises) und markirt die einzelne Grade angehenden Teilstriche auf dem Rande. Die Teilung lässt sich bei einiger Uebung in dieser Weise ziemlich genau ausführen und macht es möglich, (wenn man den Fehler wegen der Excentricität des Drehpunktes des Zeigers eliminirt) einen Winkel bis auf 12 Minuten genau zu bestimmen. Will man eine genauere Bestimmung bis etwa auf 6 Minuten oder weniger, so lassen sich dafür füglich Nonien an dem Zeiger anbringen, die denn zugleich auch zur Erklärung der Vorrichtung des Nonius dienen könnten.

Um die horizontale Stellung des Zeigers und seine verticale Drehungsebene zu bestimmen, dient eine gewöhnliche kleine Bleilotwage, welche an dem Ständer des Instrumentes (s. d. Fig.) schicklich ihren Aufbewahrungsplatz finden kann.

Was die mittelst des beschriebenen Instrumentes, dessen Gebrauch und Anwendung für sich ersichtlich ist, zu erlangenden Resultate angeht, so sind dieselben für ihren Zweck hinreichend genau. Messungen, welche neben der Bestimmung einer Seite blos die eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck erfordern, wie die Messung der Höhe eines Gegenstandes, können, wenn man diesen Winkel in der Gegend von  $40^\circ$  bis  $50^\circ$  nimmt, wie man leicht sieht, keinen Fehler gleich 0,01 der gemessenen Seite ergeben, welcher in dem gemessenen Winkel allein seinen Grund hätte; da ja in diesem Falle die gefundenen Seiten proportional sind den Tangenten der Gegenwinkel, und diese Tangenten in der Gegend von  $40^\circ$  bis  $50^\circ$  von 12 zu 12 Minuten nur um ungefähr 0,007 wachsen. Um überhaupt die mögliche Genauigkeit von Messungen, bei welchen nicht allein die durch die Winkelmessung, sondern auch die aus den Längen gemessener Linien entstehenden Fehler berücksichtigt werden, näher zu betrachten, möge noch eine betreffende elementare Entwicklung hier Platz haben.

Es seien  $a, b, c$  die durch Messung gefundenen Seiten eines Dreiecks,  $A, B, C$  die denselben bezüglich gegenüberliegenden Winkel. Ferner seien  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  und  $\Delta A, \Delta B, \Delta C$  Grössen, in welche die Seiten, bezüglich die Winkel sich verändern können und zwar so, dass von drei bestimmenden Stücken die drei übrigen abhängig sind. Letztere Grössen, welche selbstverständlich ihre Kleinheitsgrenze haben,

können denn die Werte angeben, um welche die gemessenen Stücke eines Dreiecks und die daraus gefundenen zu klein oder zu gross sind, jenachdem diese Grössen einen positiven oder negativen Wert haben. Die wahren Werte der Seiten des Dreiecks sind dann

$$a + \Delta a, \quad b + \Delta b, \quad c + \Delta c$$

und die der Winkel

$$A + \Delta A, \quad B + \Delta B, \quad C + \Delta C$$

und man hat, um aus der Aenderung dreier bestimmender Stücke die übrigen zu finden, in die trigonometrischen Formeln für die Auflösung eines Dreiecks statt obiger, letztere Werte einzusetzen. Unter Annahme gewisser Voraussetzungen, welche im Verfolge angegeben werden, lässt sich dann die Aenderung eines Stückes und das Verhältniss der Aenderung eines Linienstückes zu seinem ursprünglichen  $\frac{\Delta a}{a}, \frac{\Delta b}{b}, \frac{\Delta c}{c}$  aus gegebenen Stücken leicht elementar herleiten.

I. Gemessen sei von einem Dreieck eine Seite  $a$  und die beiden daranliegenden Winkel  $B, C$ ; zu bestimmen  $\frac{\Delta b}{b}, \frac{\Delta c}{c}$  und  $\Delta A$ . Setzt man in die bekannte Formel  $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ , für  $b, a, B, A$  an die Stelle die Werte  $b + \Delta b, a + \Delta a, B + \Delta B, A + \Delta A$ , so wird

$$\frac{b + \Delta b}{a + \Delta a} = \frac{\sin(B + \Delta B)}{\sin(A + \Delta A)} = \frac{\sin B \cdot \cos \Delta B + \cos B \cdot \sin \Delta B}{\sin A \cdot \cos \Delta A + \cos A \cdot \sin \Delta A}.$$

Wird nun angenommen, dass  $\Delta A$  und auch  $\Delta B \leq 12'$  (wie es oben der Fall war), so ist

$$\cos \Delta B = 0,99999$$

oder (bis auf mehr als drei Decimalen genau)

$$\cos \Delta B = 1$$

und

$$\sin \Delta A$$

und ebenso

$$\sin \Delta B = 0,00349 = \text{arc} \Delta B.$$

Hiernach wird nun, unter  $\Delta A$  und  $\Delta B$  die in Teilen des Radius = 1 ausgedrückten, den Winkeln  $\Delta A$  und  $\Delta B$  zugehörigen Bogen verstanden,

$$\frac{b + \Delta b}{a + \Delta a} = \frac{\sin B + \cos B \cdot \Delta B}{\sin A + \cos A \cdot \Delta A}$$

oder



$$b \cdot \sin A + b \cdot \cos A \cdot \Delta A + \sin A \cdot \Delta b + \cos A \cdot \Delta A \Delta b \\ = a \cdot \sin B + a \cdot \cos B \Delta B + \sin B \Delta a + \cos B \Delta B \cdot \Delta a.$$

Da die Grössen mit  $\Delta$  die Grenzen angeben, unter welchen eine Grösse keinen Einfluss auf die Rechnung hat, so ist das Product zweier solcher Grössen für dieselbe ohne Einfluss und es kann daher  $\cos A \cdot \Delta A \cdot \Delta b$  und  $\cos B \cdot \Delta B \cdot \Delta a$  weglassen. Dann ist, weil noch

$$b \cdot \sin A = a \cdot \sin B,$$

$$(\text{X}) \quad b \cdot \cos A \cdot \Delta A + \sin A \Delta b = a \cdot \cos B \Delta B + \sin B \Delta a$$

und, wenn man die letzte Gleichung durch die vorletzte dividirt,

$$\cotg A \Delta A + \frac{\Delta b}{b} = \cotg B \Delta B + \frac{\Delta a}{a};$$

also

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \cotg B \cdot \Delta B - \cotg A \cdot \Delta A.$$

Da noch

$$\Delta A + \Delta B + \Delta C = 0$$

oder

$$\Delta A = -\Delta B - \Delta C,$$

so wird

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \cotg B \Delta B + \cotg A \Delta B + \cotg A \Delta C$$

oder

$$1) \quad \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + [\cotg B - \cotg(B+C)] \Delta B - \cotg(B+C) \Delta C.$$

Aehnlich findet sich

$$2) \quad \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + [\cotg C - \cotg(B+C)] \Delta C - \cotg(B+C) \Delta B$$

und für  $\Delta A$  hat man noch

$$3) \quad \Delta A = -(\Delta B + \Delta C).$$

Für den Fall, dass gegeben ist  $C = \frac{\pi}{2}$ , wird  $\Delta C = 0$  und daher aus Gl. 1)

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \left[ \cotg B - \cotg \left( B + \frac{\pi}{2} \right) \right] \Delta B$$

oder

$$4) \quad \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{2\Delta B}{\sin 2B}.$$

Ebenso ist für diesen Fall aus Gl. 2)

$$5) \quad \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \operatorname{tg} B \cdot \Delta B.$$

Zu bemerken ist noch, dass in Gl. 4)  $\frac{\Delta b}{b}$  ein Minimum wird, wenn  $\sin 2B$  ein Maximum, d. h. wenn  $B = \frac{\pi}{4}$  ist.

II. Von einem Dreieck seien gemessen zwei Seiten  $b$  und  $c$  und der eingeschlossene Winkel  $A$ ; zu bestimmen  $\frac{\Delta a}{a}$ ,  $\Delta B$  und  $\Delta C$ . Setzt man in die Formel  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ , für  $a$ ,  $a + \Delta a$ , für  $b$ ,  $b + \Delta b$  u. s. w., so wird

$$(a + \Delta a)^2 = (b + \Delta b)^2 + (c + \Delta c)^2 - 2(b + \Delta b)(c + \Delta c) \cdot \cos(A + \Delta A).$$

Wenn man die einzelnen Glieder dieser Gleichung entwickelt und das vorhin über die Grössen mit  $\Delta$  Bemerkte berücksichtigt, erhält man nach gehöriger Reduction

$$(8) \quad a\Delta a = b\Delta b + c\Delta c + bc \sin A \Delta A - b \cos A \Delta c - c \cos A \Delta b$$

und daher

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha. \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{bc \sin A \Delta A + (b - c \cos A) \Delta b + (c - b \cos A) \Delta c}{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} \\ \text{Ebense findet sich, wenn } a, c \text{ und } B \text{ gemessen sind,} \\ \beta. \quad \frac{\Delta b}{b} = \frac{ac \sin B \Delta B + (a - c \cos B) \Delta a + (c - a \cos B) \Delta c}{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} \\ \text{und, wenn } a, b \text{ und } C \text{ gemessen sind,} \\ \gamma. \quad \frac{\Delta c}{c} = \frac{ab \sin C \Delta C + (a - b \cos C) \Delta a + (b - a \cos C) \Delta b}{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} \end{array} \right.$$

Um weiter  $\Delta B$  zu bestimmen, erhält man aus Gl. 6)  $\beta$ .

$$\Delta B = \frac{b\Delta b - (a - c \cos B)\Delta a - (c - a \cos B)\Delta c}{ac \sin B}$$

und, da

$$a = b \cos C + c \cos B$$

und

$$c = b \cos A + a \cos B$$

ist,

$$7) \quad \Delta B = \frac{b\Delta b - b \cos C \Delta a - b \cos A \Delta c}{ac \sin B}.$$

Ebenso ergibt sich aus Gl. 6)  $\gamma$ .)

$$8) \quad \Delta C = \frac{c\Delta c - c \cos C \Delta a - c \cos A \Delta b}{ab \sin C}.$$

III. Von einem Dreieck seien gemessen zwei Seiten  $b$  und  $c$  und einer der Gegenwinkel  $B$ ; man soll bestimmen  $\frac{\Delta a}{a}$ ,  $\Delta A$  und  $\Delta C$ .

Nach Gl. 7) ist

also 
$$ac \sin B \Delta B = b \Delta b - b \cos C \Delta a - b \cos A \Delta c,$$

$$9) \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{b \Delta b - b \cos A \Delta c - ac \sin B \Delta B}{ab \cos C}.$$

Ferner ergibt sich nach einiger Umrechnung aus Gl. (8)

$$10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha. \quad \Delta A = \frac{a \Delta a - a \cos C \Delta b - a \cos B \Delta c}{bc \sin A} \\ \text{oder aus Gl. (9)} \\ \beta. \quad \Delta A = \frac{a \cos B \Delta B + \sin B \Delta a - \sin A \Delta b}{b \cos A}. \end{array} \right.$$

Nach Gl. 8) ist ferner

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha. \quad \Delta C = \frac{c \Delta c - c \cos C \Delta a - c \cos A \Delta b}{ab \sin C} \\ \text{oder aus Gl. (9), wenn man darin die Buchstaben } a \\ \text{und } A \text{ mit } c \text{ und } C \text{ vertauscht,} \\ \beta. \quad \Delta C = \frac{c \cos B \Delta B + \sin B \Delta c - \sin C \Delta b}{b \cos C}. \end{array} \right.$$

IV. Von einem Dreieck seien gemessen die drei Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; man soll bestimmen  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$ .

Es ist nach Gl. 10)  $\alpha$ .

$$\Delta A = \frac{a \Delta a - a \cos C \Delta b - a \cos B \Delta c}{bc \sin A}$$

$$\Delta A = \frac{a \Delta a - a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Delta b - a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Delta c}{bc \sin A}$$

$$\Delta A = \frac{2abc \Delta a - (a^2 + b^2 - c^2) c \Delta b - (a^2 + c^2 - b^2) b \Delta c}{2b^2 c^2 \sin A}$$

oder, da

$$\sin A = \frac{2\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{bc},$$

wo

$$S = \frac{a+b+c}{2},$$

$$12) \quad \Delta A = \frac{2abc \Delta a - (a^2 + b^2 - c^2) c \Delta b - (a^2 + c^2 - b^2) b \Delta c}{4bc \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

Eben so findet sich

$$13) \quad \Delta B = \frac{2abc \Delta b - (a^2 + b^2 - c^2) c \Delta a - (b^2 + c^2 - a^2) a \Delta c}{4ac \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

und

$$14) \quad \Delta C = \frac{2abc \Delta c - (a^2 + c^2 - b^2) b \Delta a - (b^2 + c^2 - a^2) a \Delta b}{4ab \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

Ein Beispiel einer gewöhnlich vorkommenden Messung möchte ich noch beifügen.

Zur Bestimmung der Höhe  $b$  eines Turmes sei vom Fusse desselben bis zu dem Punkte, wo das Winkelmessinstrument aufgestellt ist, eine horizontale Standlinie  $a = 42,3^m$  und der Winkel  $B$ , welchen diese Linie mit der Visirlinie nach der Spitze des Turmes bildet, gleich  $48^\circ 15'$  gemessen. Ferner möge die Linie  $a$  um  $0,08^m$  und der Winkel  $B$  um  $12'$  fehlerhaft gemessen sein. Nehmen wir nun an, dass die Linie  $a$  zu gross, hingegen der Winkel  $B$  zu klein gemessen sei, so ist

$$\Delta a = -0,08^m$$

und, da einem Winkel von  $12'$  ein Bogen von  $0,0034907$  entspricht,

$$\Delta B = 0,0034907.$$

Wenn wir diese Werte und die für  $a$  und  $B$  in Gl. 4) einsetzen, wird

$$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{0,08}{42,3} + \frac{0,0069813}{\sin 96^\circ 30'}$$

$$\frac{\Delta b}{b} = -0,0018913 + 0,0070264$$

$$\frac{\Delta b}{b} = 0,0051351.$$

Es wäre also der Fehler der Messung ungefähr  $0,005$  der Höhe des Turmes. Um den Wert  $\Delta b$  selbst zu finden, hat man noch  $b$  zu bestimmen.

Es ist aber

$$b = 42,3 \cdot \operatorname{tg} 48^\circ 15',$$

woraus

$$b = 47,393.$$

Demnach ist

$$\Delta b = 47,393^m \cdot 0,005$$

$$\Delta b = 0,236965^m$$

oder ungefähr

$$\Delta b = 0,24^m.$$

Die Höhe des Turmes ist also in diesem Falle um  $24^m$  zu klein gemessen und der Fehler nicht beträchtlich.

Wären die Linie  $a$  und auch  $B$  beide zu gross gemessen, so hätte man

$$\Delta a = -0,08^m$$

$$\Delta B = -0,0034907.$$

Alsdann wäre

$$\frac{\Delta b}{b} = -0,0018913 - 0,0070264$$

$$\frac{\Delta b}{b} = -0,0089177$$

oder ungefähr

$$\frac{\Delta b}{b} = -0,009.$$

Wären die Linien  $a$  und auch  $B$  beide zu klein gemessen, so wäre

$$\Delta a = 0,08^m$$

$$\Delta B = 0,0034907$$

und daher

$$\frac{\Delta b}{b} = 0,009.$$

Wäre endlich die Linie  $a$  zu klein, aber  $b$  zu gross, so wäre

$$\Delta a = 0,08^m$$

$$\Delta B = -0,0034907$$

und es würde sich ergeben

$$\frac{\Delta b}{b} = -0,005.$$

In vorstehendem Beispiele würde also oben beschriebenes Instrument zur Messung von Winkeln ausreichende Genauigkeit für den Unterricht ergeben, schon bei der Annahme, dass selbiges Winkel bis auf  $12'$  genau gibt.

Kempen a. Rh. den 10. Jan. 1876.

## V.

Beschreibung eines Modells für den ersten  
Unterricht in der Goniometrie.

Von

**F. Hoza,**

Professor in Königgrätz.

(Hierzu Abbild. auf Taf. II).

Um jene Veränderungen, welche die goniometrischen Functionen erleiden, wenn der Winkel alle Werte von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$  stetig durchläuft, anschaulich darzustellen, habe ich eine auf Taf. II. abgebildete Vorrichtung construiert und hoffe, dass nachfolgende kurze Beschreibung derselben manche Mathematiklehrer interessiren werde.

Die Abbildung habe ich so detaillirt, dass eine Reproduction des Modells sehr leicht sein wird. Möge es recht bald Eingang finden überall, wo Anfangsgründe der Goniometrie gelehrt werden.

Auf einer kreisrunden, hölzernen Scheibe  $H$  ist Zeichenpapier aufgespannt, auf dem die nötigen Grundlinien gezeichnet sind und zwar ein Kreis  $K$ , dessen Halbmesser gleich ist  $1\frac{1}{2}$ , zwei aufeinander senkrechte Coordinatenaxen  $X, Y$  und zwei Tangenten  $A, B$ , die den Kreis in den Punkten  $a, b$  berühren. Jede dieser Geraden besteht aus einer positiven (+) und einer negativen (—) Hälfte, erstere ist rot und letztere blau ausgezogen. Auch sind sie in Centimeter geteilt, die von den Punkten  $o, a, b$  aus in positiver und negativer Richtung gezählt werden.

Die Scheibe  $H$  ist am Rande mit einer Gradteilung versehen und in der Mitte durchbohrt. Der Bolzen  $o$ , der rückwärts in eine

auf der Scheibe befestigte Platte  $p$  fest eingeschraubt ist, dient als Drehaxe dem Lineal  $C$ , dessen eine Kante genau im Durchmesser des Kreises  $K$  liegt und denselben in einem Punkte trifft, in welchem das Kreuz  $D$ ,  $E$  mittelst eines Schraubchens  $c$ , dessen Mutter in  $C$  liegt, aufgehängt ist.

Das Lineal  $C$  umfasst auf einer Seite den Rand der Scheibe  $H$  und wird an denselben mit einer Druckschraube  $d$  gepresst, so dass es in jeder Lage befestigt werden kann.

Sowohl das Lineal  $C$ , als auch die beiden Axen  $D$ ,  $E$  sind am positiven Teil rot, am negativen blau lackirt und mit Centimetertheilung versehen. Die positiven Richtungen von  $D$ ,  $E$  stimmen mit den negativen von  $Y$ ,  $X$  überein.

Der linke Rand von  $D$ , der obere von  $E$  und untere von  $C$  treffen einander genau auf der Kreislinie  $K$ .

Um den Arm  $D$  stets parallel zu  $Y$  zu erhalten, ist an seinem unteren Ende eine Metallscheibe  $F$  mittelst des Schraubchens  $e$  excentrisch befestigt und kann um  $e$  etwas nach rechts oder links gedreht werden, wodurch ihr Schwerpunkt so verlegt wird, dass der Arm  $D$  die gewünschte Richtung annimmt.

Da das Kreuz  $D$ ,  $E$  in jeder Lage um etwas mehr als die Dicke des Lineals  $C$  von der Oberfläche  $H$  absteht, wird der vollkommen freien Umdrehung des ganzen Systems  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  nichts im Wege stehen, wobei  $D$  stets zu  $X$  parallel verbleibt.

Um etwaigen Veränderungen der Scheibe  $H$  in Folge von Temperaturverhältnissen zu begegnen, sind rückwärts zwei starke Leisten  $L$  angebracht, wovon die untere mittelst zweier Holzschrauben  $m$  an die Ständer  $M$  angeschraubt wird. Diese Ständer sind in eine Platte  $N$  eingezapft, die wieder mittelst dreier Füßchen  $n$  am Tische aufliegt.

Statt hölzerner Füßchen können Stellschrauben angebracht werden, mittelst welchen die Scheibe  $H$  vertical gestellt werden könnte. Bleibt das Lineal  $C$  in einer gewissen Lage stehen, so kann man am Rande der Scheibe  $H$  den Winkel  $(XC)$  ablesen. Der Arm  $D$  zeigt hernach an seiner Theilung von  $c$  bis  $X$  den Sinus dieses Winkels sowohl der Grösse als dem Vorzeichen nach. Ebenso kann man am Arme  $E$  den Cosinus ablesen (von  $c$  bis  $Y$ ). Die Tangente wird auf  $A$ , die Cotangente auf  $B$  gemessen. Das Lineal  $C$  zeigt die Secante und Cosecante jenes Winkels.

Besonders gut lassen sich die Zeichenwechsel der einzelnen Functionen beim Uebergange von  $C$  aus einen Quadranten in den nächstfolgenden darstellen. Auch kann sehr leicht wenigstens angenähert zu einer gegebenen Function der zugehörige Winkel gefunden werden.

Jeder, der einmal in der Lage war, Anfängern die ersten Sätze der Goniometrie beizubringen, wird einsehen, wie notwendig eine solche Vorrichtung ist, um vollständige Klarheit in die Grundvorstellungen zu bringen.

---



VI.

Miscellen.

1.

Zu einem Satze von Steiner.

In dem von Herrn Dr. Geiser herausgegebenen ersten Teile der Vorlesungen Steiner's über synthetische Geometrie findet sich im § 12. p. 65 der interessante Satz: „Beschreibt man durch den Brennpunkt und durch die beiden Endpunkte jeder Seite eines der Ellipse umschriebenen Parallelogrammes Kreise, so haben diese vier Kreise gleiche Radien“. Hierzu ist ergänzend zu bemerken: die Mittelpunkte dieser vier Kreise liegen auf einem fünften Kreise, dessen Radius denen der vier anderen gleich und dessen Centrum der benutzte Brennpunkt ist.

Meutzner.

2.

Relation zwischen Orthogonalkoeffizientensystemen.

Bekanntlich lässt sich ein rechtwinkliges Axensystem bei festem Anfangspunkt durch einfache Rotation um eine, dadurch völlig bestimmte Axe in jede beliebige Stellung bringen. Wir nehmen nun 3 Coordinatensysteme der  $XYZ$ , der  $xyz$  und der  $x'y'z'$  an. Die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf diese mögen in der Relation stehen:

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz = a'x' + b'y' + c'z' \\ Y &= a_1x + b_1y + c_1z = a_1'x' + b_1'y' + c_1'z' \\ Z &= a_2x + b_2y + c_2z = a_2'x' + b_2'y' + c_2'z' \end{aligned}$$

Liegt dann der Punkt ( $XYZ$ ) auf der Axe derjenigen Rotation, welche das System der  $xyz$  in das System der  $x'y'z'$  überführt, so ist

daher

$$x = x'; \quad y = y'; \quad z = z'$$

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c')z = 0$$

$$(a_1 - a'_1)x + (b_1 - b'_1)y + (c_1 - c'_1)z = 0$$

$$(a_2 - a'_2)x + (b_2 - b'_2)y + (c_2 - c'_2)z = 0$$

und nach Elimination von  $x, y, z$

$$\begin{vmatrix} a - a' & b - b' & c - c' \\ a_1 - a'_1 & b_1 - b'_1 & c_1 - c'_1 \\ a_2 - a'_2 & b_2 - b'_2 & c_2 - c'_2 \end{vmatrix} = 0$$

Die letzte Relation gilt, weil sie von der Annahme über den Punkt  $(xyz)$  unabhängig ist, von je 2 beliebigen Orthogonalcoefficientensystemen. Speciell folgt daraus, wenn man die  $x'y'z'$  mit den  $XYZ$  zusammenfallen lässt, so dass  $a' = b'_1 = c'_2 = 1$ , die übrigen Coefficienten null werden:

$$\begin{vmatrix} a - 1 & b & c \\ a_1 & b_1 - 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Auf gleiche Weise kann man offenbar aus der allgemeinen Formel eine beliebige Menge anderer Relationen gewinnen, die zwischen den Orthogonalcoefficienten jedes einzelnen Systems bestehen.

R. Hoppe.

Fig. 1.

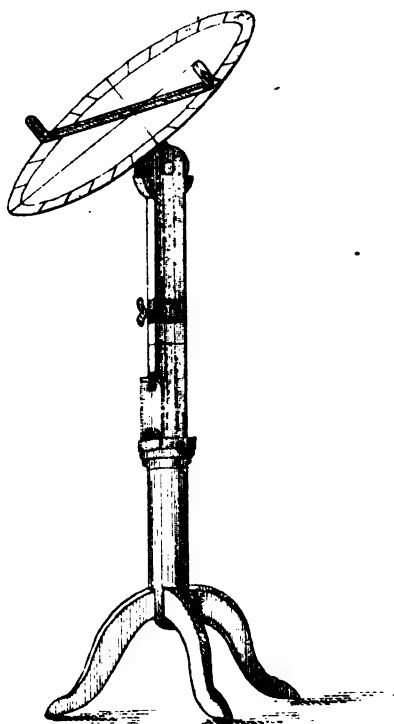
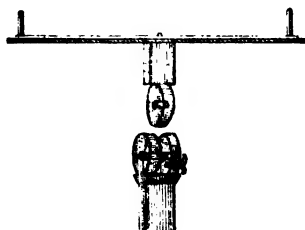


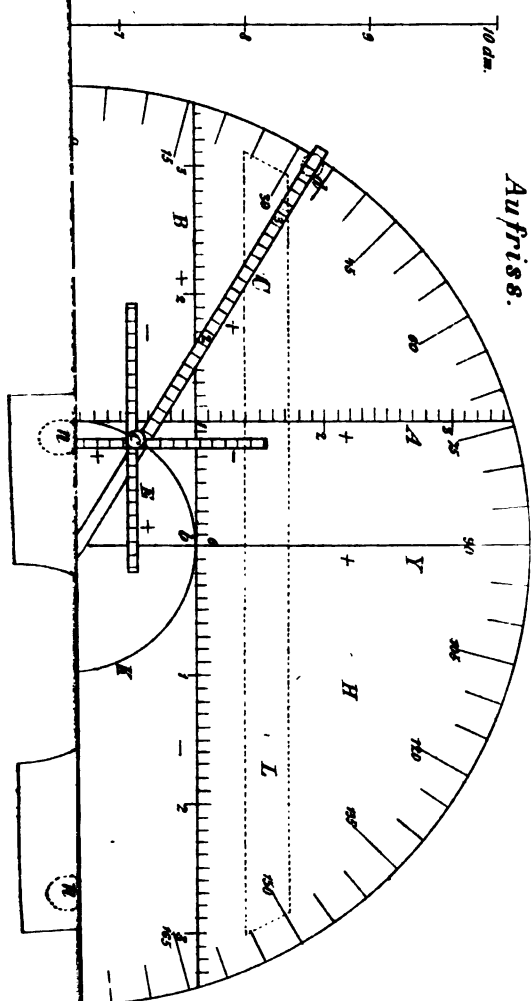
Fig. 2.



V. Fischer: Winkelmessinstrument.



Aufsicht.



V. Hoxa: Modell für Unterricht in der Goniometrie.



Verlag von **Maruschke & Berendt** in Breslau.

Soeben erschienen:

# Die kinetische Theorie der Gase.

In elementarer Darstellung mit mathematischen  
Zusätzen

VON

**Dr. Oskar Emil Meyer,**

Professor der Physik an der Universität Breslau.

**Preis 8 Mark.**

Die neuere Gastheorie, welche von Clausius, Maxwell u. A. auf Grund der Hypothese der molecularen Stösse entwickelt worden ist, findet sich in dieser Schrift elementar dargestellt.

Der Verfasser sucht die physikalische Theorie mehr durch die Ergebnisse der Beobachtung als durch mathematische Rechnung zu begründen.

*Für Mathematiker von Fach sind erläuternde Zusätze angehängt.*

---

**Die Publikationen der trigonometrischen und topographischen Abtheilung der Königl. Landesaufnahme** sind seit Kurzem der Königl. Hofbuchhandlung von **E. S. Mittler & Sohn** in Berlin (Kochstrasse 69) zum Debit übergeben und dadurch für eine Verwerthung in grösseren Kreisen zugänglicher geworden. Diese wichtigen wissenschaftlichen Hilfsmittel umfassen bis jetzt Nivellements und Höhenbestimmungen, Polarcoordinate, Hauptdreiecke und die Triangulation der Umgegend von Berlin, sowie Musterblätter für topographische Arbeiten, Kotentafeln und Instruktionen für Topographen.

---

In meinem Verlage erschien soeben:

**A u s s p r ü c h e**

eines

**Gymnasial-Professors.**

(Lehrers der antiken Sprachen und der Psychologie.)

**Motto:**

Der höhere Blödsinn kann nur durch die Psychologie entwickelt werden.

**Gesammelt und herausgegeben von seinen Schülern.**

**Dritte, sehr vermehrte Auflage.**

**Eleg. geh. Preis 60 Pf.**

*Leipzig.*

**C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.**  
(J. Sengbusch.)

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung in Leipzig.

# Die komischen Mysterien des französischen Volkslebens in der Provinz.

Eine Sammlung von Sittenstudien, komischen und burlesken Scenen,  
Volksschwänken etc. Mit einer Einleitung und einem Vocabular von  
mehr als 1200 Neologismen von

**Dr. J. Baumgarten.**

In eleg. Umschlag geh. Preis 4 Mark.

Höchst ergötzlich und pikant, zugleich aber auch ausserordentlich reich-  
haltig an uns wenig bekannten Thatsachen zur Beurtheilung der geistigen und  
sittlichen Zustände Frankreichs.

## I N H A L T.

	Seite.
I. Rationale ebene Curven dritter Ordnung. Von Dr. K. Zah- radnik . . . . .	1
II. Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Deter- minanten der Coefficienten . . . . .	19
III. Ueber rationale Dreikante und Tetraeder. Von R. Hoppe .	87
IV. Ueber ein einfaches Winkelmessinstrument zum Gebrauche für die Schule. Von F. W. Fischer . . . . .	99
V. Beschreibung eines Modells für den ersten Unterricht in der Goniometrie. Von F. Huzar . . . . .	109
VI. Miscellen.	
1. Zu einem Satze von Steiner. Von Meutzner . . .	111
2. Relation zwischen Orthogonalcoefficientensystemen. Von R. Hoppe . . . . .	111

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.



# ARCHIV

der

## MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht  
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von  
**J. A. Grunert,**  
fortgesetzt von  
**R. Hoppe.**

Einundsechszigster Teil. Zweites Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

---

Leipzig.  
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,  
J. Sengbusch.  
1877.

Soeben ist erschienen:

**Jahrbuch**  
über die  
**Fortschritte der Mathematik**  
im Verein mit andern Mathematikern

herausgegeben von  
**Carl Ohrtmann, Felix Müller, Albert Wangerin.**

**Siebenter Band.**  
**Jahrgang 1875.**  
(In 3 Heften.)

**Drittes Heft.** Preis: 5 Mark 20 Pf.  
**Siebenter Band complet: 15 Mark.**

**Algebraisches Übungsbuch**

für  
mittlere und obere Klassen höherer Unterrichtsanstalten  
und zum Selbstunterrichte

von  
**Dr. Paul Wiecke,**  
Direktor der Königl. Gewerbeschule in Kassel.

**Erste Reihe.**  
**Zweite Auflage.**  
Preis: 75 Pfennig.

*Berlin*, Ende August 1877.

**G. Reimer.**

---

Verlag von **Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.**  
(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)

**Vorlesungen**  
über  
**einige neuere Fortschritte der Physik**

von  
**P. G. Tait.**

Autorisirte deutsche Ausgabe von *G. Wertheim.*  
Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 5 Mark.

---

In meinem Verlage erschien soeben:

**Vivat Academia!**  
Studentische Humoresken

von  
**Dr. Wilhelm Schröder**  
(Verf. v. „Studenten und Lützowern“).  
1. Bändchen.

Eleg. geh. Preis 60 Pf.  
Von der Presse auf das Günstigste aufgenommen.  
*Leipzig.* **C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.**

VII.

# Geometrische Veranschaulichung des binomischen Satzes.

Von

Herrn **Koppe**,

ordentl. Lehrer an der Andreas-Realschule in Berlin.

Das Folgende ist eine weitere Ausführung einer von Prof. Schellbach im 17. Bande des Crelle'schen Journals veröffentlichten elementaren Entwicklung der einfachsten transcendenten Functionen.

In einen Kreis vom Radius 1 trage man vom Punkte  $P$  aus  $\lambda$  Sehnen  $PA_1, A_1B_1, B_1C_1, \dots K_1L_1$  von gleicher Länge  $s$  ein. Dieselben bilden eine gebrochene Linie  $t_1$ , deren Winkelpunkte man durch Radien mit dem Mittelpunkte  $O$  verbinde. Aus der so entstandenen Reihe gleichschenkliger Dreiecke leite man durch folgende Construction eine zweite ab. Man verlängere  $B_1A_1$  über  $A_1$  um  $A_1P$  bis  $B_2$ ,  $C_1B_1$  über  $B_1$  um  $B_1B_2$  bis  $C_2$ ,  $D_1C_1$  über  $C_1$  um  $C_1C_2$  bis  $D_2$  u. s. w. und verbinde die Punkte  $P, B_2, C_2, D_2 \dots L_2$  durch eine gebrochene Linie  $t_2$  mit einander. Eine dritte Reihe gleichschenkliger Dreiecke ergibt sich, wenn man  $C_2B_2$  über  $B_2$  um  $B_2P$  bis  $C_3$ ,  $D_2C_2$  über  $C_2$  um  $C_2C_3$  bis  $D_3$ ,  $E_2D_2$  über  $D_2$  um  $D_2D_3$  bis  $E_3$  verlängert u. s. w. und die Punkte  $P, C_3, D_3, E_3 \dots L_3$  durch eine gebrochene Linie  $t_3$  verbindet. Eine vierte Reihe erfüllt den Raum zwischen  $t_3$  und der gebrochenen Linie  $PD_4E_4 \dots L_4 = t_4$ . Die Anzahl der geradlinigen Stücke, aus denen die gebrochenen Linien  $t$  zusammengesetzt sind, vermindert sich um je eine Einheit, so dass die letzte,  $t_\lambda$ , aus nur einer Strecke,  $PL_\lambda$ , besteht.

Nach der Construction ist:

$$\begin{aligned} L_1 L_2 &= L_1 K_1 \dots B_1 A_1 P = t_1 \\ L_2 L_3 &= L_2 K_2 \dots B_2 A_2 P = t_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beachtet man ausserdem, dass alle in der Figur vorkommenden gleichschenkligen Dreiecke einander ähnlich sind, folglich in jedem die Basis das  $s$ -fache des Schenkels beträgt, so gelangt man zu folgenden Ausdrücken für die Länge der  $t$ . Es ist:

$$t_1 = \lambda s$$

woraus:

$$A_1 P = s, \quad B_1 B_2 = 2s, \quad C_1 C_2 = 3s, \dots$$

Ferner:

$$\begin{aligned} t_2 &= PB_2 + B_2 C_2 + C_2 D_2 + \dots + K_2 L_2 \\ &= s(A_1 P + B_1 B_2 + C_1 C_2 + \dots + K_1 K_2) \\ &= s(s + 2s + 3s + \dots + (\lambda - 1)s) \\ &= \frac{(\lambda - 1)\lambda}{1 \cdot 2} s^2 \end{aligned}$$

woraus

$$B_2 P = s^2, \quad C_2 C_3 = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} s^2, \quad D_2 D_3 = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} s^2, \dots$$

Mit Benutzung dieser Werte:

$$\begin{aligned} t_3 &= PC_3 + C_3 D_3 + D_3 E_3 + \dots + K_3 L_3 \\ &= s(B_2 P + C_2 C_3 + D_2 D_3 + \dots + K_2 K_3) \\ &= s \left( \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} s^2 + \dots + \frac{(\lambda - 2)(\lambda - 1)}{1 \cdot 2} s^2 \right) \\ &= \frac{(\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 \end{aligned}$$

Demnach ist:

$$C_3 P = s^3, \quad D_3 D_4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3, \quad E_3 E_4 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3, \dots$$

Ebenso würde:

$$t_4 = \frac{(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} s^4$$

u. s. w.

Die Punkte  $O$  und  $P$  sind, ausser durch die Grade  $OP$ , noch durch folgende Reihe gebrochener Linien mit einander verbunden:

$$\begin{aligned} OA_1 P &= u_1 \\ OB_1 B_2 P &= u_2 \\ OC_1 C_2 C_3 P &= u_3 \\ &\vdots \\ OL_1 L_2 \dots L_\lambda P &= u_\lambda \end{aligned}$$

Die einzelnen geradlinigen Teile derselben bilden mit einander Winkel, die unter sich gleich und zwar gleich dem Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke sind. Es ist:

$$\begin{aligned}u_1 &= OA_1 + A_1P = 1 + s \\u_2 &= OB_1 + B_1B_2 + B_2P = 1 + 2s + s^2 \\u_3 &= OC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + C_3P \\&= 1 + \frac{3}{1}s + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}s^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}s^3\end{aligned}$$

und allgemein:

$$u_\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1}s + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2}s^2 + \dots + s^\lambda$$

Einen Ausdruck von anderer Form erhält man folgendermassen. Man ordne einem jeden Punkte  $Q$  des Radius  $OP$  je einen Punkt auf  $u_1, u_2, u_3 \dots u_\lambda$  zu, und zwar so, dass, wenn man diese Punkte mit  $A, B, C \dots L$  bezeichnet, die gebrochene Linie  $v = QABC \dots L$  innerhalb eines jeden gleichschenkligen Dreiecks der Halbierungslinie desjenigen seiner Winkel parallel ist, dessen Scheitelpunkt der vom Punkte  $P$  abgewandte Endpunkt der Basis ist. Bei unserer Bezeichnung ist dies der nach alphabetischer Reihenfolge spätere der beiden Endpunkte. Wird der Schenkel  $C_1C_2$  von der Halbierungslinie des Winkels  $C_1D_2C_2$  in  $c_2$  geschnitten, so soll also  $DC \parallel D_2c_2$  sein. Dem Punkte  $Q$  liege ein Punkt  $Q'$  auf  $OP$  so nahe, dass, wenn  $A', B', \dots L'$  die ihm zugeordneten Punkte sind, zwischen  $C$  und  $C'$  kein Winkelpunkt von  $u_3$ , zwischen  $D$  und  $D'$  keiner von  $u_4$  enthalten sei. Dann ist:

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{D_2C_1}{c_2C_1}$$

und da  $\frac{D_2C_1}{c_2C_1} = \frac{D_2C_2}{c_2C_2}$ :

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{D_2C_1 + D_2C_2}{C_1C_2} = 1 + s$$

Diese Relation bleibt richtig, wenn die Punkte  $Q$  und  $Q'$  weiter von einander entfernt sind als eben vorausgesetzt wurde. Denn man kann stets zwischen  $Q$  und  $Q'$  eine Reihe von Punkten so einschalten, dass die von letzteren ausgehenden gebrochenen Linien  $v$  sowohl  $CC'$  als  $DD'$  in geradlinige Strecken zerlegen. Dann ist jeder Teil von  $DD'$  das  $(1+s)$ -fache des entsprechenden von  $CC'$ , demnach allgemein:

$$\frac{DD'}{CC'} = 1 + s$$

Ebenso:

$$\frac{CC'}{BB'} = 1 + s, \quad \frac{BB'}{AA'} = 1 + s, \quad \frac{AA'}{QQ'} = 1 + s$$

folglich:

$$\frac{DD'}{QQ'} = (1+s)^4$$

und allgemein:

$$\frac{LL'}{QQ'} = (1+s)^\lambda$$

Lässt man  $Q'$  mit  $O$ ,  $Q$  mit  $P$  zusammenfallen, so fallen die dem Punkte  $Q'$  resp.  $Q$  zugeordneten Punkte ebenfalls sämtlich in den Punkt  $O$  resp.  $P$ , so dass sich

$$u_\lambda = (1+s)^\lambda$$

ergibt. Man gelangt zu diesem Endresultat einfacher, indem man nachweist, dass in der Reihe  $OP$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , ... jedes Glied das  $(1+s)$ -fache des voranstehenden ist. Man kann z. B.  $u_2$  dadurch in  $u_3$  verwandeln, dass man statt der geraden Strecken,  $OB_1$ ,  $B_1B_2$ ,  $B_2P$ , aus denen  $u_2$  besteht, die gebrochenen  $OC_1B_1$ ,  $B_1C_2B_2$ ,  $B_2C_3P$ , also statt je eines Schenkels die Summe aus Schenkel und Basis eines gleichschenkligen Dreiecks setzt, wodurch jedes Glied  $(1+s)$ -mal vergrößert wird.

Die Vergleichung der beiden Ausdrücke für  $u_\lambda$  giebt den binomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten:

$$(1+s)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1}s + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}s^2 + \dots + s^\lambda$$

Denselben Satz für ganzzahlige negative Exponenten erhält man durch Betrachtung einer andern Reihe vom Punkte  $O$  ausgehender gebrochener Linien. Das Netz gleichschenkliger Dreiecke werde dadurch erweitert, dass man an Stelle von  $\lambda$  die Zahlen  $\lambda+1$ ,  $\lambda+2$ , ... setzt. Die Linien:

$$U_1 = OA_1B_2C_3 \dots$$

$$U_2 = OB_1C_2D_3 \dots$$

$$U_3 = OC_1D_2E_3 \dots$$

⋮

bestehen aus unendlich vielen geradlinigen Strecken, die mit einander einen constanten Winkel bilden, der gleich dem Complementary des Basiswinkels ist. Die Länge der einzelnen Strecken ergibt sich aus den obigen Ausdrücken für die Länge der Linien  $t$ . Es ist z. B.

$$U_3 = OC_1 + C_1D_2 + D_2E_3 + E_3F_4 + \dots$$

$$= OB_1 + C_1C_2 + D_2D_3 + E_3E_4 + \dots$$

$$= 1 + \frac{3}{1}s + \frac{3.4}{1.2}s^2 + \frac{3.4.5}{1.2.3}s^3 + \dots$$

und allgemein:

$$\begin{aligned} U_\lambda &= OL_1 + L_1M_2 + M_2N_3 + \dots \\ &= 1 + \frac{\lambda}{1}s + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}s^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2.3}s^3 + \dots \end{aligned}$$

Hiernach bilden, wenn  $s \geq 1$ , die Strecken  $OL_1$ ,  $L_1M_2$ ,  $M_2N_3$ , ... eine Reihe zunehmender Grössen, so dass ihre Summe  $= \infty$  ist. Ist dagegen  $s < 1$ , so werden dieselben Strecken unendlich klein. Dass in letzterem Falle die Linie  $U_\lambda$  von endlicher Länge ist, die obige Reihe also convergirt, lässt sich geometrisch zeigen, indem man die Summe einer beliebig grossen endlichen Anzahl ihrer Glieder bestimmt.

Man ziehe von einem beliebigen Punkte  $q$  des Radius  $OP$  eine gebrochene Linie  $V$ , die innerhalb jedes einzelnen gleichschenkligen Dreiecks geradlinig und zwar zu der Halbierungslinie desjenigen seiner Winkel senkrecht ist, dessen Scheitelpunkt der dem Punkte  $P$  zugewandte Endpunkt der Basis ist. Diese Linie schneidet, wenn  $s < 1$ , die sämtlichen Linien  $U_1$ ,  $U_2$ , ... der Reihe nach. Nehmen wir an, sie habe sich bis zu einem Punkte  $a$  auf  $U_1$  fortsetzen lassen. Der von  $U_1$  und  $U_2$  begrenzte Teil der Ebene wird durch die Geraden  $A_1B_1$ ,  $B_2C_2$ ,  $C_3D_3$  ... in eine Reihe gleichschenkliger Dreiecke zerlegt. Trägt man auf  $C_3C_2$  die Strecke  $C_3c_3 = C_3D_3$ , auf  $D_4D_3$  die Strecke  $D_4e_4 = D_4E_4$ , auf  $E_5E_4$  die Strecke  $E_5f_5 = E_5F_5$  ab und zieht  $c_3D_3$ ,  $e_4E_4$ ,  $f_5F_5$ , so geben diese Linien die Richtungen an, welche  $V$  innerhalb der Dreiecke  $C_2C_3D_3$ ,  $D_3D_4E_4$ ,  $E_4E_5F_5$  haben soll. Ist daher  $C_3a > C_3D_3$ , so schneidet die Linie  $V$ , indem sie das Dreieck  $C_2C_3D_3$  verlässt, die Linie  $U_2$  auf der Strecke  $C_3D_3$ . Ist dagegen  $C_3a < C_3D_3$ , so tritt die Linie  $V$  durch den Punkt  $\gamma$  der Basis dieses Dreiecks in das nächste der den Raum zwischen  $U_1$  und  $U_2$  erfüllenden Dreiecke ein. Ist nun  $D_4\gamma < D_4E_4$ , so überschreitet  $V$  jetzt die Linie  $U_2$ , wenn nicht, so tritt sie im Punkte  $\delta$  in das nächste Dreieck,  $E_4E_5F_5$ , ein, und überschreitet endlich, dieses Dreieck verlassend, im Punkte  $b$  die Linie  $U_3$ , wenn wir  $E_5\delta > E_5F_5$  voraussetzen. Dass schliesslich einmal die erforderliche Ungleichheit erfüllt sein wird, folgt daraus, dass die Strecken

$$C_3a, \quad D_4\gamma = D_4C_3a, \quad E_5\delta = E_5D_4C_3a, \dots$$

eine Reihe zunehmender Grössen bilden, dagegen

$$C_3D_3 = s \cdot C_2D_3, \quad D_4E_4 = s \cdot D_3E_4, \quad E_5F_5 = s \cdot E_4F_5$$

nach dem Obigen zu unendlich kleinen Werten abnehmen.

Bewegt sich der Punkt  $q$  auf  $OP$  nach  $O$ , so bewegen sich auch die ihm zugeordneten Punkte  $a$ ,  $b$ , ...  $l$  auf  $u_1$ ,  $u_2$ , ...  $u_l$  nach dem-

selben Punkte hin. Nähert sich  $q$  dem Punkte  $P$ , so entfernen sich auch die zugeordneten Punkte immer weiter von  $O$ .

Dem Punkte  $q$  liege auf  $OP$  ein Punkt  $q'$  so nahe, dass, wenn durch die in ihm beginnende Linie  $V'$  ihm die Punkte  $a'$  auf  $U_1$  und  $b'$  auf  $U_2$  zugeordnet werden,  $aa'$  sowohl als  $bb'$  geradlinige Teile von  $U_1$  und  $U_2$  sind. Dann ist:

$$\frac{bb'}{\delta\delta'} = \frac{E_4 F_5}{E_4 f_5} = \frac{E_4 F_5}{E_4 E_5 - E_5 F_5} = \frac{1}{1-s}$$

und, da  $\delta\delta' = \gamma\gamma' = aa'$ :

$$\frac{bb'}{aa'} = \frac{1}{1-s}$$

Sind  $q$  und  $q'$  weiter von einander entfernt, so bleibt diese Relation richtig, denn sie gilt dann für die Teilstrecken, in welche  $aa'$  und  $bb'$  durch diejenigen Linien  $V$  zerlegt werden, welche durch die den Strecken  $aa'$  und  $bb'$  angehörnden Winkelpunkte hindurchgehen.

Ebenso ist:

$$\frac{aa'}{qq'} = \frac{1}{1-s}$$

daher:

$$\frac{bb'}{qq'} = \frac{1}{(1-s)^2}$$

und allgemein:

$$\frac{ll'}{qq'} = (1-s)^{-\lambda}$$

Verlegt man den Punkt  $q'$  in den Punkt  $O$ , so wird hieraus:

$$\frac{Ol}{Oq} = (1-s)^{-\lambda}$$

Versteht man unter  $l$  einen der Winkelpunkte  $L_1, M_2, N_3, \dots$ , so ist  $Ol = Oq(1-s)^{-\lambda}$  die Summe von 1, resp. 2, 3 ... Gliedern der Reihe  $U_\lambda$ . Je grösser die Anzahl der summirten Glieder ist, desto näher rückt  $q$  dem Punkte  $P$ , so dass schliesslich

$$U_\lambda = (1-s)^{-\lambda}$$

wird. Die Vergleichung mit dem ersten Ausdruck giebt:

$$(1-s)^{-\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1}s + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1 \cdot 2}s^2 + \dots$$

Lässt man  $\lambda$  unendlich gross werden und gleichzeitig  $s$  abnehmen, so dass der Bogen  $PL_1$  einen constanten Wert  $\varphi$  behält, den wir als rational voraussetzen wollen, so kann man die Sehne  $s$  gleich dem



zugehörigen Bogen  $\frac{\varphi}{\lambda}$  setzen. Gleichzeitig werden die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke  $= \frac{\pi}{2}$ , und demselben Werte nähern sich die Winkel, welche zwei aufeinanderfolgende Linien aus der Reihe  $t_1, t_2, t_3, \dots$  im Punkte  $P$  mit einander bilden. Die gebrochene Linie  $t_1$  geht in den Kreisbogen  $OL_1$ ,  $t_2$  in die Evolvente desselben über. Wickelt man letztere vom Punkte  $P$  aus ab, so erhält man die Curve, der sich  $t_3$  nähert, so dass die Reihe der gebrochenen Linien  $t$  in die Reihe der successiven Evolventen des Kreisbogens übergeht. Die gebrochenen Linien  $u$  und  $U$  fallen in eine einzige aus unendlich vielen geraden Strecken bestehende rechtwinklige Spirale

$$u = OL_1L_2L_3 \dots$$

zusammen. Von je zwei in einem Winkelpunkte zusammenstossenden Teilen derselben ist jedesmal der frühere Normale, der spätere Tangente derjenigen Evolvente, auf der dieser Winkelpunkt liegt.

Setzt man in den obigen Ausdrücken für  $t_1, t_2, \dots$  an Stelle von  $s$  den Wert  $\frac{\varphi}{\lambda}$ , so ergeben dieselben für  $\lambda = \infty$ :

$$L_1P = L_1L_2 = \varphi$$

$$L_2P = L_2L_3 = \frac{\varphi^2}{1.2}$$

$$L_3P = L_3L_4 = \frac{\varphi^3}{1.2.3}$$

:

Die beiden von einem Punkte  $Q$  ausgehenden gebrochenen Linien  $v$  und  $V$  gehen in eine einzige Curve  $v$  über, deren Verlauf dadurch bestimmt ist, dass sie innerhalb des Kreises die Radien desselben, zwischen dem Kreise und seiner ersten Evolvente die Normalen der letzteren, überhaupt in dem Zwischenraum zwischen zwei Evolventen die Normalen der äussern oder Tangenten der innern unter einem Winkel von  $45^\circ$  schneidet. In den Punkten, wo die Curve  $v$  den Kreis oder eine Evolvente desselben überschreitet, ändert sie ebenso wie die Schaar der Geraden, deren Trajectorie sie bildet, ihre Richtung plötzlich um  $30^\circ$ . Da nach dem Obigen die Curve  $v$  im Punkte  $L$  die Spirale  $u = (OLP)$  in demselben Verhältniss theilt wie im Punkte  $Q$  den Radius  $OP$ , so folgt, dass erstere von endlicher Länge, oder dass die Reihe:

$$\begin{aligned} (OLP) &= OL_1 + L_1L_2 + L_2L_3 + \dots \\ &= 1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \dots \end{aligned}$$

convergirt. Um ihre Summe geometrisch zu finden, lege man durch  $L_1$  eine Curve  $v$ . Schneidet diese den Radius  $OP$  im Punkte  $Q_1$ , so ist:

$$(OLP):OL_1 = OP:OQ_1$$

Demnach ist  $OQ_1$  der reciproke Wert der Länge von  $(OLP)$ . Projicirte man mittelst der Curven  $v$  auch die Punkte  $L_2, L_3, \dots$  auf den Radius  $OP$ , so erhielte man auf demselben eine unendliche Reihe von Punkten,  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ , die sich nach dem Punkte  $P$  hin zusammendrängen, und deren Abstände von einander den einzelnen Gliedern der obigen Reihe proportional sind.

Lässt sich die Sehne  $s$  in den Bogen  $PH_1$ , dessen Länge gleich dem Radius sei,  $\mu$  mal eintragen, so ist

$$\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$$

Construirt man noch die zu  $H_1$  gehörende rechtwinklige Spirale, so ist:

$$(OHP) = (1+s)^\mu, \quad (OLP) = (1+s)^\lambda = (1+s)^{\mu\varphi}$$

oder auch

$$(OHP) = (1-s)^{-\mu}, \quad (OLP) = (1-s)^{-\lambda} = (1-s)^{-\mu\varphi}$$

woraus:

$$(OLP) = (OHP)^\varphi$$

Setzt man also:

$$(OHP) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots = e$$

so ist:

$$(OLP) = 1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \dots = e^\varphi$$

Ist  $OQ = q$ , und schneidet die von  $Q$  ausgehende Curve  $v$  die Spiralen  $(OHP)$  und  $(OLP)$  in  $H$ , resp. in  $L$ , so hat man ferner:

$$OH = qe, \quad OL = qe^\varphi$$

wenn die Strecken  $OH, OL$  auf den Spiralen gemessen werden.

Ist  $PR$  senkrecht auf  $OL_1$ , und betrachtet man  $O$  als Anfangspunkt,  $OL_1$  als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so lehrt ein Blick auf die Figur, dass die Ordinaten von  $L_2, L_3$  grösser, die von  $L_4L_5$  kleiner, die von  $L_6L_7$  wieder grösser als die Ordinate von  $P$  sein müssen u. s. f., dass dagegen, mit Berücksichtigung des Zeichens, die Abscissen von  $L_1, L_2$  grösser, die von  $L_3, L_4$  kleiner, die von  $L_5, L_6$  wieder grösser als die Abscisse von  $P$  sind. Die Spirale  $(OLP)$  muss daher, sobald ihre Teile angefangen haben abzunehmen, sich immer mehr auf den Punkt  $P$  zusammenziehen. Demnach ist:

$$PR = L_1 L_2 - L_3 L_4 + L_5 L_6 - \dots$$

$$- OR = OL_1 - L_2 L_3 + L_4 L_5 - \dots$$

oder:

$$\sin \varphi = \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \dots$$

Die Lage eines beliebigen Punktes, z. B.  $L$ , ist in der Ebene bestimmt, wenn der Winkel  $\varphi$  gegeben ist, den die durch ihn zu legende rechtwinklige Spirale  $OL_1 L_2 \dots$  im Punkte  $O$  mit dem festen Radius  $OP$  bildet, und die Strecke  $r$ , um welche er auf dieser von  $O$  entfernt ist. In dem Polarcoordinatensystem  $(r, \varphi)$  hat jeder Radiusvector, obwohl aus unendlich vielen geradlinigen Strecken bestehend, eine obere Grenze,  $e^\varphi$ , die er im Punkte  $P$  erreicht. Die durch die Gleichung

$$r = e^\varphi$$

gegebene Curve reducirt sich daher auf diesen Punkt. Die Gleichungen des Kreisbogens,  $PL_1$  und seiner Evolventen  $PL_2, PL_3, \dots$  sind in diesen Coordinaten:

$$r = 1$$

$$r = 1 + \frac{\varphi}{1}$$

$$r = 1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2}$$

:

Die Trajectorie  $v$  oder  $QHL \dots$  wird in ihrer ganzen Ausdehnung durch die Gleichung

$$r = qe^\varphi$$

definiert, während im Allgemeinen eine und dieselbe Curve in verschiedenen der durch die Evolventen getrennten Teile der Ebene durch verschiedene Gleichungen bestimmt wird. Dies ist schon für die etwas allgemeinere Curve der Fall, welche die Radienvectoren  $r$  unter einem von  $\frac{\pi}{4}$  verschiedenen constanten Winkel schneidet. Ebenso haben auch die Ausdrücke für das Linien- und das Flächen-Element für die einzelnen Gebiete besondere Formen.

## VIII.

## Untersuchungen über algebraische Gleichungen.

Von

**Alfred Siebel.**

Fortsetzung von XV. in T. LX.

**Artikel VI. (§ 25–34.)**

Specielle Behandlung des Annäherungs-Problems.

**A. Zur Darstellung der Wurzeln durch Potenzreihen.**

## § 25.

I. Sei  $(cc')$  ein beliebig gegebenes Intervall,

$$c \leq x_1 \leq c',$$

 $x_1$  keine Wurzel von  $f(x) = 0$ ,

so lässt das Problem:

Ein Intervall  $(x_1x)$  oder  $(xx_1)$  mit gegebenem Anfangswert  $x_1$  so zu bestimmen, dass dasselbe keine zwischen  $c$  und  $c'$  liegende Wurzel enthält —

nach § 11, 2. algebr. Lösung\*) (Teil LVII, S. 361, Z. 1 v. u.) eine Lösung in folgender Form zu.

---


$$*) x = c - a + \sqrt[r]{(x_1 - c + a)^r - kfx_1}.$$

$$Fx - Fx_1 + tfx_1 = 0,$$

$$Fx = \lambda(x - h)^r.$$

Oder, da

$$Fx - Fx_1 = (x - x_1)F'u,$$

wo  $u$  einen bestimmten Wert zwischen  $x_1$  und  $x$  bezeichnet, und  $F'(x)$  mit  $x$  wächst,

einfacher:

$$x - x_1 = -\frac{tfx_1}{F'c'}.$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + tfx_1, \\ t = -\frac{t}{F'c'} = \text{const. für alle } x_1 \text{ in } (cc'). \end{array} \right.$$

II.  $x$  liegt zwischen  $x_1$  und der benachbarten Wurzel  $w$   $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix} x_1$   
von  $fx = 0$ , wenn eine solche vorhanden und  $c < w < c'$ .

Es sei hier und im Folgenden  $w$  eine ein- oder mehrfache Wurzel.

Sei obiges  $x_1$  bezeichnet durch

ferner

$$\begin{array}{l} x \\ x_1 = tfx + x \\ x_2 = tfx_1 + x_1 \\ \vdots \\ x_r = tfx_{r-1} + x_{r-1}, \text{ sei } = \left[ \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{array} \right]_r, \end{array}$$

(1)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{so liegt jeder folgende dieser Werte der Wurzel } w \text{ näher als} \\ \text{der vorhergehende.} \end{array} \right.$

$$(2) \quad w = \lim_{r \rightarrow \infty} x_r.$$

Wir wollen versuchen,  $x_r$  in eine Potenzreihe, welche nach Potenzen von  $fx$  fortschreitet, zu verwandeln, d. i.

$$x_r = \left[ \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{array} \right]_r = t f \left[ \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{array} \right]_{r-1} t f \left[ \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{array} \right]_{r-2} \dots t f(x) + x \dots \left[ \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{array} \right]_{r-2} + \left[ \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{array} \right]_{r-2} + \left[ \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{array} \right]_{r-1} + \left[ \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{array} \right]_{r-1}.$$

III. Es ist, zur Abkürzung

$$f(x) = f, f'(x) = f' = f_1, f''(x) = f'' = 2!f_2, f'''(x) = f''' = 3!f_3 \text{ etc.}$$

gesetzt:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x + tf - tf(x + tf) \\
 &= x + tf + t(f + f' tf + f_2 t^2 f^2 + f_3 t^3 f^3 + \dots) \\
 &= x + (2 + tf')tf + f_2 t^3 f^2 + f_3 t^4 f^3 + \dots \\
 x_3 &= x_2 + tfx_2 \\
 &= x_2 + t(f + f' \cdot (x_2 - x_1) + f_2 \cdot (x_2 - x)^2 + \dots)
 \end{aligned}$$

Hieraus erkennen wir schon, wie am besten zu verfahren ist.

Sei kurz

$$tf = g, \quad tf_1 = z - 1, \quad tf_2 = k_1, \quad tf_3 = k_2 \dots tf_m = k_{m-1},$$

ferner

$$\Delta_r = x_r - x,$$

so ist

$$\Delta_r = \Delta_{r-1} + tf(x + \Delta_{r-1}).$$

Nach dem Taylor'schen Satze entwickelt:

$$(1) \quad \Delta_r = g + z\Delta_{r-1} + k_1\Delta_{r-1}^2 + k_2\Delta_{r-1}^3 + \dots k_{n-1}\Delta_{r-1}^n,$$

also

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= g \\
 \Delta_2 &= g + zg + k_1g^2 + \dots k_{n-1}g^n \\
 \Delta_3 &= g + z\Delta_2 + k_1\Delta_2^2 + k_2\Delta_2^3 + \dots k_{n-1}\Delta_2^n \\
 &= C_{1,3}g + C_{2,3}g^2 + C_{3,3}g^3 + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_r = C_{1,r}g + C_{2,r}g^2 + \dots C_{p,r}g^p \\ \text{wo} \qquad \qquad \qquad p = n^{r-1} \end{array} \right.$$

$$(3) \quad w = x + \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r$$

Als Coefficienten der Potenzen von  $g$  treten Ausdrücke von der Form auf:

$$(4) \quad N = Z \cdot k_a^\alpha \cdot k_b^\beta \cdot k_c^\gamma \dots + Z' \cdot k_b^{\alpha'} \cdot k_b^{\beta'} \cdot k_c^{\gamma'} \dots + \dots,$$

wo  $Z, Z' \dots$  ganze rationale Functionen von  $Z$  mit ganzzahligen positiven Coefficienten sind.

Wir bezeichnen einen solchen kürzer durch

$$(\alpha^\alpha b^\beta c^\gamma \dots, \quad n'^\alpha b'^\beta c'^\gamma \dots)$$

Die Exponenten 1 lassen wir fort, setzen also z. B.

$$Zk_2 + Z'k_1^2 = (2, \overset{2}{1}).$$

Der Symmetrie halber sei

$$k_0 = 1, \quad (0) = k_0 \cdot Z.$$

Mit Hilfe des polynomischen Satzes \*) ergibt sich für die zunächst auftretenden  $C_{m,r}$  folgende symbolische Darstellung.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &= g \\
 \mathcal{A}_2 &= (0)g + (1)g^2 \\
 &\quad + k_2 g^3 + k_3 g^4 + k_4 g^5 + \dots \\
 \mathcal{A}_3 &= (0)g + (1)g^2 + (2, \overset{2}{1})g^3 + (3, \overset{2}{21}, \overset{3}{1})g^4 \\
 &\quad + (4, \overset{2}{31}, \overset{2}{2}, \overset{2}{21})g^5 + (5, \overset{2}{41}, \overset{2}{32}, \overset{2}{31}, \overset{3}{21}, \overset{3}{21})g^6 \\
 &\quad + (6, \overset{2}{51}, \overset{2}{42}, \overset{2}{41}, \overset{3}{3}, \overset{3}{321}, \overset{3}{31}, \overset{2}{2}, \overset{2}{21})g^7 \\
 &\quad + (7, \overset{2}{61}, \overset{2}{52}, \overset{2}{51}, \overset{2}{43}, \overset{3}{421}, \overset{3}{41}, \overset{2}{31}, \overset{2}{32}, \overset{4}{321}, \overset{4}{31}, \overset{3}{21})g^8 \\
 &\quad + \dots \\
 \mathcal{A}_4 &= (0)g + \dots (3, \overset{3}{21}, \overset{3}{1})g^4 + (\underbrace{4 \dots 1}_{\text{wie } C_{5,3}})g^5 + (\underbrace{5 \dots 1}_{\text{wie } C_{6,3}})g^6 \\
 &\quad + (\underbrace{6 \dots 21}_{\text{wie } C_{7,2}})g^7 + (\underbrace{7 \dots 21, 21, 1}_{\text{wie } C_{8,3}})g^8 \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Aus dieser kurzen Entwicklung ist schon das Bildungsgesetz der ersten 8 Glieder von  $\mathcal{A}_r$  ersichtlich. Wir kommen hierauf zurück (§ 27).

## § 26.

### Hilfsbetrachtungen.

Nennen wir eine Form wie in § 25. III. (4)

$$N = \Sigma Z. k_a^\alpha k_b^\beta k_c^\gamma \dots,$$

für welche

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = \alpha' + \beta' + \gamma' + \dots = \dots = m,$$

eine Form  $N$  der  $m$ ten Ordnung und bezeichnen sie durch

$$(\ )_m.$$

\*) Das allgemeine Glied von  $(a+b+c+\dots)^m$ , wo  $m$  eine ganze Zahl, ist

$$= \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots,$$

die Exponenten so gewählt dass

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = m.$$

Wir unterscheiden demnach solche der 1sten, 2ten ... Ordnung, anderseits vollständige und unvollständige, je nachdem alle möglichen Producte

$$k_1^\alpha k_2^\beta k_3^\gamma \dots,$$

d. h. für welche

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = m,$$

vorkommen oder nicht.

Erstere seien durch  $\underline{m}$ , letztere durch  $\underline{m}$  bezeichnet.

Ueber besagte Formen gelten eine Reihe von Hilfssätzen, die sich wie folgt symbolisch ausdrücken lassen.

$$1) \quad ( )_l ( )_m = ( )_{l+m}.$$

Denn das allgemeine Glied in  $( )_l, ( )_m$  ist proportional

$$k_1^\alpha k_2^\beta k_3^\gamma \dots \text{ wo } \alpha.1 + \beta.2 + \gamma.3 + \dots = l,$$

resp.

$$k_1^a k_2^b k_3^c \dots \text{ wo } \alpha.1 + b.2 + c.3 + \dots = m,$$

mithin das in  $( )_l ( )_m$  proportional

$$k_1^{\alpha+a} k_2^{\beta+b} k_3^{\gamma+c} \dots \text{ wo } (\alpha+a)1 + (\beta+b)2 + \dots = l+m$$

Folgesatz:  $( )_l ( )_m ( )_n \dots = ( )_{l+m+n \dots}$

2) Die vollständigen Formen lassen sich symbolisch so schreiben:

$$\underline{1} = (1)$$

$$\underline{2} = (2, \overset{2}{1}) = (2, 11)$$

$$\underline{3} = (3, 21, \overset{3}{1}) = (3, 21, 1 \overset{2}{(2 \overset{2}{1})})$$

$$\underline{4} = (4, 31, \overset{2}{2}, \overset{2}{21}, \overset{4}{1}) = (4, 31, 2 \overset{2}{(2 \overset{2}{1})}, 1 \overset{3}{(3, 21, \overset{3}{1})})$$

wo die \* bedeuten, dass die entsprechenden Glieder in den vorhergehenden vorkommen und daher weggelassen können.

$$\underline{m} = \sum_{i=1}^{i=m} k_i \underline{m-i}, \text{ wo } \underline{0} = 1$$

3) Sei

$$m = 2p \text{ oder } 2p+1,$$

so lässt sich  $\underline{m}$  auf die Form bringen

$$\underline{m} = \sum_{i=p+1}^{i=m} k_i \underline{m-i} + \sum Z k_1^\alpha k_2^\beta k_3^\gamma \dots,$$

worin

$$\alpha.1 + \beta.2 + \gamma.3 + \dots = m.$$



Um so mehr

$$m = \sum_{i=p+1}^{i=m} k_i m - i + \sum 1^{\alpha} . 2^{\beta} . 3^{\gamma} \dots p^{\pi},$$

wo

$$\alpha . 1 + \beta . 2 + \gamma . 3 + \dots = m.$$

4) Denken wir uns das Product

$$P = 1^{\alpha} . 2^{\beta} . 3^{\gamma} \dots p^{\pi}$$

in seine einfachen Factoren  $\underline{1} . \underline{1} \dots \underline{2} . \underline{2} \dots$  zerlegt und solche 2

$$\underline{l} \quad \text{und} \quad \underline{n}$$

in  $\underline{l} + \underline{n}$  zusammen gefasst (Vergl. 1) und zwar so, dass

$$l + n \leq p.$$

In der neuen Reihe von Factoren, deren Anzahl um 1 geringer ist, d. i.:  $\alpha + \beta + \gamma + \dots \pi - 1$ , fassen wir wieder 2 z. B.

$$\underline{r} \quad \text{und} \quad \underline{s}$$

so zusammen, dass

$$r + s \leq p.$$

Bei dem hierdurch entstehenden, wieder einen Factor weniger enthaltenden Producte verfahren wir in gleicher Weise u. s. f. bis sich die Anzahl der Factoren nicht mehr verkleinern lässt. Wir behaupten:

Diese kleinste Anzahl ist höchstens = 3.

Beweis: die letzte Form, die man für  $P$  erhält, sei

$$P = \underline{a} . \underline{b} . \underline{c} \dots,$$

die Anzahl der Factoren  $x$ , so muss sein

$$a + b \geq p + 1$$

$$a + c \geq \text{„}$$

⋮

$$b + c \geq \text{„}$$

⋮

addirt giebt

$$(x-1)(a+b+c+\dots) \geq \frac{x(x-1)}{2}(p+1).$$

Nun ist

$$a+b+c+\dots = m,$$

also

$$m \geq (p+1) \geq \frac{x}{4}(m+2)$$

$$x < 4 \quad (\text{W. z. b.})$$

$$5) \text{ Ist } M_1 = \sum_{i=p+1}^{i=m} k_i m - i,$$

$$M_2 = \sum \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c},$$

ausgedehnt über alle  $a, b, c \leq p$ , so dass  $a+b+c = m$ , mithin

$$M_2 = k_a \underline{b} \cdot \underline{c} \cdot \underline{d}$$

für alle  $a, b, c, d \leq p$ , so dass  $a+b+c+d = m$ , so folgt aus 3) und 4): dass man  $\underline{m}$  die Form geben kann

$$\underline{m} = M_1 + M_2.$$

### § 27.

I. Wir kehren zur Gleichung § 25. III. (2) zurück und können zunächst sagen:

Der Coefficient der  $m$ ten Potenz von  $g$  bildet eine Form  $N$  der  $(m-1)$ ten Ordnung:

$$(1) \quad C_{m,r} = ( )_{m-1},$$

so dass

$$(2) \quad \Delta_r = ( )_0 g + ( )_1 g^2 + ( )_2 g^3 + \dots + ( )_{p-1} g^p.$$

Beweis: Wir machen den Schluss von  $n$  auf  $n+1$ .

Sei (2) richtig für ein bestimmtes  $r$ , so ist nach § 25 III. (1) und (2)

$$\Delta_{r+1} = g + z \{ C_{1,r} g + C_{2,r} g^2 + \dots \} + k_1 \{ \}^2 + k_2 \{ \}^3 + \dots$$

von der Form

$$\Delta_{r+1} = k_0 (( )_0 g + ( )_1 g^2 + \dots) + k_1 (( )_0 g + ( )_1 g^2 + \dots)^2 + k_2 (( )_0 g + ( )_1 g^2 + \dots)^3 + \dots$$

Das allgemeine Glied ist

$$M = k_{m-1} g^s \frac{m!}{a! b! c! \dots} ( )_0^a ( )_1^b ( )_2^c \dots,$$

wo

$$\begin{aligned} s &= a.1 + b.2 + c.3 + \dots \\ m &= a + b + c + \dots \end{aligned}$$

Nach § 26. 1), Folgesatz, lässt sich  $M$  auf die Form bringen

$$\begin{aligned} M &= g^s ( )_{m-1} ( )_b ( )_{c.2} ( )_{d.3} \dots \\ &= g^s ( )_{m-1+b.1+c.2+\dots} = g^s ( )_{s-1} \end{aligned}$$

also u. s. w.

II. Ein Blick auf § 25. III. (5) lässt vermuten, dass

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_r &= \underline{0}g + \underline{1}g^2 + \underline{2}g^3 + \dots \underline{s}g^{s+1} \\ &+ \underline{s} + \underline{1}g^{s+2} + \underline{s} + \underline{2}g^{s+3} + \dots, \\ \text{wo} \quad &s = 2^{r-1} - 1. \end{aligned} \right.$$

Beweis: (Schluss von  $n$  auf  $n+1$ ):

Sei (1) richtig für ein bestimmtes  $r$ . Wegen § 25. III. (1) kann  $\Delta_{r+1}$  auf die Form gebracht werden

$$\begin{aligned} \Delta_{r+1} &= k_0(\underline{0}g + \underline{1}g^2 + \underline{2}g^3 + \dots) + k_1(\underline{0}g + \dots)^2 + k_2(\underline{0}g + \dots)^3 + \dots \\ &+ \text{eine Reihe von Gliedern, welche die unvollkommenen} \\ &\text{Formen } \underline{s} + \underline{1}, \underline{s} + \underline{2} \dots \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Es ist zu beweisen, dass der Factor der  $(m+1)$ ten Potenz von  $g$

$$C_{m+1, r+1} = \underline{m}$$

für alle

$$m+1 \leq 2^r = 2(s+1).$$

derselbe ist, abgesehen von jener Reihe von Gliedern

$$M = \Sigma k_v \underline{0}^{\alpha_0} \underline{1}^{\alpha_1} \underline{2}^{\alpha_2} \dots \underline{s}^{\alpha_s},$$

die Summation ausgedehnt über alle

$$v = 0, 1, 2 \dots n-1$$

und alle  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots$  unter  $0, 1, 2 \dots$ , für welche

$$\begin{aligned} \alpha_0.1 + \alpha_1.2 + \alpha_2.3 + \dots &= m+1, \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots &= v+1. \end{aligned}$$

Obige Bedingung  $m+1 \leq 2(s+1)$  ist erfüllt, wenn

$$p \leq s.$$

Es kommt folglich in  $M$  vor

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ wenn } m = 2p+1: \text{ jedes Glied von } k_1 p^2, \\ \qquad \qquad \qquad \text{somit } k_1^{2p+1} \\ \text{wenn } m = 2p \quad \text{jedes Glied von } k_1 p - 1 \cdot p, \\ \qquad \qquad \qquad \text{somit } k_1^{2p} \end{array} \right\} \text{ also } k_1^m.$$

2) jedes Glied von

$$M_1 = \sum_{i=p+1}^{i=m} k_i 0^{m-i}$$

3) desgl. von

$$M_2 = \sum k_a 0^{a-2} \cdot b \cdot c \cdot d,$$

wo  $a > 1$ ;  $a, b, c, d \leq p$ ;  $a+b+c+d = m$ .

(Wenn  $m = 2p$ , so kann  $b = 0$ ,  $c = p-a$ ,  $d = p$  sein).

Aus 1), 2), 3) in Verbindung mit § 26. 5) resultirt

$$M = m,$$

also auch

$$C_{m+1, r+1} = m.$$

Nun gilt der Satz (1) für  $r=3$ , also auch für  $r=4$  u. s. w.

Die Feststellung des Baues von  $C_{s+1, r}$ ,  $C_{s+2, r}$  ... möchte auf grössere Schwierigkeiten stossen und nehmen wir hier davon Abstand.

## § 28.

I. Wenden wir uns der Bestimmung der Coefficienten  $C_{1, r}$ ,  $C_{2, r}$  ... selbst zu.

Aus § 25. III. (1) und (2) ergibt sich identisch

$$(1) \quad C_{1, r} g + C_{2, r} g^2 + C_{3, r} g^3 + \dots = g + z(C_{1, r-1} g + C_{2, r-1} g^2 + \dots) \\ + k_1 (C_{1, r-1} g + \dots)^2 + k_2 (C_{1, r-1} g + \dots)^3 + \dots,$$

woraus durch Gleichsetzen der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von  $g$  auf beiden Seiten:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{1,r} = zC_{1,r-1} + 1 \\ C_{2,r} = zC_{2,r-1} + k_1 C_{1,r-1}^2 \\ C_{3,r} = zC_{3,r-1} + k_1 2C_{1,r-1} C_{2,r-1} + k_2 C_{1,r-1}^3 \\ C_{4,r} = zC_{4,r-1} + k_1 (2C_{1,r-1} C_{3,r-1} + C_{2,r-1}^2) \\ \quad \quad \quad + k_2 3C_{1,r-1} C_{2,r-1} + k_3 C_{1,r-1}^4 \\ \vdots \end{array} \right.$$

oder, wenn in Uebereinstimmung mit § 27. II. (1)

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{1,r} = Z_{1,r} \\ C_{2,r} = k_1 Z_{2,r} \\ C_{3,r} = k_2 Z'_{3,r} + k_1^2 Z''_{3,r} \\ \vdots \end{array} \right.$$

gesetzt wird,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad Z_{1,r} = zZ_{1,r-1} + 1 \\ 2) \quad Z_{2,r} = zZ_{2,r-1} + Z_{1,r-1}^2 \\ 3) \quad Z'_{3,r} = zZ'_{3,r-1} + Z_{1,r-1}^3 \\ 4) \quad Z''_{3,r} = zZ''_{3,r-1} + 2Z_{1,r-1} Z_{2,r-1} \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$(5) \quad A_r = Z_{1,r}g + Z_{2,r}k_1g^2 + (Z'_{3,r}k_2 + Z''_{3,r}k_1^2)g^3 + \dots$$

II. Aus I. (4) 1) folgt durch wiederholte Anwendung:

$$Z_{1,r} = z(zZ_{1,r-2} + 1) + 1 = z^2Z_{1,r-2} + z + 1 = \dots = z^{r-1} + z^{r-2} + \dots + z + 1;$$

in geschlossener Form

$$(1) \quad (z-1)Z_{1,r} = z^r - 1$$

Aus I. (4) 2):

$$\begin{aligned} Z_{2,r} &= z(zZ_{2,r-2} + Z_{1,r-2}^2) + Z_{1,r-1}^2 \\ &= z^2(zZ_{2,r-3} + Z_{1,r-3}^2) + zZ_{1,r-2}^2 + Z_{1,r-1}^2 \\ &\quad \vdots \\ &= z^{r-2}Z_{2,2} + z^{r-3}Z_{1,2}^2 + z^{r-4}Z_{1,3}^2 + \dots + zZ_{1,r-2}^2 + Z_{1,r-1}^2. \end{aligned}$$

Die Coefficienten  $Z_{1,2}$ ,  $Z_{1,3}$  sind aus (1) bekannt,  $Z_{2,2} = 1$ , und es kommt:

$$\begin{aligned} (z-1)^2 Z_{2,r} &= z^{r-2}(z-1)^2 + z^{r-3}(z^2-1)^2 + z^{r-4}(z^3-1)^2 \\ &\quad + \dots + z(z^{r-2}-1)^2 + (z^{r-1})^2 \\ &= z^r + z^{r-1} + \dots + z^{2r-3} + z^{2r-2} \\ &\quad - 2z^{r-1} - 2z^{r-1} - \dots - 2z^{r-1} - 2z^{r-1} \\ &\quad + z^{r-2} + z^{r-3} + \dots + z + 1 \\ &= (z^r + 1)(z^{r-2} + z^{r-3} + \dots + z + 1) - 2(r-1)z^{r-1}; \end{aligned}$$

in geschlossener Form

$$(2) \quad \begin{cases} (z-1)^3 Z_{2,r} = (z^r+1)(z^{r-1}-1) - 2(r-1)(z-1)z^{r-1} \\ \quad \quad \quad = z^{2r}-1 - (2r-1)(z-1)z^{r-1}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise erhält man aus I. (4) 3)

$$(z-1)^3 Z'_{3,r} = z^{r-2}(z-1)^3 + z^{r-3}(z^2-1)^3 + \dots + z(z^{r-2}-1)^3 + (z^{r-1}-1)^3 \\ = z^{r+1} \frac{z^{2(r-1)}-1}{z^2-1} - 3z^r \cdot \frac{z^{r-1}-1}{z-1} + 3(r-1)z^{r-1} - \frac{z^{r-1}-1}{z-1}$$

$$(3) \quad (z-1)^4(z+1)Z'_{3,r} = z^{r+1}(z^{2(r-1)}-1) \\ - (z^{r-1}-1)(3z^r+1)(z+1) + 3(r-1)z^{r-1}(z^2-1).$$

$$(3)^a \quad \frac{1}{4}(z-1)^5(z+1)Z''_{3,r} = z^{r-2}[z^{2r}-1 + (z^2-1)((r^2-3r+1)z \\ - (r^2-2r+2))] - (z+1)(1+z^{2r-2}((2r-3)z - (2z-2))).$$

Die Coefficienten  $C_{4,r}$ ,  $C_{5,r}$  ... lassen sich mittelst des Polynomischen Satzes oder der bekannten Formeln für die Entwicklung von

$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^m = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$  finden \*).

## § 29.

Bedeutend einfacher gestaltet sich die Entwicklung von  $A_r$  nach Potenzen von  $g$  für

$$(1) \quad z = 1 + tf'(x) = 0$$

Schliesst das Intervall  $(cc')$  die Wurzel  $x$  ein, ändert in demselben  $f'x$  und  $f''x$  ihr Zeichen nicht und liegt  $x$  zwischen  $c$  und  $c'$  auf derjenigen Seite von  $x$ , wo  $fx$  und  $f''x$  gleiche Zeichen haben, so ist die Annahme  $z = 0$  statthaft.

Setzen wir in § 28. I. (2)  $z = 0$ , so kommt

\*) Es ist

$$A_0 = a_0^m$$

$$a_0A_1 = ma_1A_0$$

$$2a_0A_2 = 2ma_2A_0 + (m-1)a_1A_1$$

$$3a_0A_3 = 3ma_3A_0 + (2m-1)a_2A_1 + (m-2)a_1A_2$$

$$4a_0A_4 = 4ma_4A_0 + (3m-1)a_3A_1 + (2m-2)a_2A_2 \\ + (m-3)a_1A_3$$

⋮

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{1,r} = 1 \quad \dots \quad \text{für } r \geq 1 \\ C_{2,r} = k_1 \quad \dots \quad \text{,, } r \geq 2 \\ C_{3,r} = k_2 + 2k_1^2 \quad \dots \quad \text{,, } r \geq 3 \\ C_{4,r} = k_3 + 5k_2k_1 + 5k_1^3 \quad \dots \quad \text{,, } r \geq 4 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Wir sehen hieraus: die Coefficienten  $C_{1,r} C_{2,r} \dots C_{4,r}$  sind von  $r$  unabhängig wenn  $r \geq 4$ , und wenn wir uns die Entwicklung von § 28.

I. (2) fortgesetzt denken mit Hilfe von § 28. Anmerkung, so ergibt sich

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{1,r}, C_{2,r} \dots C_{m,r} \dots C_{r,r} \\ \text{sind in dem Fall } z=0 \text{ nur von } k_1, k_2 \dots, \text{ nicht von } r \text{ ab-} \\ \text{hängig.} \end{array} \right.$$

Mithin ist

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{m,r} = C_{m,\infty}, \text{ sei } = C_m, \\ \text{wenn } m \leq r. \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \Delta_r &= C_1 g + C_2 g^2 + \dots C_{r-1} g^{r-1} + C_r g^r + C_{r+1} r g^{r+1} + \dots \\ \Delta_{r-1} &= C_1 g + C_2 g^2 + \dots C_{r-1} g^{r-1} + C_r r g^r + \dots \end{aligned}$$

Zwischen beiden Werten besteht die Relation

$$g = \Delta_r - k_1 \Delta_{r-1}^2 - k_2 \Delta_{r-1}^3 - \dots - k_{n-1} \Delta_{r-1}^n$$

und es folgt hieraus:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1, C_2, C_3 \dots \text{ sind die Coefficienten der sogenannten um-} \\ \text{kehrten Reihe von} \\ \text{d. i.:} \quad g = \Delta - k_1 \Delta^2 - k_2 \Delta^3 - \dots - k_{n-1} \Delta^n \\ \quad \Delta = C_1 g + C_2 g^2 + \dots \end{array} \right.$$

### § 30.

I. Betrachten wir die Summe der  $r$  ersten Glieder in § 29 (5)

$$S_r = C_1 g + C_2 g^2 + \dots C_r g^r$$

etwas näher.

Die Coefficienten ergeben sich nach den bekannten Formeln für die Umkehrung der Reihen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = k_2 \\ C_3 = 2k_1^2 + k_2 \\ C_4 = 5k_1^3 + 5k_1k_2 + k_3 \\ C_5 = 14k_1^4 + 21k_1^2k_2 + 6k_1k_3 + 3k_2^2 + k_4 \\ C_6 = 42k_1^5 + 84k_1^3k_2 + 28k_1^2k_3 + 28k_1k_2^2 + 7k_1k_4 + 7k_2k_3 + k_5 \\ C_7 = 132k_1^6 + 330k_1^4k_2 + 120k_1^3k_3 + 180k_1^2k_2^2 + 36k_1^2k_4 \\ \quad + 72k_1k_2k_3 + 8k_1k_5 + 12k_2^3 + 8k_2k_4 + 4k_3^2 + k_6 \\ \vdots \end{array} \right.$$

II. Ein Bildungsgesetz für  $C_1, C_2 \dots$  finden wir wie folgt.

Die erste Reihe in § 29. (6) ist identisch mit

$$0 = fx + \frac{f'x}{1!} \Delta + \frac{f''x}{2!} \Delta^2 + \dots = f(x + \Delta),$$

also

$$x + \Delta = \alpha.$$

Die umgekehrte Reihe für  $\Delta$  ist

$$\Delta = F(-fx) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} (-fx) + \frac{F''(0)}{2!} (-fx)^2 + \dots,$$

wo

$$F(0) = 0$$

$$F'(0) = \frac{d\Delta}{d(-fx)} = \frac{1}{f'x}, \text{ sei } = \varphi_1 x$$

$$F''(0) = \dots = \frac{\varphi'_1 x}{f'x}, \text{ sei } = \varphi_2 x$$

$$F'''(0) = \dots = \frac{\varphi'_2 x}{f'x}, \text{ sei } = \varphi_4 x$$

$\vdots$

$$(1) \dots \dots \dots \frac{\varphi'_{r-1}}{f'x}, \text{ sei } = \varphi_r x.$$

$$(2) S_r = -\frac{\varphi_1 x}{1} fx + \frac{\varphi_2 x}{2!} (fx)^2 - \frac{\varphi_3 x}{3!} (fx)^3 + \dots (-1)^r \frac{\varphi_r x}{r!} (fx)^r$$

also unser

$$(3) \dots \dots \dots C_r = \frac{\varphi_r x}{r!} (f'x)^r.$$



Sei wie früher zur Abkürzung

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ferner} \\ t = -\frac{1}{f'x}, \quad tfx = g, \quad k_r = \frac{tfx^{r+1}}{(r+1)!} \\ \frac{dC_r}{dx} = C'_r, \quad \frac{dt}{dx} = t', \quad \frac{dk_r}{dx} = k'_r. \end{array} \right.$$

Die Gleichung (2) ist gleichbedeutend mit

$$rC_r t^{r-1} = \frac{d(C_{r-1} t^{r-1})}{dx} = C_{r-1}(r-1)t^{r-2}t' + C'_{r-1}t^{r-1},$$

oder, da

$$t' = 2k_1 t, \quad \text{mit}$$

$$(5) \quad rC_r = 2(r-1)C_{r-1}k_1 + C'_{r-1}.$$

Ferner

$$k_r' = \frac{tfx^{r+2}}{(r+1)!} + \frac{t'}{t} \frac{tfx^{r+1}}{(r+1)!}$$

$$(6) \quad k'_r = (r+2)k_{r+1} + 2k_1 k_r.$$

Mit Hilfe von (5) und (6) findet man successive

$$C_2 = k_1; \quad 3C_3 = 4C_2 k_1 + k'_1 = 4k_1^2 + \underbrace{(3k_2 + 2k_1^2)}_{=k'_1} = 6k_1^2 + 3k_2,$$

$$C_3 = 2k_1^2 + k_2; \quad 4C_4 = 6(2k_1^2 + k_2)k_1 + 4k_1(3k_2 + 2k_1^2) + \underbrace{(4k_3 + 2k_1 k_2)}_{=k'_2}$$

$$C_4 = 5k_1^3 + 5k_2 k_1 + k_3 \quad \text{u. s. f.}$$

III. Unter der Voraussetzung, dass  $x$  der Wurzel  $w$  hinreichend nahe liegt, findet man auf bekannten Wege:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Die Reihe } S_r \text{ convergirt und hat zur Grenze} \\ w - x, \text{ mithin} \end{array} \right. \quad w = x + \lim S_r$$

Je grösser  $r$ , desto näher kommt

$$x + S_r$$

der Wurzel  $w$  und zwar auf der pos. oder neg. Seite. Bleibt man beim ersten Gliede stehen, so hat man den Euler'schen Näherungswert

$$x + g = x - \frac{fx}{f'x}$$

wenn beim 2ten Gliede, so kommt

$$x + g + k_1 g^2 = x - \frac{fx}{f'x} - \frac{f''x}{2!} \cdot \frac{(fx)^2}{(f'x)^3}$$

u. s. f. die bekannten Näherungswerte \*).

Geometrisch gedeutet ist

$$x + S_r$$

die Abscisse des Durchschnitts der  $X$  Achse mit einer Curve, deren Gleichung von der Form ist

$$x = F(y) = \beta_0 y + \beta_1 y^2 + \dots \beta_r y^r$$

und welche mit der Curve

$$y = fx$$

eine Berührung der  $r$ ten Ordnung in dem jenem  $x$  entsprechenden Curvenpunkt hat. (Die Bedingung ist, dass für beide Curven

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^r y}{dx^r}$$

übereinstimmen,

$$\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}$$

dagegen nicht.

## B. Bestimmung von $x$ in § 25. I. (1).

### § 31.

Sei  $w$  eine Wurzel in  $(cc')$ ,  $c < x_1 < c'$ , so ist nach § 25. und § 11.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + t f x_1 \\ \text{ein zwischen } x_1 \text{ und } w \text{ liegender Wert, wenn} \\ t = -\frac{f}{F'c'} = -\frac{k}{r(c' - c + a)^{r-1}}, \end{array} \right.$$

wo

$$1) \quad a > 0$$

und bei Unterscheidung der Fälle

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - w) f x_1 \geq 0 \\ (x_1 - w) f x_1 \leq 0 \end{array} \right.$$

oder einfacher, wenn  $w$  keine mehrfache Wurzel ist)

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(w+0) \geq 0 \\ f(w+0) \leq 0 \end{array} \right.$$

\*) Methode von Lagrange, Mem. der Berl. Akademie, 24. Bd.

2)  $r = n$ : ad a)

$r$  = Exponent des 1sten negativen Gliedes von

$$f(x+c) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots c_n: \text{ad b)}$$

3)  $k = k_{n,1}^+$ : ad a)

$k = k_{n,1}^-$ : ad b) (beliebig  $< 0$  wenn  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} > 0$ ), mit  
mit  $k_{n,1}^{\pm}$  den absolut kleinsten unter den  $\begin{cases} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{cases}$  Werten von

$$k_n, k_{n-1} \dots k_e = \binom{r}{e} \frac{a^{r-e}}{c_{n-e}} \dots k_1 \text{ bezeichnet.}$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Ist } x_1 < w, c' > x_1 \text{ aber unbestimmt ob } c' > w, \text{ so liegt} \\ \text{derjenige der beiden Werte} \\ \\ x = x_1 + t f x_1 \text{ und } c', \\ \\ \text{welcher sich näher an } y_1 \text{ befindet, zwischen } x_1 \text{ und } w. \\ \text{Analoges gilt für jede obere Grenze } x_1 \text{ von } w. \end{array} \right.$$

### § 32.

Das  $x$  in § 31. (1) als Function von  $a$ .

Der Coefficient  $k = k_{n,1}^{\pm}$  ist von der Form

$$k_e$$

also

$$(1) \quad x = x_1 - \frac{\binom{r}{e}}{r c_{n-e}} \cdot \frac{a^{r-e}}{(c' - c + a)^{r-1}} \cdot f x_1,$$

wo  $e$  im Allgemeinen jeder der Exponenten  $n \dots 1$  sein kann.

Durchläuft  $a$  alle Werte von 0 bis  $+\infty$ , so ändert sich  $e$  in der  
in § 14. (T. LVIII. S. 130) festgestellten Weise.

Wie dort sei

$(a, a')$  dasjenige Intervall von  $a$ , welchem  $e = r - s$  entspricht.

$a$  in diesem das vorteilhafteste  $a$ , d. h. für welches  $x - x_1$  ab-  
solut am grössten.

$x$  das zugehörige  $x$ .

$\left. \begin{matrix} a \\ a \\ a \\ x \end{matrix} \right\}$  die überhaupt vorteilhaftesten Werte von  $a$  und  $x$ .

Es ist  $\overset{v}{a}$  dasjenige  $a$ , für welches die Function

$$G(a) = \frac{a^{r-e}}{(d+a)^{r-1}},$$

wo

$$d = c' - c,$$

$$a_s < a < a'_s$$

den grössten Wert besitzt.

Die Differentiirung nach  $a$  ergibt:

$$\begin{aligned} (d+a)^{2(r-1)} G'(a) &= (d+a)^{r-1}(r-e)a^{r-e-1} - (d+a)^{r-2}(r-1)a^{r-e}, \\ (d+a)^r G'(a) &= a^{r-e-1}((r-e)d - (e-1)a), \end{aligned}$$

somit

$$G'a \overset{=}{>} 0 \quad \text{wenn} \quad a \overset{=}{>} \frac{r-e}{e-1} d.$$

Hieraus lässt sich erkennen, welchen Verlauf  $G(a)$  nimmt, wenn  $a$  von 0 bis  $+\infty$  wächst.

- (2)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ist 1) } e = r, \text{ so nimmt } G(a) \text{ beständig ab (von } \frac{1}{d^{r-1}} \text{ bis } 0), \text{ daher} \\ \qquad \qquad \qquad \overset{v}{a_0} = a_0 \\ \text{2) } e = 1, \text{ so wächst } G(a) \text{ mit } a \text{ (von 0 bis 1), folglich} \\ \qquad \qquad \qquad \overset{v}{a_{r-1}} = a'_{r-1} \\ \text{3) } 1 < e < r, \text{ so wächst } G(a) \text{ mit bis zu dem Werte, der} \\ \qquad \qquad \qquad a = \overset{m}{a} = \frac{r-e}{e-1} d = \frac{s}{e-1} \cdot d \text{ entspricht} \\ \qquad \qquad \qquad \overset{v}{a} = \text{mittlerem der Werte } a_s, a'_s, a_s. \end{array} \right.$

Das der Wurzel  $w$  am nächsten kommende  $\overset{v}{x}$  berechnet sich wie folgt.

(3)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ermittle für jeden möglichen Exponenten } e \text{ (die Bedeutung von } e \text{ geht aus der von } k, \text{ siehe oben, hervor) der} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{pos.} \\ \text{neg.} \end{array} \right\} \text{ Glieder unter } c_0 c_1 \dots c_{n-1} \text{ je nachdem } (x_1 - w) f x_1 \begin{array}{l} \leq 0, \\ \geq 0, \end{array} \\ \text{das } a \text{ nach (2), die entsprechenden } x \text{ nach (1) und unter} \\ \text{diesen das von } x_1 \text{ am meisten absteigende.} \end{array} \right.$

### Beispiel.

Die kleinste Wurzel  $w$  von

$$36x^4 - 13,2x^3 + 1,44x^2 + 4,312x - 0,3584 = 0 \quad (3 \text{ Wechsel})$$

zu berechnen.

Für  $c = 0$ ,  $x_1 = 0$  finden wir

$$a = \sqrt[4]{\frac{4,312}{\binom{4}{1} 36}} = 0,3107.$$

Sei  $a = 0,311$ , so wird  $k = k_4 = \frac{1}{36}$

$$x - x_1 = \frac{0,3584}{4 \cdot 36 \cdot (0,311 + c')^3}$$

und unter Anwendung des Kriteriums (2) in § 31., indem wir  $c' = 0,05$  wählen,

$$w > 0,05.$$

(Die weitere Annäherung geschieht am zweckmässigsten nach der Euler'schen Methode, was sich herausstellt, wenn man die Gleichung nach 0,1 transformiert und  $f''(0,05)$  berechnet,  $f''(0,05)$  ist  $= 0$ ).

### § 33.

Seien die  $a_s$  der Grösse nach

$$\begin{array}{cccc} b_0 (= 0), & b_1, & b_2 \dots b_{m-1}, & b_m \dots \quad (< \infty) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{ferner} & e_0 & e_1 & e_{m-1} \quad e_m (= r) \\ \text{und} & s_0 & s_1 & s_{m-1} \quad s_m (= 0) \end{array}$$

die den darüber stehenden Intervallen zugehörigen  $e$  und  $s (= r - e)$ .

Dadurch, dass man

$$c \quad \text{und} \quad c'$$

der Wurzel  $w$  sehr nahe rückt, lässt sich erreichen, dass

$$\begin{aligned} \text{für } e = e_{m-1} : a &= \frac{r-e}{e-1} (c'-c) < b_{m-1} \\ \text{,, } e = e_{m-2} : \text{,,} &= \text{,,} < b_{m-2} \\ \vdots & \\ \text{,, } e = e_1 : \text{,,} &= \text{,,} < b_1, \end{aligned}$$

mithin nach § 32. (3), wenn nur die Exponenten  $e_1 \dots e_m$  ins Auge gefasst werden,

$$a = b_1$$

Unter obiger Voraussetzung, dass  $w - c$  sehr klein, ist ferner

$$e_0 = 1$$

falls das Vorzeichen von  $(x_1 - w)fx_1$  mit dem von  $c_{n-1} = f'(c)$  übereinstimmt.

Nach § 32. (3) ist

$$a = b_1.$$

Unter allen  $a$  zwischen 0 und  $+\infty$  ist folglich

$$a = b_1.$$

(1) Der Formel § 32. (1) genügt, wenn das Vorzeichen von  $x_1 - w$  = dem von  $\frac{fx_1}{c_{n-1}}$  :

$$x = x_1 - \frac{ra^{r-2}fx_1}{c_{n-1}(c' - c + a)^{r-1}},$$

wo  $a = b_1$  = kleinste der Wurzeln der Gleichungen  $k_1 = k_m$ , für  $m$  der Reihe nach die Exponenten derjenigen Glieder von  $f(x+c) = 0$  gesetzt, die dasselbe Vorzeichen wie  $c_{n-1}$  haben,

$$b_1 = \sqrt[r]{\frac{(r)}{p} \cdot \frac{c_{n-1}}{c_{n-p}}}, \quad p = e_1.$$

Nach Obigen ist

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_1, \\ \text{wenn } c' - c \text{ hinreichend klein.} \end{array} \right.$$

## § 34.

In dem Ausdruck für  $x$  in § 33. (1) kommen vor:

$$x_1, c', c; \quad r, c_{n-1}, e_1 = p, e_{n-p}$$

von denen die drei ersten von einander unabhängig sind, die übrigen nur von  $c$  abhängen.

Dadurch, dass wir bei constantem  $x_1$  und  $c'$  das  $c$  dem  $w$  nahe bringen, können wir erreichen, dass bei weiterer Annäherung von  $c$

$r$  unverändert bleibt,

nicht aber im Allgemeinen  $e_1$ .

Nehmen wir vorläufig auch

$$e_1 = p = \text{const.}$$

an und untersuchen die Abhängigkeit des  $x$  von  $c$  bei gegebenem  $x_1$  und  $c'$ .

Es ist

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{wo} \\ x - x_1 = -r f(x_1) \cdot F(c), \\ F(c) = \frac{a^{r-1}}{f'(c) \cdot (c' - c + a)^{r-1}}, \\ a = \sqrt[p-1]{\frac{\binom{r}{p} p!}{r} \cdot \frac{f'(c)}{f''(c)}}. \end{array} \right.$$

Die vorletzte dieser Gleichungen differentiirt, giebt wenn kurz  $F$ ,  $F'$ ,  $f$  ... statt  $F(c)$ ,  $F'(c)$ ,  $f(c)$  ... und  $( )$  statt  $(c' - c + a)$  gesetzt wird:

$$( )^{2r-2} f'^2 F' = ( )^{r-1} (r-1) a^{r-2} f' \frac{da}{dc} - a^{r-1} ((r-1) ( )^{r-2} f' \left( \frac{da}{dc} - 1 \right) + ( )^{r-1} f''),$$

$$\frac{( )^r f'^2 F'}{a^{r-2}} = ( ) (r-1) f' \frac{da}{dc} - a(r-1) f' \left( \frac{da}{dc} - 1 \right) - a ( ) f''$$

$$(2) \quad ,, \quad = (c' - c) ((r-1) f' \frac{da}{dc} - a f'') + a ((r-1) f' - a f'').$$

Um  $\frac{da}{dc}$  zu bilden, differentiiren wir die sich aus (1) ergebende Formel

$$a^{p-1}f^p = R \cdot f', \quad \text{wo} \quad R = \frac{\binom{r}{p} p!}{r};$$

$$a^{p-1}f^{p+1} + (p-1)a^{p-2} \frac{da}{dc} f^p = R f'',$$

$$\frac{da}{dc} = \frac{R f'' - a^{p-1} f^{p+1}}{(p-1)a^{p-2} f^p}$$

Der Factor von  $(c' - c)$  in (2) ist ein Bruch, dessen Nenner  $-(p-1)a^{p-2}f^p$  und dessen Zähler =

$$\begin{aligned} & R(r-1)f''f' - a^{p-1}((r-1)f'f^{p+1} + (p-1)f''f^p) \\ &= a^{p-1}((r-1)f''f^p - (r-1)f'f^{p+1} - (p-1)f''f^p) \\ &= a^{p-1}((r-p)f''f^p - (r-1)f'f^{p+1}) \end{aligned}$$

Gleichung (2) geht über in

$$(2)^a \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(c' - c + a)^r}{a^{r-1}} f'^2 F'(c) = (c' - c)G(c) + H(c), \\ \text{worin} \\ G(c) = \frac{(r-p)f''f^p - (r-1)f'f^{p+1}}{(p-1)f^p}, \\ H(c) = (r-1)f' - a f''. \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ist 1) } c' - c \text{ hinreichend klein und } H(c) \geq 0, \text{ so ist das} \\ \text{Vorzeichen} \\ \text{von } F'(c) = \text{dem von } H(c) \\ \text{Ist 2) } H(c) = 0, \text{ so ist jenes} = \text{dem von } G(c). \end{array} \right.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:  $p \geq 2$ .

1. Fall:  $p > 2$ .

$$H(c) = ((r-1)\frac{f'}{f''} - a)f'' \geq 0.$$

Haben  $f''$  und  $f'$  entgegengesetzte Zeichen, so ist  $(r-1)\frac{f'}{f''} - a < 0$ ,  
haben sie gleiche, so  $(r-1)\frac{f'}{f''} > 0$ .

(Siehe die Bedeutung von  $p$  § 33 (1)).

also: Vorzeichen von  $(r-1)\frac{f'}{f''} - a = \text{dem von } f''f'$

nach (3) 1) " "  $H(c) = \text{" " } f'$   
" "  $F'(c) = \text{" " } f'.$





## IX.

Sur les lignes asymptotiques de la surface  
représentée par l'équation  $XYZ = T^3$ .

Par

Paul Appell.

Les coordonnées d'un point de cette surface peuvent s'exprimer en fonction de deux paramètres  $u$  et  $v$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X &= T e^{\alpha u + \alpha^2 v} \\ Y &= T e^{\alpha^2 u + \alpha v} \\ Z &= T e^{u+v} \end{aligned} \quad (1)$$

$\alpha$  et  $\alpha^2$  étant les racines cubiques imaginaires de l'unité, c'est à dire vérifiant la relation

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0$$

Les courbes représentées par les équations (1) quand on y suppose  $u$  ou  $v$  constant sont les lignes asymptotiques de la surface. Pour le démontrer nous allons faire voir que le plan osculateur à la ligne  $v = v_1$  est tangent à la surface. Soit

$$(2) \quad AX + BY + CZ + DT = 0$$

l'équation du plan osculateur à la ligne  $v = v_1$  au point  $u = u_1$ ; l'équation

$$A e^{\alpha u + \alpha^2 v_1} + B e^{\alpha^2 u + \alpha v_1} + C e^{u+v_1} + D = 0$$

devra admettre la racine triple  $u = u_1$ . Il faut donc que  $u_1$  soit racine de cette équation et de ses deux premières dérivées; ce qui donne pour déterminer les coefficients  $A, B, C, D$  les relations

$$\begin{aligned} Ae^{\alpha u_1 + \alpha^2 v_1} + B e^{\alpha^2 u_1 + \alpha v_1} + C e^{u_1 + v_1} + D &= 0 \\ \alpha A e^{\alpha u_1 + \alpha^2 v_1} + \alpha^2 B e^{\alpha^2 u_1 + \alpha v_1} + C e^{u_1 + v_1} &= 0 \\ \alpha^2 A e^{\alpha u_1 + \alpha^2 v_1} + \alpha B e^{\alpha^2 u_1 + \alpha v_1} + C e^{u_1 + v_1} &= 0 \end{aligned}$$

Ajoutons ces relations membre à membre; nous en déduisons

$$3C e^{u_1 + v_1} + D = 0$$

Multiplions la deuxième des relations par  $\alpha$ , la troisième par  $\alpha^2$  et ajoutons les de nouveau; nous avons

$$3B e^{\alpha^2 u_1 + \alpha v_1} + D = 0$$

Enfin multiplions la deuxième par  $\alpha^3$ , la troisième par  $\alpha$  et ajoutons, nous avons:

$$3A e^{\alpha u_1 + \alpha^2 v_1} + D = 0$$

L'équation (2) du plan osculateur est donc

$$(3) \quad X e^{-\alpha u_1 - \alpha^2 v_1} + Y e^{-\alpha^2 u_1 - \alpha v_1} + Z e^{-u_1 - v_1} - 3T = 0$$

Or il est facile de voir que le plan est tangent à la surface. En effet l'équation du plan tangent à la surface au point

$$\begin{aligned} X_1 &= T_1 e^{\alpha u_1 + \alpha^2 v_1}, \\ Y_1 &= T_1 e^{\alpha^2 u_1 + \alpha v_1}, \\ Z_1 &= T_1 e^{u_1 + v_1} \end{aligned}$$

est

$$XY_1 Z_1 + YZ_1 X_1 + ZX_1 Y_1 - 3TT_1^3 = 0$$

ou

$$\frac{X}{X_1} + \frac{Y}{Y_1} + \frac{Z}{Z_1} - \frac{3T}{T_1} = 0$$

ou enfin

$$X e^{-\alpha u_1 - \alpha^2 v_1} + Y e^{-\alpha^2 u_1 - \alpha v_1} + Z e^{-u_1 - v_1} - 3T = 0$$

ce qui est justement l'équation (3).

La ligne  $v = v_1$  est donc bien une ligne asymptotique de la surface. On verrait de même que la ligne  $u = u_1$  est une ligne asymptotique de la surface.

Paris, le 21 Mars 1877.

## X.

## Zur Kinematik des Auges.

Von

R. Hoppe.

## §. 1. Allgemeine directe Stellungsänderung durch eine Rotation.

Bekanntlich lässt sich ein starres System durch Rotation um eine Axe aus jeder Anfangslage in eine beliebig gegebene Stellung bringen. Die Lösung wird gewöhnlich constructiv gegeben, doch eignet sich gerade für diese Aufgabe die analytische Behandlung besonders, damit der Einblick nicht durch die Vorstellung einer so grossen Mannichfaltigkeit, wie jene Bewegung sie darbietet, bedingt sei.

Da es sich nur um die Stellung handelt, so können wir einen Punkt des Systems als fest annehmen. Dieser sei Anfang der im Raume festen Coordinaten  $xyz$  und der am bewegten System festen  $x_1y_1z_1$ , welche durch die Relationen

$$\left. \begin{aligned} x &= ax_1 + a_1y_1 + a_2z_1 \\ y &= bx_1 + b_1y_1 + b_2z_1 \\ z &= cx_1 + c_1y_1 + c_2z_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

verbunden seien. Die Axensysteme der  $xyz$  und  $x_1y_1z_1$  mögen jetzt die Anfangs- und Endstellung repräsentiren. Es seien also als constant gegeben die Richtungs cosinus

der Axen der		$x_1$	$y_1$	$z_1$	gegen
die Axen der	{	$x$	$a$	$a_1$	$a_2$
		$y$	$b$	$b_1$	$b_2$
		$z$	$c$	$c_1$	$c_2$

Die Richtungscosinus der gesuchten Rotationsaxe seien  $A, B, C$  bezüglich auf die Axen der  $x, y, z$ .

Geht nun ein Punkt  $P$  durch Rotation um dieselbe in  $P_1$  über, und sind  $x, y, z$  die Coordinaten von  $P$ , und  $x_1, y_1, z_1$  die von  $P_1$  in Bezug auf das Raumsystem, so wird derselbe Punkt  $P_1$  bezüglich auf die Axen der  $x_1, y_1, z_1$  durch die Coordinaten  $x, y, z$ , bezüglich auf die Axen der  $x, y, z$  durch die Coordinaten  $x_1, y_1, z_1$  bestimmt. Folglich ist gemäss den Relationen (1)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= ax + a_1y + a_2z \\ y_1 &= by + b_1y + b_2z \\ z_1 &= cx + c_1y + c_2z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Nach diesen vorbereitenden Festsetzungen sind die Bedingungen der Rotation aufzustellen. Erstens müssen  $P$  und  $P_1$  auf einer Ebene liegen, die normal zur Rotationsaxe ist. Diese schneide letztere in  $N$  im Abstand  $= u$  vom Anfangspunkt. Ihre Gleichung, sofern beide Punkte sie befriedigen, lautet:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz &= u \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= u \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Zweitens muss  $PN = P_1N$  sein. Bezeichnet  $r$  den Radiusvector, der vermöge der Gl. (2) für  $P$  und  $P_1$  denselben Wert hat, so ist bedingungslos

$$PN^2 = P_1N^2 = r^2 - u^2$$

und wir brauchen nur zu notiren:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2$$

Drittens muss der Winkel  $PNP_1 = \mu$  für alle Punkte ( $xyz$ ) denselben gegebenen Wert haben. Dies wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{(x - Au)(x_1 - Au)}{r^2 - u^2} + \frac{(y - Bu)(y_1 - Bu)}{r^2 - u^2} + \frac{(z - Cu)(z_1 - Cu)}{r^2 - u^2} = \cos \mu$$

oder, entwickelt mit Anwendung von (3):

$$\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1 - u^2}{r^2 - u^2} = \cos \mu$$

Woraus:

$$u^2(1 - \cos \mu) = xx_1 + yy_1 + zz_1 - (x^2 + y^2 + z^2) \cos \mu$$

das ist nach (2) und (3):

$$\begin{aligned} (Ax + By + Cz)^2(1 - \cos \mu) &= x(ax + a_1y + a_2z) + y(by + b_1y + b_2z) \\ &\quad + z(cx + c_1y + c_2z) - (x^2 + y^2 + z^2) \cos \mu \end{aligned}$$

Um nun aus vorstehenden Relationen die Werte von  $A$ ,  $B$ ,  $C$  zu finden, identificiren wir bloss die Coefficienten der letzten Gleichung. Dies giebt:

$$\left. \begin{aligned} A^2(1 - \cos \mu) &= a - \cos \mu \\ B^2(1 - \cos \mu) &= b_1 - \cos \mu \\ C^2(1 - \cos \mu) &= c_2 - \cos \mu \\ 2BC(1 - \cos \mu) &= b_2 + c_1 \\ 2CA(1 - \cos \mu) &= c + a_2 \\ 2AB(1 - \cos \mu) &= a_1 + b \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Durch Addition der 3 ersten Gleichungen erhält man:

$$\cos \mu = \frac{a + b_1 + c_2 - 1}{2} \quad (5)$$

durch Division je zweier der 3 letzten:

$$A(b_2 + c_1) = B(c + a_2) = C(a_1 + b) = D \quad (6)$$

und zwar ist

$$D^2 = BC(c + a_2)(a_1 + b) = \frac{(b_2 + c_1)(c + a_2)(a_1 + b)}{2(1 - \cos \mu)}$$

oder nach (5)

$$D^2 = \frac{(b_2 + c_1)(c + a_2)(a_1 + b)}{3 - a - b_1 - c_2} \quad (7)$$

Hiermit sind die 3 ersten Gleichungen erfüllt; da aber

$$\begin{aligned} (c + a_2)(a_1 + b) &= ca_1 + ba_2 + a_1a_2 + bc \\ &= (b_2 + c_1a) + (c_1 + ab_2) - (b_1b_2 + c_1c_2) - (b_1c_1 + b_2c_2) \\ &= (b_2 + c_1)(1 + a - b_1 - c_2) = 2(b_2 + c_1)(a - \cos \mu) \\ &= 2A^2(1 - \cos \mu)(b_2 + c_1) \end{aligned}$$

und analog

$$(a_1 + b)(b_2 + c_1) = 2B^2(1 - \cos \mu)(c + a_2)$$

ist, so folgt nach Multiplication die sechste und ebenso die übrigen. Daher giebt es stets eine und nur eine Rotationsaxe und einen Rotationswinkel  $\mu$  bestimmt durch Gl. (6) (7) (5), welche das Axensystem aus einer in die andre gegebene Stellung überführen.

Will man umgekehrt aus gegebener Rotation um gegebene Axe die resultirende Stellung finden, so hat man unmittelbar:

$$\begin{aligned} a &= A^2 + (1 - A^2) \cos \mu; & b_1 &= B^2 + (1 - B^2) \cos \mu \\ c_2 &= C^2 + (1 - C^2) \cos \mu \end{aligned}$$

Von den übrigen Richtungscosinus sind zunächst die Summen dreier Paare bekannt. Die Differenzen derselben Paare werden durch die allgemeingültigen Relationen

$$\begin{aligned}(b_2 - c_1)(a_1 - b) &= (c + a_2)(1 + a + b_1 + c_2) \\ (c - a_2)(a_1 - b) &= (b_2 + c_1)(1 + a + b_1 + c_2)\end{aligned}$$

auf eine, z. B.  $a_1 - b$ , zurückgeführt, die dann allein irrational durch

$$(a_1 - b)^2 + (a + b_1)^2 = (1 + c_2)^2$$

bestimmt ist. Setzt man für  $a$ ,  $b_1$ ,  $c_2$ ,  $b_2 + c_1$ ,  $c + a_2$ ,  $a_1 + b$  ihre Werte, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} b_2 \\ c_1 \end{aligned} \right\} &= BC(1 - \cos \mu) \pm A \sin \mu \\ \left. \begin{aligned} c \\ a_2 \end{aligned} \right\} &= CA(1 - \cos \mu) \pm B \sin \mu \\ \left. \begin{aligned} a_1 \\ b \end{aligned} \right\} &= AB(1 - \cos \mu) \pm C \sin \mu \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

## §. 2. Abhängigkeit der Augenstellung von der Sehrichtung.

Der Augapfel lässt sich als eine Kugel betrachten, die sich in ihrer Oberfläche verschiebt; ihr Mittelpunkt  $O$  ist daher ihr fester Punkt. Selbstverständlich wird die Augenhöhle immer als ruhend angenommen, und jede Bewegung des Auges bedeutet eine zu ihr relative. Alsdann sind überhaupt 3 unabhängige Bewegungen des Auges denkbar, von denen aber dasselbe nur 2 ausführen kann. Da nun die Sehrichtung nach 2 Dimensionen variabel ist, so ist durch sie immer die Augenstellung vollständig bestimmt; es handelt sich um den analytischen Ausdruck der Abhängigkeit.

Das Listing'sche Gesetz, welches die Bedingung enthält, setzt eine gewisse Normalstellung des Auges voraus, auf welche alle andern Stellungen Bezug haben. Das Gesetz besteht dann darin, dass die Sehlinie, d. i. der durch den Mittelpunkt der Linse gehende Radius, von der Normalstellung aus nach jeder andern Stellung hin längs einer Ebene, und diese in sich selbst gleitet, oder einfacher, dass der Augapfel von der Normalstellung aus nur um Axen normal zur Sehlinie rotieren kann.

In der Normalstellung mögen die am Auge festen Axen der  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  mit den im Raume festen Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  zusammenfallen, und zwar sei die Sehlinie Axe der  $z_1$ . Wenn dann das Auge von der

Normalstellung aus rotirt, so ist  $C = 0$ , daher nach (6)  $D = 0$ , und demzufolge wieder nach (6)

$$b_2 + c_1 = 0; \quad c + a_2 = 0 \quad (9)$$

ferner nach der dritten Gl. (4)

$$c_2 = \cos \mu \quad (10)$$

mithin zufolge (5)

$$c_2 = a + b_1 - 1 \quad (11)$$

Jetzt erhält man mit Anwendung von (9):

$$\begin{aligned} a &= b_1 c_2 - c_1 b_2 = b_1 c_2 + b_2^2 \\ b_1 &= c_2 a - a_2 c = c_2 a + a_2^2 \end{aligned}$$

Zu beiden einzeln addirt (11) giebt:

$$1 + c_2 = (1 + c_2) b_1 + b_2^2 = (1 + c_2) a + a_2^2 \quad (12)$$

Endlich findet man mit Anwendung von (9), dann von (12):

$$\begin{aligned} -a_1 a_2 &= a_1 c = b_2 + c_1 a = b_2 (1 - a) = \frac{a_2^2 b_2^2}{1 + c_2} \\ -b b_2 &= b c_1 = a_2 + c b_1 = a_2 (1 - b_1) = \frac{a_2 b_2^2}{1 + c_2} \end{aligned}$$

Demnach entspricht der Sehrichtung ( $a_2 b_2 c_2$ ) die Augenstellung:

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 - \frac{a_2^2}{1 + c_2}; & b &= -\frac{a_2 b_2}{1 + c_2}; & c &= -a_2 \\ a_1 &= -\frac{a_2 b_2}{1 + c_2}; & b_1 &= 1 - \frac{b_2^2}{1 + c_2}; & c_1 &= -b_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Das so specialisirte Orthogonalcoefficientensystem hat folgende Eigenschaft, von der wir Anwendung zu machen haben. Bezeichnen  $L, M, N$  und  $L'', M'', N''$  die Richtungscosinus einer beliebigen Geraden gegen die Axen der  $x, y, z$  und bzhw. der  $x_1, y_1, z_1$ , so ist nach (13)

$$\left. \begin{aligned} L'' &= aL + bM + cN = L - a_2 K \\ M'' &= a_1 L + b_1 M + c_1 N = M - b_2 K \\ N'' &= a_2 L + b_2 M + c_2 N = -N + (1 + c_2) K \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wo

$$K = \frac{a_2 L + b_2 M}{1 + c_2} + N = -\frac{a_2 L'' + b_2 M''}{1 + c_2} + N'' \quad (15)$$

gesetzt ist. Die Grösse  $K$  möge der Modul der Geraden in Bezug auf die Sehrichtung heissen. Ist derselbe null, so hat man:

$$L'' = L; \quad M'' = M; \quad N'' = -N \quad (16)$$



Dies findet statt bei allen Geraden, die in der Ebene

$$a_2x + b_2y + (1 + c_2)z = 0$$

liegen (oder ihr parallel sind).

### §. 3. Verfolgung einer geraden Linie mit dem Auge.

Seien  $P$  und  $P'$  zwei äussere Punkte, bei deren Anblick das Auge die in (13) ausgedrückte und bzhw. die gleichbezeichnete, durch einen Strich unterschiedene Stellung haben. Unterscheidet man nun durch 2 Striche die Richtungscosinus der Augenaxen beim Anblick von  $P'$  gegen diejenigen, welche beim Anblick von  $P$  stattfinden, so ist

$$\begin{aligned} a'' &= aa' + bb' + cc'; & a_1'' &= aa_1' + bb_1' + cc_1'; & a_2'' &= aa_2' + bb_2' + cc_2'; \\ b'' &= a_1a' + b_1b' + c_1c'; & b_1'' &= a_1c_1' + b_1b_1' + c_1c_1'; & b_2'' &= a_1a_2' + b_1b_2' + c_1c_2'; \\ c'' &= a_2a' + b_2b' + c_2c'; & c_1'' &= a_2a_1' + b_2b_1' + c_2c_1'; & c_2'' &= a_2a_2' + b_2b_2' + c_2c_2'. \end{aligned} \quad (17)$$

Führt man die, beiden Punkten entsprechenden Werte (13) ein und setzt zur Abkürzung

$$e = \frac{a_2a_2' + b_2b_2'}{(1 + c_2)(1 + c_2')} + 1 \quad (18)$$

so kommt:

$$\begin{aligned} a'' &= 1 - \frac{a_2^2}{1 + c_2} - \frac{a_2'^2}{1 + c_2'} + ea_2a_2'; & a_1'' &= -\frac{a_2b_2}{1 + c_2} - \frac{a_2'b_2'}{1 + c_2'} + ea_2b_2'; \\ b'' &= -\frac{a_2b_2}{1 + c_2} - \frac{a_2'b_2'}{1 + c_2'} + eb_2a_2'; & b_1'' &= 1 - \frac{b_2^2}{1 + c_2} - \frac{b_2'^2}{1 + c_2'} + eb_2b_2'; \\ c'' &= a_2 + a_2' - ea_2'(1 + c_2); & c_1'' &= b_2 + b_2' - eb_2'(1 + c_2) \\ a_2'' &= a_2 + a_2' - ea_2(1 + c_2') \\ b_2'' &= b_2 + b_2' - eb_2(1 + c_2') \\ c_2'' &= -1 - c_2 - c_2' + e(1 + c_2)(1 + c_2') \end{aligned} \quad (19)$$

Verfolgt nun das Auge die Gerade  $PP'$ , so gleitet die Sehlinie an der Ebene  $OPP'$ , rotirt also um deren Normale. Rotirte dann der Augapfel selbst um diese Normale, bewegte er sich demnach ebenso wie er sich nach Listing'schen Gesetz von der Normalstellung aus bewegt, so würde er beim Anblick von  $P'$  in einer Stellung ankommen, welche durch 3 Striche unterschieden sei, und für welche gemäss den Gl. (13)

$$a''' = 1 - \frac{a_2''^2}{1 + c_2''}; \quad b''' = -\frac{a_2''b_2''}{1 + c_2''}; \quad c''' = -a_2''$$

wäre. Die gedachte Stellung differirt von der wirklichen um einen Winkel  $\delta$  bestimmt durch die Gleichung

$$\begin{aligned}
\cos \delta &= a''a''' + b''b''' + c''c''' \\
&= a'' - c''a_2'' - a_2'' \frac{a''a_2'' + b''b_2''}{1 + c_2''} \\
&= a'' - c''a_2'' + a_2'' \frac{c''c_2''}{1 + c_2''} = a'' - \frac{c''a_2''}{1 + c_2''} \\
&= \frac{a'' + c_2''a'' - c''a_2''}{1 + c_2''} = \frac{a'' + b_1''}{1 + c_2''}
\end{aligned} \tag{20}$$

welcher die dazu nötige Verdrehung des Auges um die Sehlinie misst. Führt man die obigen Werte ein, so kommt:

$$\cos \delta = \frac{e^2(1 + c_2)(1 + c_2')}{e(1 + c_2)(1 + c_2') - c_2 - c_2'} - 1 \tag{21}$$

Sei  $P_0$  ein Punkt auf  $PP'$  und bezeichnen  $\alpha, \vartheta$  die Winkel  $POP'$ ,  $POP_0$ ; dann sind die Richtungscosinus von  $OP_0$

$$\left. \begin{aligned}
a_2 &= \frac{a_2 \sin(\alpha - \vartheta) + a_2' \sin \vartheta}{\sin \alpha}; & b_2 &= \frac{b_2 \sin(\alpha - \vartheta) + b_2' \sin \vartheta}{\sin \alpha} \\
c_2 &= \frac{c_2 \sin(\alpha - \vartheta) + c_2' \sin \vartheta}{\sin \alpha}
\end{aligned} \right\} \tag{22}$$

Lässt man  $\vartheta$  um  $\partial\vartheta$  wachsen und entwickelt die veränderten Richtungscosinus bis auf 2. Ordnung, so gehen  $a_2, b_2, c_2$  über in

$$a_2 \left(1 - \frac{\partial\vartheta^2}{2}\right) + a_4\partial\vartheta, \quad b_2 \left(1 - \frac{\partial\vartheta^2}{2}\right) + b_4\partial\vartheta, \quad c_2 \left(1 - \frac{\partial\vartheta^2}{2}\right) + c_4\partial\vartheta \tag{23}$$

wo  $a_4, b_4, c_4$  die Differentialquotienten von  $a_2, b_2, c_2$  nach  $\vartheta$  bezeichnen. Setzt man nun an die Stelle der Geraden  $PP'$  ein unendlich kleines Stück derselben von  $P_0$  bis zum consecutiven Punkte, so erhält man nach Substitution der Grössen (22) und (23) für  $a_2, b_2, c_2$  und  $a_2', b_2', c_2'$ :

$$2(1 - \cos \delta) = \frac{1 - c_2^2 - c_4^2}{(1 + c_2)^2} \partial\vartheta^2 = \frac{(a_2b_4 - b_2a_4)^2}{(1 + c_2)^2} \partial\vartheta^2$$

daher ist der unendlich kleine Verdrehungswinkel für das Linienelement

$$\delta = \pm \frac{a_2b_4 - b_2a_4}{1 + c_2} \partial\vartheta \tag{24}$$

#### §. 4. Rotation, welche das Auge aus einer Stellung in die andre führt.

Bezeichnen  $A, B, C$  die Richtungscosinus der Axe, um welche das Auge rotiren müsste, um vom Anblick von  $P$  direct zum Anblick

von  $P'$  zu gelangen, in Bezug auf die Axen der  $x, y, z$  und  $A'', B'', C''$  dieselben in Bezug auf die Augenaxen in ihrer Anfangsstellung, so kennt man zunächst die Werte der letztern aus (6), (7), nämlich

$$A'' = \frac{D''}{b_2'' + c_1''}; \quad B'' = \frac{D''}{c'' + a_2''}; \quad C'' = \frac{D''}{a_1'' + b''}$$

$$D'' = \frac{(b_2'' + c_1'')(c'' + a_2'')(a_1'' + b'')}{3 - a'' - b_1'' + c_2''}$$

und zwar ist, wie sich aus (19) ergibt,

$$b_2'' + c_1'' = \left( \frac{a_2}{1 + c_2} - \frac{a_2'}{1 + c_2'} \right) (a_2 b_2' - b_2 a_2')$$

$$c'' + a_2'' = - \left( \frac{b_2}{1 + c_2} - \frac{b_2'}{1 + c_2'} \right) (a_2 b_2' - b_2 a_2')$$

$$a_1'' + b'' = - \left( \frac{a_2}{1 + c_2} - \frac{a_2'}{1 + c_2'} \right) \left( \frac{b_2}{1 + c_2} - \frac{b_2'}{1 + c_2'} \right) (1 + c_2)(1 + c_2')$$

$$3 - a'' - b_1'' - c_2'' = 4 - e^2(1 + c_2)(1 + c_2')$$

$$D'' = \frac{\left( \frac{a_2}{1 + c_2} - \frac{a_2'}{1 + c_2'} \right) \left( \frac{b_2}{1 + c_2} - \frac{b_2'}{1 + c_2'} \right) (a_2 b_2' - b_2 a_2')}{\sqrt{\frac{4}{(1 + c_2)(1 + c_2')} - e^2}}$$

daher

$$EA'' = \frac{b_2}{1 + c_2} - \frac{b_2'}{1 + c_2'}; \quad EB'' = \frac{a_2'}{1 + c_2'} - \frac{a_2}{1 + c_2}$$

$$EC'' = - \frac{a_2 b_2' - b_2 a_2'}{(1 + c_2)(1 + c_2')}; \quad E^2 = \frac{4}{(1 + c_2)(1 + c_2')} - e^2$$

Da, wie man hieraus sieht,

$$- \frac{a_2 A'' + b_2 B''}{1 + c_2} + C'' = 0$$

ist, so ergibt sich der Satz:

Lässt man durch Rotation eine Augenstellung direct in eine beliebige andere übergehen, so ist der Modul der Rotationsaxe stets null.

Demnach ist gemäss (16)

$$\left. \begin{aligned} EA &= \frac{b_2}{1 + c_2} - \frac{b_2'}{1 + c_2'}; & EB &= \frac{a_2'}{1 + c_2'} - \frac{a_2}{1 + c_2} \\ EC &= \frac{a_2 b_2' - b_2 a_2'}{(1 + c_2)(1 + c_2')} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Diese Rotation weicht offenbar von dem stetigen Verlaufe der Augenbewegung ab. Nimmt man aber statt der Geraden  $PP'$  das unendlich kleine Stück, wie es in §. 3. bestimmt ward, so erhält man die momentane Rotation. Die Richtungscosinus ihrer Axe seien  $A_0, B_0, C_0$ ; nach der am Ende von §. 3. angegebenen Substitution findet man ohne Schwierigkeit:

$$E_0 A_0 = \begin{vmatrix} b_3 & b_4 \\ 1+c_3 & c_4 \end{vmatrix}; \quad E_0 B_0 = \begin{vmatrix} 1+c_3 & c_4 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}; \quad E_0 C_0 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \quad (26)$$

$$E_0^2 = 2(1+c_3) - c_4^2$$

und nach Einführung der Werte (22):

$$\left. \begin{aligned} E_0 A_0 \sin \alpha &= b_2 c_2' - c_2 b_2' + b_2 \cos(\alpha - \vartheta) - b_2' \cos \vartheta \\ E_0 B_0 \sin \alpha &= c_2 a_2' - a_2 c_2' - a_2 \cos(\alpha - \vartheta) + a_2' \cos \vartheta \\ E_0 C_0 \sin \alpha &= a_2 b_2' - b_2 a_2' \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Sind

$$x = A_0 u, \quad y = B_0 u, \quad z = C_0 u$$

die Coordinaten eines Punktes auf der momentanen Rotationsaxe, so stellen die Gl. (27) die von letzterer erzeugte konische Fläche in Parametern  $u, \vartheta$  dar. Nach Elimination von  $u$  wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{b_2 \{c_2' + \cos(\alpha - \vartheta)\} - b_2' (c_2 + \cos \vartheta)}{a_2 b_2' - b_2 a_2'} \\ \frac{y}{z} &= \frac{a_2' (c_2 + \cos \vartheta) - a_2 \{c_2' + \cos(\alpha - \vartheta)\}}{a_2 b_2' - b_2 a_2'} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

woraus:

$$\frac{a_2 x + b_2 y}{z} + c_2 + \cos \vartheta = 0; \quad \frac{a_2' x + b_2' y}{z} + c_2' + \cos(\alpha - \vartheta) = 0$$

und nach Elimination von  $\vartheta$ :

$$\left( \frac{a_2 x + b_2 y}{z} + c_2 \right)^2 + \left( \frac{a_2' x + b_2' y}{z} + c_2' \right)^2 - 2 \left( \frac{a_2 x + b_2 y}{z} + c_2 \right) \left( \frac{a_2' x + b_2' y}{z} + c_2' \right) \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

oder, weil

$$a_2 a_2' + b_2 b_2' + c_2 c_2' = \cos \alpha$$

ist:

$$x^2 + y^2 = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_2' & x \\ b_2 & b_2' & y \\ c_2 & c_2' & z \end{vmatrix} \frac{1}{\sin \alpha} \right\}^2$$

oder, wenn  $a_0, b_0, c_0$  die Richtungscosinus der Ebene  $OPP'$  bezeichnen:

$$x^2 + y^2 = (a_0 x + b_0 y + c_0 z)^2$$

Setzt man

$$c_0 = \cos 2\beta$$

und geht durch die Substitution

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a_0(x_0 \cos \beta + x_0 \sin \beta) - b_0 y_0}{\sin 2\beta} \\ y &= \frac{b_0(x_0 \cos \beta + x_0 \sin \beta) + a_0 y_0}{\sin 2\beta} \\ z &= -x_0 \sin \beta + x_0 \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

zu einem neuen Coordinatensystem über, so lautet die Gleichung der konischen Fläche:

$$x_0^2 + \frac{y_0^2}{c_0} = z_0^2 \quad (30)$$

Der Ort der momentanen Rotationsaxe des Auges, welches eine gerade Linie verfolgt, ist also ein Kegel, dessen Schnitte normal zu einer Axe gleichseitige Hyperbeln sind.

### §. 5. Spezielle Augenbewegungen.

Die  $y$  Axe legen wir durch die Mittelpunkte beider Augen und nennen sie horizontal, die  $x$  Axe, welche durch die bereits bestimmte  $z$  Axe mitbestimmt ist, vertical.

Verfolgt das Auge eine Verticallinie, so beschreibt die Sehlinie eine Ebene, die durch die  $x$  Axe geht; der Richtungscosinus ihrer Normale gegen die  $x$  Axe ist also null, und man hat:

$$a_0 = \frac{1}{\sin \alpha} \begin{vmatrix} b_2 & b_2' \\ c_2 & c_2' \end{vmatrix} = 0$$

Der Anfang dieser Verticalen sei in der  $yz$  Ebene, so dass auch  $a_2 = 0$  wird. Dann kann man setzen:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 0; & b_2 &= \sin \gamma; & c_2 &= \cos \gamma \\ a_2' &= \sin \alpha; & b_2' &= \cos \alpha \sin \gamma; & c_2' &= \cos \alpha \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

und erhält nach (17):

$$\left. \begin{aligned} a'' &= \cos \alpha \frac{\cos \alpha + \cos \gamma}{1 + \cos \alpha \cos \gamma}; & a_1'' &= -\frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma}{1 + \cos \alpha \cos \gamma}; & a_2'' &= \sin \alpha \\ b'' &= \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{1 + \cos \alpha \cos \gamma}; & b_1'' &= \frac{\cos \alpha + \cos \gamma}{1 + \cos \alpha \cos \gamma}; & b_2'' &= 0 \\ c'' &= -\sin \alpha \frac{\cos \alpha + \cos \gamma}{1 + \cos \alpha \cos \gamma}; & c_1'' &= \frac{\sin^2 \alpha \sin \gamma}{1 + \cos \alpha \cos \gamma}; & c_2'' &= \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Da hier

$$a''' = \cos \alpha; \quad b''' = 0; \quad c''' = -\sin \alpha$$

ist, so ergibt sich sogleich, dass

$$\cos \delta = b_1'' = \frac{\cos \alpha + \cos \gamma}{1 + \cos \alpha \cos \gamma} \quad (33)$$

Für ein unendlich kleines Stück der Verticale beginnend in

$$a_3 = \sin \vartheta; \quad b_3 = \sin \gamma \cos \vartheta; \quad c_3 = \cos \gamma \cos \vartheta$$

wird nach (24) der Verdrehungswinkel

$$\delta = -\frac{\sin \gamma \partial \vartheta}{1 + \cos \gamma \cos \vartheta} \quad (34)$$

Die Richtungscosinus der Rotationsaxe für directen Uebergang vom Anfang zum Ende werden nach (25)

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{m}, & B &= \frac{\cot \frac{\gamma}{2}}{m}, & C &= -\frac{1}{m} \\ m^2 &= 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \cot^2 \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

die der momentanen Rotationsaxe nach (27)

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{\sin \vartheta}{n}; & B_0 &= \frac{\cos \vartheta + \cos \gamma}{n \sin \gamma}; & C_0 &= -\frac{1}{n} \\ n^2 &= 1 + \left( \frac{1 + \cos \gamma \cos \vartheta}{\sin \gamma} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Letztere beschreibt, da hier

$$a_0 = 0; \quad b_0 = \cos \gamma; \quad c_0 = -\sin \gamma; \quad \beta = \frac{\gamma + R}{2}$$

ist, den Kegel

$$x_0^2 = \frac{y_0^2}{\sin \gamma} + z_0^2$$

dessen Axenstellungen durch die Relationen

$$x = -y_0; \quad y = x_0 \cos \frac{\gamma + R}{2} + z_0 \sin \frac{\gamma + R}{2}$$

$$z = -x_0 \sin \frac{\gamma + R}{2} + z_0 \cos \frac{\gamma + R}{2}$$

erkennbar sind. Er geht in den geraden Kegel

$$x^2 + y^2 = z^2$$

über, wenn  $\gamma = R$ , d. i. wenn die gesehene Verticale durch die  $y$  Axe geht.

Die Gerade, welche das Auge verfolgt, sei jetzt horizontal und zwar der  $y$  Axe parallel (eine beliebige Horizontale würde optisch einer beliebigen Geraden gleichbedeutend sein, weil sich letztere immer vom Auge aus auf eine Horizontale projiciren lässt); ihr Anfang liege in der  $xz$  Ebene. Dann gelten die vorigen Resultate mit Vertauschung der  $x$  und  $y$ , sowie der  $\alpha$  und  $\beta$ , des Index 1 und fehlenden Index; an die Stelle von  $\alpha, \gamma, \phi$  trete  $\alpha', \gamma', \phi'$ . Das Ende der Verticalen und Horizontalen sei ihr Durchschnittspunkt  $P'$ ; um diesen sei in ihrer Ebene ein Kreis mit dem Radius  $\varepsilon$  beschrieben. Ist  $OP' = u$ , so sind die Coordinaten eines Punktes des Kreises

$$x = ua_2' + \varepsilon \cos \varphi; \quad y = ub_2' + \varepsilon \sin \varphi; \quad z = uc_2' \quad (37)$$

und sein Radiusvector

$$r = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2 + 2u\varepsilon(a_2' \cos \varphi + b_2' \sin \varphi)} \quad (38)$$

Die Identität von  $P'$  für beide Gerade ergibt die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \cos \alpha' \sin \gamma' \\ \cos \alpha \sin \gamma &= \sin \alpha' \\ \cos \alpha \cos \gamma &= \cos \alpha' \cos \gamma' \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

woraus:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\cos \gamma'}{k}; & \sin \alpha &= \frac{\sin \gamma' \cos \gamma}{k} \\ \cos \alpha' &= \frac{\cos \gamma}{k}; & \sin \alpha' &= \frac{\sin \gamma \cos \gamma'}{k} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$k^2 = 1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \gamma'$$

$$a_2' = \frac{\cos \gamma \sin \gamma'}{k}; \quad b_2' = \frac{\cos \gamma' \sin \gamma}{k}; \quad c_2' = \frac{\cos \gamma \cos \gamma'}{k} \quad (41)$$

Verlegt man in (36) den variablen Punkt  $P_0$  nach  $P'$ , so dass  $\phi$  in  $\alpha$  übergeht, so wird für die Verticale

$$A_0 = \frac{\sin \gamma' \cos \gamma}{nk}; \quad B_0 = \frac{\cos \gamma' + k \cos \gamma}{nk \sin \gamma}; \quad C_0 = -\frac{1}{n} \quad (42)$$

für die Horizontale

$$B_0' = \frac{\sin \gamma \cos \gamma'}{n'k}; \quad A_0' = \frac{\cos \gamma + k \cos \gamma'}{n'k \sin \gamma'}; \quad C_0' = -\frac{1}{n'} \quad (43)$$

Diese 2 Rotationsachsen für momentane Vertical- und Horizontalbewegung des Sehobjects vergleichen wir mit derjenigen, welche einer Bewegung in beliebiger Richtung gemessen durch  $\varphi$  entspricht. Nehmen wir zum Ausgangspunkt geradliniger Bewegung bis  $P'$ , also an der Stelle des Punktes  $P$ , den Punkt (37), so ist für  $a_2, b_2, c_2$  zu substituieren

$$\frac{ua_2' + \varepsilon \cos \varphi}{\kappa}, \quad \frac{ub_2' + \varepsilon \sin \varphi}{\kappa}, \quad \frac{uc_2'}{\kappa}$$

Für  $\vartheta = \alpha$  gehen  $a_2, b_2, c_2$  über in  $a_2', b_2', c_2'$ , und  $a_4, b_4, c_4$  in

$$\frac{a_2' \cos \alpha - a_2}{\sin \alpha}, \quad \frac{b_2' \cos \alpha - b_2}{\sin \alpha}, \quad \frac{c_2' \cos \alpha - c_2}{\sin \alpha}$$

wo

$$\cos \alpha = a_2 a_2' + b_2 b_2' + c_2 c_2' = \frac{u + \varepsilon (a_2' \cos \varphi + b_2' \sin \varphi)}{\kappa}$$

$$\sin \alpha = \frac{\varepsilon}{\kappa} \sqrt{1 - (a_2' \cos \varphi + b_2' \sin \varphi)^2}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\cos \psi = a_2' \cos \varphi + b_2' \sin \varphi$$

gesetzt wird,

$$\cos \alpha = \frac{u + \varepsilon \cos \psi}{\kappa}; \quad \sin \alpha = \frac{\varepsilon \sin \psi}{\kappa}$$

und man erhält:

$$a_4 = \frac{a_2' \cos \psi - \cos \varphi}{\sin \psi}; \quad b_4 = \frac{b_2' \cos \psi - \sin \varphi}{\sin \psi}; \quad c_4 = c_2' \cot \psi$$

Bezeichnen  $A(\varphi), B(\varphi), C(\varphi)$  die Richtungscosinus der momentanen Rotationsaxe für Bewegung des Sehobjects in der Richtung  $\varphi$ , so findet man nach Einsetzung der vorstehenden Werte:

$$E_0 \sin \psi \cdot A(\varphi) = (1 + c_2') \sin \varphi - b_2' \cos \psi = (1 + c_2' - b_2'^2) \sin \varphi - a_2' b_2' \cos \varphi$$

$$E_0 \sin \psi \cdot B(\varphi) = a_2' \cos \psi - (1 + c_2') \cos \varphi = a_2' b_2' \sin \varphi - (1 + c_2' - a_2'^2) \cos \varphi$$

$$E_0 \sin \psi \cdot C(\varphi) = b_2' \cos \varphi - a_2' \sin \varphi$$

$$(E_0 \sin \psi)^2 = 2(1 + c_2') \sin^2 \psi - c_2'^2 \cos^2 \psi$$

oder

$$A(\varphi) = \frac{\cos \gamma}{N} \{ (\cos \gamma + k \cos \gamma') \sin \varphi - \sin \gamma \sin \gamma' \cos \gamma' \cos \varphi \}$$

$$B(\varphi) = \frac{\cos \gamma'}{N} \{ \sin \gamma \sin \gamma' \cos \gamma \sin \varphi - (\cos \gamma' + k \cos \gamma) \cos \varphi \}$$

$$C(\varphi) = \frac{k}{N} (\sin \gamma \cos \gamma' \cos \varphi - \sin \gamma' \cos \gamma \sin \varphi)$$

$$N = k^2 E_0 \sin \psi$$



Größen die übereinstimmend mit (42) und (43) für  $\varphi = R$  und  $\varphi = 0$  bzw. in  $A_0 B_0 C_0$  und  $A_0' B_0' C_0'$  übergehen.

Bei variirendem  $\varphi$  bewegt sich die momentane Rotationsaxe längs der Ebene:

$$\begin{vmatrix} \sin \gamma' \cos \gamma & \frac{\cos \gamma + k \cos \gamma'}{\sin \gamma} & x \\ \frac{\cos \gamma' + k \cos \gamma}{\sin \gamma} & \sin \gamma \cos \gamma' & y \\ -k & -k & z \end{vmatrix} = 0$$

wie sich durch Elimination von  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  ergibt.

Die hier behandelten Fragen schienen mir die nächstliegenden, auf deren resultirende Formeln eine weitere analytische Untersuchung sich stützen könnte.

## XI.

Propriétés nouvelles de la tangente  
et de la normale aux courbes du second degré.

Par

**Georges Dostor,**

Professeur à la Faculté des sciences de l'Université catholique de Paris.

1. Définition de la moyenne harmonique par différence. On sait qu'une quantité  $A$  est dite moyenne harmonique entre les deux quantités  $a$  et  $a'$ , lorsqu'elle satisfait à la relation

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right).$$

Nous dirons qu'une quantité  $B$  est la moyenne harmonique par différence entre  $b$  et  $b'$ , lorsqu'elle vérifie l'égalité

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{b'} \right)$$

Ces relations existent, pour les courbes du second degré, entre la tangente et les distances des deux foyers à la normale correspondante, et entre la normale et les distances des deux foyers à la tangente correspondante. Elles s'obtiennent par une construction géométrique fort simple et par un raisonnement très facile.

2. Notations et Construction de la figure. En un point  $M(x, y)$  de l'ellipse

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

menons la tangente  $MT$  et la normale  $MN$  (le lecteur est prié de

faire la figure), qui rencontrent le grand axe  $2a$  de l'ellipse respectivement en  $T$  et  $N$ , et posons

$$(2) \quad MT = T, \quad MN = N.$$

Ensuite des deux foyers  $F$  et  $F'$  abaissons sur la tangente les perpendiculaires  $FP$  et  $F'P'$ , puis sur la normale les perpendiculaires  $FQ$  et  $F'Q'$ . Si nous représentons ces lignes par  $p$  et  $p'$ ,  $q$  et  $q'$ , nous aurons évidemment

$$(3) \quad p = FP = MQ, \quad p' = F'P' = MQ';$$

$$(4) \quad q = FQ = MP, \quad q' = F'Q' = MP'.$$

Joignons le point de contact  $M$  aux foyers  $F$  et  $F'$  et posons les rayons vecteurs

$$(5) \quad FM = r, \quad F'M = r'.$$

3. Rapport des distances des deux foyers à une tangente, et des mêmes foyers à la normale. Les deux rayons vecteurs  $FM$  et  $F'M$  étant également inclinés sur la tangente  $MT$ , les deux triangles rectangles  $MFP$  et  $MF'P'$  sont semblables et donnent

$$\frac{FP}{F'P'} = \frac{MP}{MP'} = \frac{MF}{MF'},$$

ou, en tenant compte des notations (3), (4) et (5),

$$(1) \quad \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}.$$

Ainsi, Dans l'ellipse, les distances des deux foyers à une tangente sont entre elles comme les rayons vecteurs menés au point de contact; et les distances des deux foyers à une normale sont dans le même rapport.

4. Propriété harmonique de la tangente. Les deux triangles  $TPF$  et  $TP'F'$ , étant semblables, fournissent la proportion

$$\frac{TP}{TP'} = \frac{FP}{F'P'} = \frac{MP}{MP'},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{MT - MP}{MT + MP'} = \frac{MP}{MP'},$$

ou, en ayant égard aux notations (2) et (4),

$$\frac{T - q}{T + q'} = \frac{q}{q'}.$$

On en tire l'égalité

$$Tq' - qq' = Tq + qq',$$

qui revient à

$$T(q' - q) = 2qq'.$$

Divisant par  $2qq'T$  et intervertissant les membres, on obtient la relation

$$(II) \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{q'} \right).$$

Donc, dans l'ellipse, la tangente est la moyenne harmonique par différence entre les distances des deux foyers à la normale correspondante.

5. **Propriété harmonique de la normale.** Les deux triangles semblables  $MQF$ ,  $MQ'F'$  donnent

$$\frac{NQ}{NQ'} = \frac{FQ}{F'Q'} = \frac{MP}{MP'} = \frac{FP}{F'P'},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{MN - MQ}{MQ' - MN} = \frac{FP}{F'P'},$$

et, en vertu des notations (2) et (3),

$$\frac{N - p}{p' - N} = \frac{p}{p'};$$

on en tire l'égalité

$$Np' - pp' = pp' - Np,$$

qui revient à

$$N(p' + p) = 2pp'.$$

Divisant par  $2pp'N$  et intervertissant les membres, on trouve la relation

$$(III) \quad \frac{1}{N} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right).$$

Il s'ensuit que, Dans l'ellipse, la normale est la moyenne harmonique entre les distances des deux foyers à la tangente correspondante.

6. **Produit des distances des deux foyers à une tangente.** Si nous faisons tourner le trapèze  $PP'F'F$  autour du côté rectangulaire  $PP'$ , pour le rabattre en  $PP'CD$ , nous formons le trapèze isocèle  $CDFF'$ , dont les diagonales seront les droites

$$FMC = F'MD = r + r' = 2a.$$

Or on sait que, dans tout trapèze, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés latéraux, augmentée du double rectangle des bases. Nous avons donc la relation

ou

$$2\overline{FC}^2 = 2\overline{FF'}^2 + 2FD \cdot F'C,$$

$$2(2a)^2 = 2(2c)^2 + 2 \cdot 2p \cdot 2p';$$

divisant par 8 et intervertissant les membres, on obtient la relation

$$pp' = a^2 - c^2,$$

qui revient à

(IV)

$$pp' = b^2.$$

On en conclut que, Dans l'ellipse, le produit des distances des deux foyers à une tangente est constante et égal au carré du demi petit axe.

#### 7. Produit des distances des deux foyers à une normale.

Dans le triangle  $MFF'$  prolongeons les perpendiculaires  $FQ$ ,  $F'Q'$ , abaissées des foyers sur la normale  $MN$ , jusqu'à la rencontre en  $R$  et  $R'$  des côtés opposés  $MF'$  et  $MF$ . Nous formons le trapèze isocèle  $FRF'R'$ , dans lequel les deux bases sont

$$FR = 2q, \quad F'R' = 2q',$$

qui a  $FF'$  pour diagonale et  $F'R = r' - r$  pour côté latéral. Nous avons donc la relation

$$2\overline{FF'}^2 = 2(r' - r)^2 + 2 \cdot 2q \cdot 2q',$$

ou

$$4c^2 = (r' - r)^2 + 4qq'.$$

Mais les valeurs

$$(6) \quad r' = a + \frac{cx}{a}, \quad r = a - \frac{cx}{a}$$

donnent

$$r' - r = \frac{2cx}{a}.$$

Il vient par suite, en substituant, en divisant par 4 et en intervertissant les membres,

$$qq' = c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} = c^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2}.$$

Or l'équation (1) de l'ellipse donne

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2};$$

on a, par conséquent,

(V)

$$qq' = \frac{c^2 y^2}{b^2}.$$

Tel est le produit des distances des deux foyers à une normale.

8. Segments déterminés par la tangente sur l'axe focal. La tangente  $MT$  est la bissectrice de l'angle au sommet  $M$ , extérieur au triangle  $MFF'$ ; par suite elle divise la base  $FF'$  en parties proportionnelles aux côtés  $MF$  et  $MF'$  de l'angle. On a donc l'égalité

$$\frac{FT}{MF} = \frac{F'T}{MF'},$$

ou

$$\frac{FT}{r} = \frac{F'T}{r'} = \frac{F'T - FT}{r' - r} = \frac{2c}{2cx : a} = \frac{a}{x}.$$

On en tire les valeurs

$$(VI) \quad FT = \frac{ar}{x}, \quad F'T = \frac{ar'}{x}.$$

9. Longueur de la tangente. Dans le triangle  $MFF'$ , la droite  $MT$  étant la bissectrice de l'angle extérieur, on a

$$\overline{MT}^2 = FT \cdot F'T - MF \cdot MF',$$

ou

$$T^2 = \frac{a^2 rr'}{x^2} - rr' = \frac{(a^2 - x^2)}{x^2} rr';$$

et, comme, en vertu de (1), on a

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2},$$

il vient

$$T^2 = \frac{a^2 y^2 rr'}{b^2 x^2},$$

d'où

$$(VII) \quad T = \frac{ay}{bx} \sqrt{rr'}.$$

10. Inclinaison de la tangente sur les rayons vecteurs. Appelons  $\gamma$  l'angle  $PMF$ , que fait la tangente avec l'un ou l'autre des rayons vecteurs. Le triangle  $MPF$  nous donne

$$PF = MF \sin MPF,$$

ou

$$p = r \sin \gamma.$$

On aurait de même

$$p' = r' \sin \gamma,$$

d'où on tire

$$\sin^2 \gamma = \frac{pp'}{rr'},$$

qui, en égard à (IV), donne

$$(VIII) \quad \sin \gamma = \frac{b}{\sqrt{rr'}}.$$

Par le même triangle rectangle  $MPF$  on a

$$MP = MF \cos \gamma,$$

ou

$$q = r \cos \gamma;$$

comme on a de même

$$q' = r' \cos \gamma,$$

il vient en multipliant

$$\cos^2 \gamma = \frac{qq'}{rr'},$$

et en vertu de (V)

$$(IX) \quad \cos \gamma = \frac{cy}{b \sqrt{rr'}}.$$

11. Projections de la tangente sur les rayons vecteurs. Cette projection étant  $T \cos \gamma$ , on obtient, en remplaçant  $T$  et  $\cos \gamma$  par leurs valeurs (VII) et (IX),

$$T \cos \gamma = \frac{ay}{bx} \sqrt{rr'} \cdot \frac{cy}{b \sqrt{rr'}},$$

ou

$$(X) \quad T \cos \gamma = \frac{acy^2}{b^2 x}.$$

12. Segments déterminés par la normale sur la distance focale. Dans le triangle  $MFF'$  la normale  $MN$  est la bissectrice de l'angle au sommet  $M$ ; par conséquent on a

$$\frac{FN}{MF} = \frac{F'N}{MF'}.$$

ou

$$\frac{FN}{r} = \frac{F'N}{r'} = \frac{FN + F'N}{r + r'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

On en tire de suite

$$(XI) \quad FN = \frac{cr}{a}, \quad F'N = \frac{cr'}{a}.$$

13. Longueur de la normale. Le triangle  $MFF'$  donne de suite

$$\overline{MN}^2 = MF \cdot MF' - FN \cdot F'N,$$

ou

$$N^2 = rr' - \frac{c^2 rr'}{a^2} = \frac{(a^2 - c^2) rr'}{a^2},$$

d'où

$$(XII) \quad N = \frac{b}{a} \sqrt{rr'}.$$

14. Projection de la normale sur les rayons vecteurs. Cette projection est  $N \sin \gamma$ . Mettant à la place de  $N$  et  $\sin \gamma$  leurs valeurs (VIII) et (XII), on trouve que

$$N \sin \gamma = \frac{b}{a} \sqrt{rr'} \cdot \frac{b}{\sqrt{rr'}},$$

ou

$$(XIII) \quad N \sin \gamma = \frac{b^2}{a}.$$

Donc la projection de la normale sur les rayons vecteurs est constante et égale à la troisième proportionnelle entre le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse.

15. Distance du centre de l'ellipse à une tangente. Cette distance, que nous représenterons par  $D$ , joint les milieux des côtés latéraux dans le trapèze  $FPF'F'$ ; on a donc

$$OD = \frac{1}{2}(FP + F'P'),$$

ou

$$D = \frac{1}{2}(p + p').$$

Mais les relations (IV) et (I)

$$pp' = b^2, \quad \frac{p}{p'} = \frac{r}{r'}$$

donnent

$$p^2 = \frac{b^2 r}{r'} = \frac{b^2 r^2}{rr'}, \quad p'^2 = \frac{b^2 r'}{r} = \frac{b^2 r'^2}{rr'};$$

d'où

$$(7) \quad p = \frac{br}{\sqrt{rr'}}, \quad p' = \frac{br'}{\sqrt{rr'}}.$$

Il vient par suite

$$D = \frac{b(r + r')}{2\sqrt{rr'}} = \frac{b \cdot 2a}{2\sqrt{rr'}},$$

ou

$$(XIV) \quad D = \frac{ab}{\sqrt{rr'}}.$$

Si nous multiplions cette expression par la valeur (XII) de la normale, nous obtenons la relation remarquable

$$(XV) \quad ND = b^2.$$

Ainsi, Dans l'ellipse, le produit de la normale par la distance du centre à la tangente correspondante est constante et égale au carré du demi petit axe de la courbe.

16. Distance du centre de l'ellipse à une normale. Nous désignerons cette distance  $IM$  par  $d$ . Puisque

$$IM = MP' - IP',$$

$$IM = IP - MP,$$



il vient, en observant que  $IP' = IP$  et en ajoutant,

$$2IM = MP' - MP,$$

d'où on tire

$$d = \frac{1}{2}(q' - q).$$

Mais les relations (V) et (I)

$$qq' = \frac{c^2 y^2}{b^2}, \quad \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$$

donnent

$$q^2 = \frac{c^2 y^2 r}{b^2 r'} = \frac{c^2 y^2 r^2}{b^2 r r'}, \quad q'^2 = \frac{c^2 y^2 r'}{b^2 r} = \frac{c^2 y^2 r'^2}{b^2 r r'},$$

d'où

$$(8) \quad q = \frac{cyr}{b\sqrt{rr'}}, \quad q' = \frac{cyr'}{b\sqrt{rr'}}.$$

Il vient par suite

$$d = \frac{cy(r' - r)}{ab\sqrt{rr'}} = \frac{cy}{2b\sqrt{rr'}} \cdot \frac{2cx}{a},$$

ou

$$(XVI) \quad d = \frac{c^2 xy}{ab\sqrt{rr'}}.$$

Multiplions cette expression par la valeur (VII) de la tangente, nous obtenons le produit

$$Td = \frac{ay\sqrt{rr'}}{bx} \cdot \frac{c^2 xy}{ab\sqrt{rr'}},$$

ou

$$(XVII) \quad Td = \frac{c^2 y^2}{b^2}.$$

17. La comparaison des égalités (IV) et (XV) fait voir d'abord que

$$(XVIII) \quad ND = pp';$$

de même le rapprochement des valeurs (V) et (XVII) prouve que

$$(XIX) \quad Td = qq'.$$

Donc on peut dire que:

Dans l'ellipse 1<sup>o</sup> la tangente est la quatrième proportionnelle entre les distances du centre et des deux foyers à la normale correspondante;

2<sup>o</sup> la normale est la quatrième proportionnelle entre les distances du centre et des deux foyers à la tangente correspondante.

Puisque

$$q' - q = 2d, \quad -qq' = -Td,$$

on voit que  $q'$  et  $-q$  sont les racines de l'équation

$$z^2 - 2dz - Td = 0,$$

qui donne par suite

$$(XX) \quad q' = d + \sqrt{d^2 + Td}, \quad q = -d + \sqrt{d^2 + Td}.$$

De même, comme

$$p + p' = 2D, \quad pp' = ND,$$

$p$  et  $p'$  sont les racines de l'équation

$$u^2 - 2Du + ND = 0,$$

qui donne

$$(XXI) \quad p = D - \sqrt{D^2 - ND}, \quad p' = D + \sqrt{D^2 - ND}.$$

18. Segment de la tangente compris entre le point de contact et le petit axe de l'ellipse. Soit  $T'$  le point où la tangente  $MT$  rencontre l'axe des  $y$  et posons  $MT' = T'$ . L'équation de la tangente au point  $M(x, y)$  de l'ellipse étant

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1,$$

donne pour l'ordonnée à l'origine

$$OT' = Y = \frac{b^2}{y}.$$

Or par les triangles semblables on a

$$\frac{MT + MT'}{OT'} = \frac{MT}{y},$$

ou

$$\frac{T + T'}{b^2} = \frac{T}{y^2} = \frac{T'}{b^2 - y^2};$$

on en tire

$$\frac{T'}{T} = \frac{b^2 - y^2}{y^2} = \frac{a^2 b^2 - a^2 y^2}{a^2 y^2} = \frac{b^2 x^2}{a^2 y^2};$$

d'où il vient

$$T' = \frac{b^2 x^2}{a^2 y^2} T.$$

Remplaçant  $T$  par sa valeur (VII), on obtient

$$T' = \frac{b^2 x^2}{a^2 y^2} \cdot \frac{ay}{bx} \sqrt{rr'},$$

ou

$$(XXII) \quad T' = \frac{bx}{ay} \sqrt{rr'}.$$

Multipliant cette valeur par cette (VII) de  $T$ , on trouve que

$$(XXIII) \quad TT' = rr'.$$

Ainsi le point de contact détermine sur la tangente comprise entre les axes deux segments dont le produit est égal au produit des rayons vecteurs menés au point de contact.

D'ailleurs la partie de la tangente, qui est comprise entre les axes, a pour valeur

$$T + T' = \left( \frac{ay}{bx} + \frac{bx}{ay} \right) \sqrt{rr'} = \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{abxy} \sqrt{rr'} = \frac{a^2b^2 \sqrt{rr'}}{abxy},$$

ou

$$(XXIV) \quad T + T' = \frac{ab}{xy} \sqrt{rr'}.$$

19. Segment de la normale compris entre le point de contact et le petit axe de l'ellipse. Soit  $N'$  le point où la normale  $MN$  rencontre l'axe des  $y$  et posons  $MN' = N'$ . L'équation de la normale au point  $M(x, y)$  de l'ellipse étant

$$\frac{a^2}{x}X - \frac{b^2}{y}Y = c^2$$

donne pour  $X = 0$

$$Y = -\frac{c^2y}{b^2}.$$

La valeur absolue de  $ON'$  est donc

$$ON' = \frac{c^2y}{b^2}.$$

Or les triangles semblables nous donnent

$$\frac{MN'}{y + \frac{c^2y}{b^2}} = \frac{MN}{y},$$

ou

$$\frac{N'}{b^2 + c^2} = \frac{N}{b^2};$$

on en tire, puisque  $b^2 + c^2 = a^2$

$$(9) \quad N' = \frac{a^2}{b^2} N.$$

Remplaçant  $N$  par sa valeur (XII), on trouve que

$$N' = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a} \sqrt{rr'}$$

ou bien

$$(XXV) \quad N' = \frac{a}{b} \sqrt{rr'}.$$

Multipliant cette valeur par celle (XII) de  $N$ , on obtient la relation

$$(XXVI) \quad NN' = rr'.$$

Donc le point de contact détermine sur la normale comprise entre les deux axes deux segments dont le produit est égal au produit des rayons vecteurs menés au point de contact.

La partie de la normale qui est comprise entre les axes est

$$N' - N = \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sqrt{rr'} = \frac{a^2 - b^2}{ab} \sqrt{rr'},$$

ou

$$(XXVII) \quad N' - N = \frac{c^2}{ab} \sqrt{rr'}.$$

20. La comparaison des formules (XXIII) et (XXVI) fait voir que

$$(XXVIII) \quad TT' = NN'.$$

Cette relation est générale; elle existe pour toute espèce de courbe, qui est rapportée à des axes rectangulaires; comme il est d'ailleurs facile de le démontrer directement.

21. Il serait aisé de trouver des propositions analogues pour l'hyperbole et la parabole et déterminer la nature des modifications que doivent leurs énoncés dans les deux cas.

Cependant nous tenons à démontrer pour l'hyperbole les propriétés harmoniques de la tangente et de la normale, propriétés que nous avons établies aux n<sup>os</sup> 4 et 5 pour l'ellipse.

Soient  $F$  et  $F'$  les foyers d'une hyperbole et  $x, y$  les coordonnées d'un point  $M$  de la courbe. Appelons toujours  $T$  et  $N$  les longueurs de la tangente et de la normale menées au point  $M$ , et désignons encore par  $p$  et  $p'$  les perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente; par  $q$  et  $q'$  celles menées sur la normale.

Concevons une ellipse homofocale à l'hyperbole et passant par le même point  $M$ . La tangente à l'hyperbole sera la normale à cette ellipse, et la normale de l'hyperbole deviendra la tangente à l'ellipse.

Il s'ensuit qu'il suffira de changer  $N$  en  $T$ ,  $p$  et  $p'$  en  $q$  et  $q'$  dans la formule (III), pour trouver la relation

$$(XXIX) \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \right),$$

qui convient à l'hyperbole.

Nous voyons ainsi que

Dans l'hyperbole, une tangente est la moyenne harmonique entre les distances des deux foyers à la normale correspondante.

Si dans la formule (II) nous remplaçons  $T$  par  $N$ ,  $q$  et  $q'$  par  $p$  et  $p'$ , nous aurons pour l'hyperbole la relation

$$(XXX) \quad \frac{1}{N} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right)$$

Donc, dans l'hyperbole, une normale est la moyenne harmonique par différence entre les distances des deux foyers à la tangente correspondante.

22. Si l'on veut étendre les mêmes formules à la parabole, il suffira d'y supposer le foyer  $F'$  transporté à l'infini. Dans ce cas  $p'$  et  $q'$  deviendront infinis,  $\frac{1}{p'}$  et  $\frac{1}{q'}$  s'annuleront et il en résultera

$$T = 2q, \quad N = 2p.$$

## XII.

### Propositions sur les coniques.

Par

**Georges Dostor.**

1. **Théorème I.** Dans l'ellipse, le produit des tangentes des demi-angles, que font les rayons vecteurs d'un point quelconque de la courbe avec l'axe focal, est constant et égal au rapport des deux segments, dans lesquels chaque foyer divise le grand axe; et

Dans l'hyperbole, le quotient des tangentes des demi-angles, que font les rayons vecteurs d'un point quelconque de la courbe avec l'axe transverse, est con-

stant et égal au rapport des deux segments, dans lesquels chaque sommet divise la distance focale.

Soient  $F$  et  $F'$  les deux foyers d'une conique à centre et  $M$  un point quelconque de la courbe.

Posons les rayons vecteurs  $MF = r$ ,  $MF' = r'$ , la distance focale  $FF' = 2c$  et les angles  $MFO = \alpha$ ,  $MF'O = \alpha'$ ,  $O$  étant le centre de la conique.

Si nous représentons par  $2p$  le périmètre du triangle  $MFF'$ , ce triangle nous donnera

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(2p-2r')(2p-4c)}{2p(2p-2r)}}, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha' = \sqrt{\frac{(2p-2r)(2p-4c)}{2p(2p-2r')}},$$

ou, en observant que  $2p = r + r' + 2c$ ,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(r+r'+2c-2r')(r+r'+2c-4c)}{(r+r'+2c)(r+r'+2c-2r)}} = \sqrt{\frac{(2c+r-r')(r+r'-2c)}{(2c+r'-r)(r+r'+2c)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha' = \sqrt{\frac{(r+r'+2c-2r)(r+r'+2c-4c)}{(r+r'+2c)(r+r'+2c-2r')}} = \sqrt{\frac{(2c+r-r)(r+r'-2c)}{(2c+r-r')(r+r'+2c)}}.$$

Multipliant et divisant ces deux expressions entre elles, on obtient les relations

$$(1) \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha' = \frac{r+r'-2c}{r+r'+2c},$$

$$(2) \quad \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha'} = \frac{2c+r-r'}{2c+r'-r}.$$

Si la conique est une ellipse, ayant  $2a$  pour grand axe, on aura  $r+r' = 2a$ ; dans ce cas la formule (1) devient

$$(I) \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha' = \frac{a-c}{a+c} = \frac{AF}{A'F} = \frac{A'F'}{AF'},$$

où  $A$  et  $A'$  désignent les sommets de la courbe, qui sont voisins des foyers respectifs  $F$  et  $F'$ .

Si au contraire la conique est une hyperbole, dans la quelle  $2a$  est l'axe transverse, on aura  $r'-r = 2a$ ; dans ce cas la formule (2) devient

$$(II) \quad \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha'} = \frac{c-a}{c+a} = \frac{AF}{AF'} = \frac{A'F'}{A'F},$$

où  $A$  et  $A'$  désignent encore les sommets de la courbe, qui sont voisins des foyers respectifs  $F$  et  $F'$ .

2. Théorème II. Dans toute parabole,

1° l'ordonnée  $y$  du point de concours de deux tangentes est la moyenne arithmétique entre les ordonnées  $y'$  et  $y''$  des points de contact de ces deux tangentes;

2° l'abscisse  $x$  du point de concours de deux tangentes est la moyenne géométrique entre les abscisses  $x'$  et  $x''$  des points de contact de ces deux tangentes.

Les tangentes, menées par les points  $(x', y')$  et  $(x'', y'')$  à la parabole  $Y^2 = 2pX$ , sont représentées par les équations

$$Yy' = p(X + x'),$$

$$Yy'' = p(X + x'').$$

Si ces deux tangentes se rencontrent au point  $(x, y)$ , on devra avoir

$$(3) \quad yy' = p(x + x'),$$

$$(4) \quad yy'' = p(x + x'').$$

Ces deux dernières égalités peuvent s'écrire

$$(5) \quad 2yy' = 2px + 2px' = 2px + y'^2,$$

$$(6) \quad 2yy'' = 2px + 2px'' = 2px + y''^2,$$

attendu que, les deux points  $(x', y')$  et  $(x'', y'')$  étant situés sur la parabole, on a

$$2px' = y'^2 \text{ et } 2px'' = y''^2.$$

Retranchant (6) de (5) on obtient la relation

$$2y(y' - y'') = y'^2 - y''^2 = (y' + y'')(y' - y'').$$

Divisant par  $2(y' - y'')$ , on tire de celle-ci la formule

$$(III) \quad y = \frac{y' + y''}{2},$$

qui démontre la première partie de notre énoncé.

Les deux égalités (3) et (4), étant divisées membre à membre, nous donnent

$$\frac{y'}{y''} = \frac{x + x'}{x + x''},$$

ou, en observant que  $y' = \sqrt{2px'}$  et  $y'' = \sqrt{2px''}$ ,

$$\frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}} = \frac{x + x'}{x + x''}.$$

De cette relation on tire

$$x\sqrt{x'} + x''\sqrt{x'} = x\sqrt{x''} + x'\sqrt{x''},$$

et, par suite,

$$x(\sqrt{x'} - \sqrt{x''}) = x'\sqrt{x''} - x''\sqrt{x'} = \sqrt{x'x''}(\sqrt{x'} - \sqrt{x''}).$$

Divisant par  $\sqrt{x'} - \sqrt{x''}$ , on trouve que

$$(IV) \quad x = \sqrt{x'x''},$$

ce qui démontre la seconde partie de notre proposition.

3. Les formules (III) et (IV) nous permettent de calculer rapidement les coordonnées des points où les deux tangentes issues d'un point extérieur  $(x, y)$  touchent la parabole.

En effet la première (III) peut s'écrire

$$(7) \quad y' + y'' = 2y,$$

et la seconde (IV) revient à

$$\sqrt{2px' \cdot 2px''} = 2px,$$

ou à

$$(8) \quad y'y'' = 2px.$$

Les ordonnées  $y'$  et  $y''$  sont donc les racines de l'équation du second degré

$$Y^2 - 2yY + 2px = 0,$$

qui donne

$$Y = y \pm \sqrt{y^2 - 2px}.$$

On a ainsi

$$(V) \quad y' = y + \sqrt{y^2 - 2px}, \quad y'' = y - \sqrt{y^2 - 2px}.$$

Si nous élevons ces deux valeurs au carré, nous obtiendrons

$$y'^2 = 2y^2 - 2px + 2y\sqrt{y^2 - 2px},$$

$$y''^2 = 2y^2 - 2px - 2y\sqrt{y^2 - 2px};$$

et, par suite, en observant que  $y'^2 = 2px'$  et  $y''^2 = 2px''$ ,

$$(VI) \quad \begin{cases} x' = \frac{y^2 - px}{p} + \frac{y}{p}\sqrt{y^2 - 2px}, \\ x'' = \frac{y^2 - px}{p} - \frac{y}{p}\sqrt{y^2 - 2px}. \end{cases}$$

On a ainsi les abscisses des points de contact des deux tangentes issues du point  $(x, y)$ .



4. Nouvelle démonstration des deux théorèmes d'Apollonius de Perga. Considérons l'ellipse

$$(9) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

rapportée à deux diamètres conjugués  $2a'$  et  $2b'$ , comprenant entre eux un angle  $\theta$ .

Coupons cette ellipse par un cercle concentrique

$$(10) \quad x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta = R^2.$$

Nous aurons l'équation aux cordes communes menées par le centre, en formant, avec ces deux équations, l'équation du second degré homogène en  $x$  et  $y$

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta = R^2 \left( \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} \right),$$

qui peut s'écrire

$$(11) \quad x^2 \left( 1 - \frac{R^2}{a'^2} \right) + 2xy \cos \theta + y^2 \left( 1 - \frac{R^2}{b'^2} \right) = 0.$$

Le cercle (10) passera par deux sommets opposés de l'ellipse (9), si les deux diamètres d'intersection (11) se confondent, c'est-à-dire si le premier membre de l'équation (11) est un carré.

Ainsi, si l'on a

$$(12) \quad \left( 1 - \frac{R^2}{a'^2} \right) \left( 1 - \frac{R^2}{b'^2} \right) - \cos^2 \theta = 0,$$

le cercle (10) sera bitangent à l'ellipse (9) et le diamètre de ce cercle sera un axe de la conique.

Les deux demi-axes  $a$  et  $b$  de l'ellipse (9) satisfont donc à la relation (12); en d'autres termes les carrés  $a^2$  et  $b^2$  des demi-axes de notre ellipse (9) sont les racines de l'équation (12).

Or celle-ci peut s'écrire

$$R^4 - (a'^2 + b'^2)R^2 + a'^2 b'^2 \sin^2 \theta = 0.$$

Par conséquent, en vertu des relations qui existent entre les coefficients et les racines de l'équation du second degré, on a de suite

$$(VII) \quad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

$$(VIII) \quad a^2 b^2 = a'^2 b'^2 \sin^2 \theta,$$

ce qui démontre le théorème d'Apollonius pour l'ellipse.

On procéderait exactement de la même manière pour l'hyperbole.

Cette démonstration fort ingénieuse est donnée dans quelques Ecoles et Lycées de Paris; nous regrettons d'ignorer le nom de l'auteur. Elle mérite d'être signalée à l'attention des professeurs, autant pour sa grande simplicité, que pour son élégance et surtout pour son originalité.

Paris, 16 Juin 1877.

## XIII.

## Der Punkt der gleichen Paralleltransversalen.

Von

Emil Hain.

## I.

Durch einen Punkt  $P$  des Coordinatendreiecks  $ABC$  ziehen wir zu  $BC$  eine Parallele, welche  $AC$  in  $A_b$  trifft.  $P$  sei durch die Coordinaten  $p_a$  bestimmt. Der unendlich entfernte Punkt von  $BC$  ist:  $0, c, -b$ . Sonach ist:

$$\begin{array}{lll} A_b A_c \equiv b p_b + c p_c & -b p_a & -c p_a \\ A_b \equiv c p_a & 0 & b p_b + c p_c \\ A_c \equiv b p_a & b p_b + c p_c & 0 \end{array}$$

Trifft  $PA$  die  $BC$  in  $P_a$ , teilt  $\Pi_a$  mit  $P_a$  die  $BC$  harmonisch und schneidet  $A\Pi_a$  die  $A_b A_c$  in  $\mathfrak{P}_a$ ; dann liegen die  $\mathfrak{P}_a$  in einer Geraden. Es ist:

$$\begin{array}{lll} P_a \equiv 0 & p_b & p_c \\ \Pi_a \equiv 0 & p_b & -p_c \\ \mathfrak{P}_a \equiv p_a (b p_b - c p_c) & p_b (b p_b + c p_c) & -p_c (b p_b + c p_c) \end{array}$$

Die  $\mathfrak{P}_a$  liegen in der Geraden  $p_b p_c (b p_b + c p_c)$ , welche der  $\Pi_a \Pi_b \Pi_c$ , der Harmonikalen von  $P$ , parallel ist.

Wir finden ferner:

$$\begin{aligned} A_b A_c : BC &= \left( \frac{2F}{a} - \frac{2F p_a}{\Sigma a p_a} \right) : \frac{2F}{a} \\ A_b A_c &= \frac{a(b p_b + c p_c)}{\Sigma a p_a} \end{aligned}$$

Setzen wir  $\Sigma A_b A_b = m$ , so ist der Ort der Punkte, für welche die Summe der Paralleltransversalstrecken constant ist, die Gerade:

$$\Sigma a(m-b-c)x_a = 0$$

Für  $m = a+b+c$  wird diese Gerade die Harmonikale des Punktes  $b^2c^2$ . Die Geraden  $a(m-b-c)$  gehen durch den Schnittpunkt der beiden zu einander parallelen Geraden  $a, a(b+c)$ . Somit gilt der Satz:

Für die Punkte einer zur Geraden  $a(b+c)$  parallelen Geraden ist die Summe der Paralleltransversalen constant.

Auch kann leicht bewiesen werden, dass die Punkte  $A_b A_c$  auf einem Kegelschnitte liegen. Er hat die Form:

$$\begin{aligned} \Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c &= 0 \\ g_{aa} &= a p_b p_c (b p_b + c p_c) \\ 2 g_{bc} &= -p_a [(a p_a + b p_b)(a p_a + c p_c) + b c p_b p_c] \end{aligned}$$

## II.

Setzen wir  $A_b A_c = t$ , so haben wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a t p_a + b(t-a)p_b + c(t-a)p_c &= 0 \\ a(t-b)p_a + b t p_b + c(t-b)p_c &= 0 \\ a(t-c)p_a + b(t-c)p_b + c t p_c &= 0 \end{aligned}$$

Es ist also:

$$\begin{vmatrix} t & t-a & t-a \\ t-b & t & t-b \\ t-c & t-c & t \end{vmatrix} = 0$$

$$t = \frac{2abc}{\Sigma bc}$$

Setzen wir  $t \Sigma a p_a = w$ , wo  $w$  symmetrisch in Bezug auf das Dreieck; so haben wir die Gleichungen:

$$a b p_b + a c p_c = w$$

woraus

$$p_a = w \begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ 1 & 0 & bc \\ 1 & bc & 0 \end{vmatrix} \equiv bc(ab+ac-bc)$$

Es gibt also einen Punkt  $T$ , welcher der angenommenen Bedingung entspricht; er ist ein Punkt 4. Ordnung und heisst der Punkt der gleichen Paralleltransversalen.

### III.

Werden über den Seiten des Dreiecks  $ABC$  Quadrate errichtet, so bilden die den  $BC$  parallelen Quadratseiten ein dem Urdreieck ähnliches Dreieck. Der Homologiepunkt beider ist der Grebe'sche Punkt  $G \equiv a$ . Trifft  $GA$  die  $BC$  in  $G_a$ , ist  $J$  das Inkreiscentrum des Urdreiecks; so haben wir:

$$\begin{array}{lll} G_a \equiv 0 & b & c \\ J \equiv 1 & 1 & 1 \\ JG_a \equiv b-c & c & -b \\ G_b G_c \equiv -bc & +ca & +ab \end{array}$$

$JG_a$  trifft  $G_b G_c$  in

$$2abc \quad b(ca+cb-ab) \quad c(bc+ba-ca)$$

Verbinden wir diesen Punkt mit  $A$ , so erhalten wir die Gerade:

$$0 \quad c(bc+ba-ca) \quad -b(ca+cb-ab)$$

Diese Geraden schneiden sich im Punkte:

$$Q \equiv a(bc+ba-ca)(ca+cb-ab)$$

Wenn wir auf der andern Seite von  $AJ$  den Winkel  $QAJ$  auftragen, so dass der neue Schenkel die  $BC$  in  $T_a$  trifft; dann treffen sich die  $AT_a$  im reciproken Punkte von  $Q$ , in  $T \equiv bc(ab+ac-bc)$ . Die Construction dieses Punktes ist also folgende:

Man construirt über den Seiten des Dreiecks  $ABC$  entweder nur nach Aussen oder nur nach Innen Quadrate. Die den  $BC$  parallelen Quadratseiten bilden ein Dreieck  $A'B'C'$ . Die  $AA'$  schneiden sich in  $G$ .  $J$  sei das Inkreiscentrum des Urdreiecks.  $AG$  trifft  $BC$  in  $G_a$ ,  $JG_a$  die  $G_b G_c$  in  $A_1$ . Die  $AA_1$  schneiden sich in  $Q$ . Man trägt den Winkel  $QAJ$  auf der andern Seite der  $AJ$  auf, so dass der neue Schenkel die  $BC$  in  $T_a$  trifft. Die  $AT_a$  begegnen sich in  $T$ .

### IV.

$A'$  sei die Mitte von  $BC$ ,  $U$  der Punkt  $T$  für das Mittendreieck. Die Normale von  $U$  auf  $B'C'$  treffe  $B'C'$  in  $A''$ ,  $BC$  in  $A_u$ . Dann gibt die Figur:

$$\begin{aligned} UA'_u &= \frac{F}{a} \cdot \frac{ab+ac-bc}{ab+ac+bc} \\ A'U + UA_u &= \frac{F}{a} \end{aligned}$$

$$UA_u = \frac{F}{a} \left( 1 - \frac{ab+ac-bc}{ab+ac+bc} \right) = \frac{F}{a} \cdot \frac{2bc}{\Sigma bc}$$

$$U \equiv b^2 c^2$$

Der Punkt  $b^2 c^2$  wird erhalten, wenn man die Abschnitte, welche die Winkelhalbierenden auf den Seiten bilden, mit einander vertauscht und die neuen Teilpunkte mit den Gegenecken verbindet.

Trifft also  $AJ$  die  $BC$  in  $J_a$  und ist  $BQ = CJ_a$ , so schneiden sich die  $AQ_a$  in  $Q \equiv b^2 c^2 \equiv U$ . Hierdurch ist also auch eine Construction des Punktes  $T$  gegeben. Sie ist folgende:

Man ziehe durch  $A$  die Parallele zu  $BC$ . Diese Parallelen bilden das Dreieck  $\mathfrak{ABC}$ . Man ziehe in diesem Dreieck die Winkelhalbierenden, dadurch wird  $\mathfrak{BC}$  in  $\mathfrak{J}_a$  geteilt.  $\Omega_a$  sei ein solcher Punkt der  $\mathfrak{BC}$ , dass  $\mathfrak{B}\Omega_a = \mathfrak{C}\mathfrak{J}_a$ . Die  $A\Omega_a$  treffen sich im Punkte  $\Omega \equiv T$ .

Für  $\mathfrak{ABC}$  als Fundamentaldreieck ist nämlich

$$\Omega \equiv (\mathfrak{AC})^2 \cdot (\mathfrak{AB})^2$$

Die Seitennormale von  $\Omega$  auf  $\mathfrak{BC}$  ist also:

$$(\mathfrak{AC})^2 \cdot (\mathfrak{AB})^2 \cdot \lambda$$

wo

$$\Sigma \lambda \cdot (\mathfrak{BC}) (\mathfrak{AC})^2 \cdot (\mathfrak{AB})^2 = 2 A \mathfrak{ABC}$$

das ist:

$$\Sigma \lambda \cdot 2a \cdot (2b)^2 \cdot (2c)^2 = 8F$$

$$\lambda = \frac{F}{4abc} \cdot \frac{1}{\Sigma bc}$$

Die Seitennormale von  $\Omega$  auf  $\mathfrak{BC}$  ist also:

$$\frac{4F}{a} \cdot \frac{bc}{\Sigma bc}$$

Verlängert man diese Seitennormale über  $\Omega$ , bis sie die  $BC$  in  $T_a$  trifft; so ist:

$$\frac{4F}{a} \cdot \frac{bc}{\Sigma bc} + \Omega T_a = \frac{2F}{a}$$

$$\Omega T_a \equiv \frac{2F}{a} \left( 1 - \frac{2bc}{\Sigma bc} \right) \equiv TT_a$$

$$\Omega \equiv T$$

Die Gerade  $TU$  hat die Form:

$$\begin{vmatrix} c^2 a^2 & ca(bc+ba-ca) \\ a^2 b^2 & ab(ca+cb-ab) \end{vmatrix} \equiv a^2(b-c)$$

Nun ist  $a^2(b-c)$  der Umkreispol der Geraden  $b-c$ , d. h.: Die Verbindungsgerade des Punktes der gleichen Paralleltransversalen und desselben Punktes des Mittendreiecks ist die Harmonikale des reciproken Umkreispoles der Verbindungsgeraden aller Symmetriepunkte erster Ordnung. Es ist ferner:

$$\left| \begin{array}{cc} ca & ca(bc+ba-ca) \\ aa & ab(ca+cb-ab) \end{array} \right| = a^2(b-b)$$

Sonach liegen der Schwerpunkt, der Punkt der gleichen Paralleltransversalen und derselbe Punkt für das Mittendreieck in einer Geraden. Die Seitennormalen von  $T$ ,  $U$  sind:

$$\frac{2F}{a} \cdot \frac{ab+ac-bc}{ab+ac+bc}, \quad \frac{2F}{a} \cdot \frac{bc}{\Sigma bc}$$

Die Mitte von  $TU$  ist der Punkt  $b+c$ , ein Punkt der Geraden  $b-c$ . Die Gerade aller Symmetriepunkte erster Ordnung halbirt den Abstand des Punktes der gleichen Paralleltransversalen von demselben des Mittendreiecks.

## V.

Zur Einführung des Punktes  $T$  in die Elemente dürfte folgende Ableitung dienen:

$$A_b A_c = B_c B_a = C_a C_b = t$$

$$BB_a : BC = t : AC$$

$$BB_a = \frac{at}{b}, \quad CC_a = \frac{at}{c}, \quad BC_a = \frac{ac-at}{c}$$

$$B_a C_a = \frac{abt+act-abc}{bc}$$

$$TC_a : B_a C_a = AB : BC$$

$$TC_a + TC_b = t$$

Die Auflösung der letzten Gleichung gibt den Wert von  $t$ . Als Uebungsaufgaben seien folgende erwähnt:

Ist eine Dreiecksseite die mittlere Proportionale der beiden andern und die Summe dieser beiden Seiten gleich der dreifachen Mittel-seite, so ist die Paralleltransversale halb so lang als die Mittel-seite.

In keinem Dreieck ist die Paralleltransversale das harmonische Mittel zweier Seiten.

Die Fläche eines Dreiecks, in welchem eine Seite die mittlere Proportionale der beiden andern ist, verhält sich zum Quadrat der Mittelseite wie der Inkreisradius zur Paralleltransversalen.

Ist in einem Dreieck eine Seite das harmonische Mittel der beiden andern, so ist die zweifache Mittelseite gleich der dreifachen Paralleltransversale und die Verbindungsgerade des Schwerpunktes mit dem Punkte der gleichen Paralleltransversalen läuft zur Mittelseite parallel.

## XIV.

## Isogonal entsprechende Gerade des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

Die Gleichung einer Geraden in trimetrischen Punktcoordinaten bezogen auf das Fundamentaldreieck  $ABC$  sei:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Sie treffe die  $BC$  in  $A_1$ , dann ist:

$$\begin{array}{lll} A_1 \equiv 0 & c_1 & -b_1 \\ B_1 \equiv -c_1 & 0 & a_1 \\ C_1 \equiv b_1 & -a_1 & 0 \end{array}$$

Nehmen wir auf der  $BC$  einen solchen Punkt  $\mathfrak{A}_1$  an, dass:

$$A_1 B = \mathfrak{A}_1 C, \quad A_1 C = \mathfrak{A}_1 B$$

so liegen die  $\mathfrak{A}_1$  ebenfalls in einer Geraden. Ihre Gleichung wird auf folgende Weise gefunden:

Ziehen wir von  $A_1$  die Normalen auf  $AC$ ,  $AB$  und bezeichnen wir dieselben mit  $A_1(b)$ ,  $A_1(c)$ ; so gibt die Figur:



$$A_1(b) = A_1 C \sin \gamma = \frac{A_1 C \cdot 2F}{ab}$$

$$A_1(c) = A_1 B \sin \beta = \frac{A_1 B \cdot 2F}{ac}$$

Nun ist aber auch wegen  $A_1 \equiv 0$   $c_1 - b_1$ :

$$A_1(b) = \frac{2Fc_1}{bc_1 - cb_1}, \quad A_1(c) = \frac{-2Fb_1}{bc_1 - cb_1}$$

Sonach ist:

$$\frac{A_1 C}{ab} = \frac{c_1}{bc_1 - cb_1} = \frac{\mathfrak{A}_1 B}{ab}$$

$$\frac{A_1 B}{ac} = \frac{-b_1}{bc_1 - cb_1} = \frac{\mathfrak{A}_1 C}{ac}$$

$$\mathfrak{A}_1 B = \frac{abc_1}{bc_1 - cb_1}, \quad A_1 C = \frac{-acb_1}{bc_1 - cb_1}$$

Bezeichnen wir die Normalen von  $\mathfrak{A}_1$  auf  $AC$ ,  $AB$  mit  $\mathfrak{A}_1(b)$ ,  $\mathfrak{A}_1(c)$ ; so erhalten wir:

$$\mathfrak{A}_1(b) = \mathfrak{A}_1 C \sin \gamma = \frac{\mathfrak{A}_1 C \cdot 2F}{ab}$$

$$\mathfrak{A}_1(c) = \mathfrak{A}_1 B \sin \beta = \frac{\mathfrak{A}_1 B \cdot 2F}{ac}$$

oder:

$$\mathfrak{A}_1(b) = -\frac{cb_1}{b} \cdot \frac{2F}{bc_1 - cb_1}, \quad \mathfrak{A}_1(c) = \frac{bc_1}{c} \cdot \frac{2F}{bc_1 - cb_1}$$

Wir bekommen also:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &\equiv 0 & -\frac{cb_1}{b} & \frac{bc_1}{c} \\ &\equiv 0 & c^2 b_1 & -b^2 c_1 \\ &\equiv 0 & c^2 a_1 b_1 & -b^2 c_1 a_1 \end{aligned}$$

Die  $\mathfrak{A}_1$  liegen somit in der Geraden  $a^2 b_1 c_1$ . Ist  $a_1 = p_a p_c$ , die Harmonikale des Punktes  $P \equiv p_a$ ; so ist  $a^2 b_1 c_1 \equiv a^2 p_a$ .

Projiciren wir die Figur  $AA_1 \mathfrak{A}_1$ , so erhalten wir für den Schwerpunkt  $S$  des ursprünglichen Dreiecks  $ABC$  einen beliebigen Punkt  $P \equiv p_a$ . Dann trifft  $AP$  die  $BC$  in  $I_a$ , der Projection der Mitte von  $BC$ , dem Punkte  $S_a$ . Die Harmonikale von  $S$ , die Gerade:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

wird die Harmonikale von  $P$ . Diese trifft die  $BC$  in  $\Pi_a$ . Da  $S_a$

in der ursprünglichen Figur die Mitte der Strecke  $A_1\mathfrak{A}_1$  war, so sind jetzt die Punkte  $A_1\mathfrak{A}_1$  bezüglich  $P_a\Pi_a$  harmonisch conjugirt. Wird  $XY$  durch  $ZT$  harmonisch geteilt, so ist:

$$T \equiv \frac{x_a(x_a\eta + y_a\xi) - 2x_ay_a\xi}{\xi(x_a\eta + y_a\xi) - 2\xi\eta x_a}$$

wenn

$$\begin{aligned} X &\equiv x_a, & Y &\equiv y_a, & Z &\equiv z_a \\ \xi &= \Sigma ax_a, & \eta &= \Sigma ay_a, & \zeta &= \Sigma az_a \end{aligned}$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned} X &\equiv P_a \equiv 0 & p_b & & p_c \\ Y &\equiv \Pi_a \equiv 0 & p_b & & -p_c \\ Z &\equiv A_1 \equiv 0 & c_1 & & -b_1 \\ \xi &= bp_b + cp_c, & \eta &= bp_b - cp_c, & \zeta = bc_1 - cb_1 \end{aligned}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} T &\equiv 0 & b_1pb^2 & & -c_1pc^2 \equiv \mathfrak{A}_1 \\ &\equiv 0 & a_1b_1pa^2pb^2 & & -a_1c_1pa^2pc^2 \end{aligned}$$

Die  $\mathfrak{A}_1$  liegen in der Geraden  $b_1c_1p_1^2p_c^2$ . Diese wird also auf folgende Weise construirt:

Die Geraden  $a_1, AP$  treffen die  $BC$  in  $A_1, P_a$ .  $\Pi_a$  sei harmonisch zu  $P_a$  bezüglich  $BC$ . Ferner trenne  $\mathfrak{A}_1$  die  $P_a\Pi_a$  harmonisch von  $A_1$ . Die  $\mathfrak{A}_1$  bilden die Gerade  $b_1c_1p_b^2p_c^2$ . — Für  $p_a = 1$  wird  $b_1c_1p_b^2p_c^2 = b_1c_1$ .  $J_a, I_a$  seien die Punkte  $P_a\Pi_a$  für den Fall  $P \equiv J \equiv 1$ . Dann halbirt  $AJ_a$  den Winkel  $A$ . Da  $AJ_a$  senkrecht zu  $AI_a$  ist und  $A_1\mathfrak{A}_1$  die Strecke  $J_aI_a$  harmonisch teilt, so wird auch der Winkel  $A_1AJ_a$  durch  $AJ_a$  halbirt. Ist also die Gerade  $a_1$  gegeben, so hat man folgende Construction der Geraden  $b_1c_1$ :

Die Halbierungslinie des Winkels  $A$  treffe die  $BC$  in  $J_a$ . Die Halbierungslinie des Aussenwinkels von  $A$  schneide die Gegenseite in  $I_a$ . Wenn nun die Gerade  $a_1$  die  $BC$  in  $A_1$  trifft, so trage man den Winkel  $A_1AJ_a$  auf der andern Seite von  $AJ_a$  auf, so dass der neue Schenkel die  $BC$  in  $\mathfrak{A}_1$  schneidet. Die  $\mathfrak{A}_1$  liegen dann in der Geraden  $b_1c_1$ .

Wien, Juni 1877.

XV.

Ueber Interpolation.

Von

**Neil.**

Die Lösung sehr vieler Probleme der Mathematik, Mechanik, Astronomie und Geodäsie lässt sich in hohem Grade durch Anwendung von Tafeln erleichtern, in welchen die Zahlenwerte gewisser Functionen für eine Anzahl numerischer Werte der Veränderlichen angegeben sind. Nun ist es nötig, aus den Zahlen der Tafel die Werte der Function auch für solche Werte der Variablen oder des Arguments der Function abzuleiten, welche in der Tafel nicht enthalten sind. Die hierzu nötige Rechnung nennt man das Interpoliren. Die Formeln, welche man zu diesem Zwecke entwickelt hat, lassen das Gesuchte in aller nur wünschenswerten Schärfe finden.

In den Tafeln, in welchen die Functionswerte zusammengestellt werden, lässt man die Argumente stets nach gleich grossen Intervallen fortschreiten; zeigen dann auch die Functionen gleiche oder doch beinahe gleiche Differenzen; so gestalten sich die Interpolationsrechnungen am einfachsten, indem dann gewisse Aenderungen des Arguments proportionale Aenderungen der Function zur Folge haben. Bei den Tafeln der Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen, welche tagtäglich gebraucht werden, ist diese Anordnung, und zwar mit vollem Rechte, getroffen. Nun gibt es ausser den genannten, noch eine sehr grosse Anzahl anderer Functionen, von welchen Tafeln zu besitzen, für den Mathematiker von grossem Interesse wäre. Wollte man auch diese Tafeln so einrichten, dass bei den Interpolationsrechnungen nur die ersten Differenzen der Functionen in Betracht kämen, so müsste man denselben meist eine beträchtliche Ausdehnung geben. Die sehr grosse

Arbeit der Berechnung solch' ausgedehnter Tafeln, so wie die bedeutenden Druckkosten solcher voluminöser Werke würden dann aber in gar keinem Verhältnisse zu dem Zwecke stehen. Hier muss sich der Rechner schon gefallen lassen, aus den Tafeln von geringerem Umfang, die Functionswerte mit Berücksichtigung der höheren Differenzen zu entnehmen.

Bei der Anlage solcher Tafeln ist vor allem zu entscheiden, auf wie viele Decimalstellen die Functionswerte angegeben werden sollen. Denn dieselben sind (ganz vereinzelte Fälle ausgenommen) stets Irrationalzahlen, welche die betreffende Function um so genauer darstellen, auf eine je grössere Zahl von Stellen sie berechnet sind. Doch wird man hier nicht weitergehen, als der vorgeschriebene Grad von Genauigkeit unbedingt verlangt. Dann hat man noch festzusetzen, nach welchem Intervall man die Argumente will fortschreiten lassen. Je grösser man das Intervall nimmt, um so weniger umfangreich wird die Tafel, aber auch um so umständlicher werden beim Gebrauch derselben die Interpolationsrechnungen.

Durch diese Arbeit soll nun gezeigt werden, dass bei zweckmässig eingerichtetem Interpolationsapparat die Tafeln vieler Functionen nur eine geringe Ausdehnung erfordern und doch jeder Wert der Function sich ohne allzu weitläufige Rechnung daraus entnehmen lässt.

## § 2.

Wir wollen zunächst ein von der bisher üblichen Interpolationsmethode verschiedenes Verfahren entwickeln, bei welchem statt der Differenzen der Functionswerte gewisse andere Zahlen zur Anwendung kommen und wobei sich ausserdem die Logarithmentafel mit Vorteil gebrauchen lässt.

Sei  $f(p)$  eine Function irgend einer Variablen  $p$  und stelle  $y$  einen Zuwachs von  $p$  vor, so hat man nach dem Taylor'schen Satze:

$$f(p+y) = f(p) + f'(p) \cdot y + \frac{1}{2} \cdot f''(p) y^2 + \frac{1}{6} f'''(p) \cdot y^3$$

wenn

$$\frac{df}{dp} = f'(p), \quad \frac{d^2f}{dp^2} = f''(p),$$

u. s. f. gesetzt wird.

Geht man nicht über die dritte Potenz von  $y$  hinaus, indem man voraussetzt, dass die Reihe so convergent sei, dass die vierten und höheren Potenzen keinen merklichen Einfluss mehr ausüben, so kann man den obigen Ausdruck auch in folgender Form anschreiben:

$$f(p+y) = f(p) + \left[ 1 + \left( 1 + \frac{f'''(p)}{3f''(p)} \cdot y \right) \frac{f''(p)}{2f'(p)} \cdot y \right] f'(p) \cdot y$$

Setzt man darin

$$\frac{f'''(p)}{3f''(p)} = a, \quad \frac{f''(p)}{2f'(p)} = b \quad \text{und} \quad f'(p) = c,$$

so wird

$$f(p+y) = f(p) + [1 + (1 + ay)by]cy$$

Durch die Benutzung der gewöhnlichen Logarithmentafel unter Hinzuziehung der Tafel \*) der Logarithmen für Summe und Differenz lässt sich das zweite Glied zur Rechten ziemlich leicht berechnen.

Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens soll nun in mehreren Fällen erläutert werden.

### § 3.

In einer Abhandlung über die Wurfbewegung im widerstehenden Mittel in diesem Archiv, Theil XLVI, Nr. XX. kommt ein Ausdruck vor, welcher dort die Lambdafunction genannt wird, nämlich:

$$\mathcal{A}(p) = p\sqrt{1+p^2} + \log \text{nat}(p + \sqrt{1+p^2})$$

Hier ist

$$\frac{d\mathcal{A}(p)}{dp} = \mathcal{A}'(p) = 2\sqrt{1+p^2}, \quad \mathcal{A}''(p) = \frac{2}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \mathcal{A}'''(p) = \frac{2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach § 2. findet sich

$$a = \frac{1}{3p(1+p^2)}, \quad b = \frac{p}{2(1+p^2)}, \quad c = 2\sqrt{1+p^2}$$

$$\mathcal{A}(p+y) = \mathcal{A}(p) + [1 + (1 + ay)by]cy$$

Für den besonderen Fall  $p = 0$  wird

$$a = \infty, \quad b = 0, \quad c = 2;$$

dafür ist aber auch

$$\mathcal{A}(p) = 0, \quad \mathcal{A}'(p) = 2, \quad \mathcal{A}''(p) = 0, \quad \mathcal{A}'''(p) = 2,$$

daher

$$\mathcal{A}(y) = 2y + \frac{1}{3}y^3 = (1 + \frac{1}{3}y^2)2y$$

Die folgende Tafel enthält die Werte der Lambdafunction auf 5 Decimalstellen. Zugleich sind überall die zugehörigen Werte von  $\log a$ ,  $\log b$  und  $\log c$  angegeben.

\*) Die vom Verfasser bearbeitete Tafel der fünfstelligen Logarithmen, dritte Auflage, Darmstadt, Verlag von J. P. Diehl 1870 enthält unter andern eine Tafel der Logarithmen für Summe und Differenz, in welcher man zu irgend einem  $\log x$  den zugehörigen  $\log(1+x)$  angegeben findet, welche daher für die obige Rechnung sehr bequem ist.

## I. Tafel der Lamda-Function.

$\mathcal{A}(p+y) = \mathcal{A}(p) + [1 + (1+ay)by] \cdot y$									
0.0	0.00000	$\infty$	$-\infty$	0.30103	1.5	3.89893	8.83490	9.36318	0.55697
0.1	0.20033	0.51856	8.69465	0.30319	1.6	4.26786	8.76781	9.35164	0.57675
0.2	0.40265	0.20482	8.98297	0.30955	1.7	4.65374	8.70248	9.33947	0.59600
0.3	0.60888	0.00833	9.13866	0.31974	1.8	5.05687	8.64024	9.32688	0.61471
0.4	0.82085	9.85636	9.23657	0.33321	1.9	5.47747	8.58042	9.31402	0.63288
0.5	1.04023	9.72700	9.30103	0.34949	2.0	5.91577	8.52288	9.30103	0.65051
0.6	1.26854	9.61119	9.34358	0.36780	2.1	6.37196	8.46746	9.28799	0.66763
0.7	1.50713	9.50459	9.37088	0.38762	2.2	6.84620	8.41404	9.27498	0.68424
0.8	1.75717	9.40494	9.38722	0.40845	2.3	7.33865	8.36250	9.26205	0.70036
0.9	2.01969	9.31096	9.39553	0.44716	2.4	7.84944	8.31272	9.24923	0.71600
1.0	2.29559	9.22185	9.39794	0.45154	2.5	8.37869	8.26460	9.23657	0.73120
1.1	2.58561	9.13709	9.39597	0.47323	2.6	8.92651	8.21804	9.22408	0.74596
1.2	2.89043	9.05631	9.39076	0.49472	2.7	9.49299	8.17296	9.21178	0.76031
1.3	3.21061	8.97918	9.38316	0.51591	2.8	10.07823	8.12927	9.19968	0.77426
1.4	3.54663	8.90546	9.37381	0.53668	2.9	10.68230	8.08689	9.18778	0.78782
1.5	3.89893	8.83490	9.36318	0.55697	3.0	11.30528	8.04576	9.17609	0.80103

Für  $p = 0$  benutzt man die folgende Formel:

$$\log \mathcal{A}(y) = \log(1 + \frac{1}{2}y^2) + 0.30103 + \log y$$

$$\log \frac{1}{2} = 9.22185 - 10$$

Die Tafel enthält die Werte von  $\mathcal{A}(p)$  nur bis zum Argument  $p=3$ . Grössere Werte kommen in der Anwendung selten vor. Sollte dies dennoch der Fall sein, so findet man im § 10. Methoden angegeben, wodurch diese und die umgekehrte Aufgabe auf verhältnissmässig leichte Weise gelöst werden können.

Die Lamdafunction für negative Argumente findet sich ebenfalls negativ, d. h. es ist allgemein:

$$\mathcal{A}(-p) = -\mathcal{A}(p).$$

## § 4.

Den Gebrauch der in dem vorigen Paragraphen gegebenen Tafel wollen wir an einigen Beispielen zeigen.

1.  $\mathcal{A}(0.729548)$  soll berechnet werden.

Hier setzt man  $p = 0.7$  und  $y = 0.029548$

$$\begin{array}{rcl}
 \log a & = & 9.50459 \\
 + \log y & = & 8.47053 \\
 \hline
 \log ay & = & 7.97512 \\
 \log(1+ay) & = & 0.00408 \\
 + \log b & = & 9.37088 \\
 + \log y & = & 8.47053 \\
 \hline
 & & 7.84549 \\
 \log(1+(1+ay)by) & = & 0.00304 \\
 + \log c & = & 0.38762 \\
 + \log y & = & 8.47053 \\
 \hline
 \log 0.072642 & = & 8.86119
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 A(0.7) & = & 1.50713 \\
 + & & 0.07264 \\
 \hline
 A(0.729548) & = & 1.57977
 \end{array}$$

2.  $A(2.76348)$  soll bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcl}
 p & = & 2.7, \quad y = 0.06348 \\
 \log a & = & 8.17296 \\
 \log y & = & 8.80264 \\
 \hline
 \log ay & = & 6.97560 \\
 \log(1+ay) & = & 0.00041 \\
 \log b & = & 9.21178 \\
 \log y & = & 8.80264 \\
 \hline
 & & 8.01483 \\
 \log(1+(1+ay)by) & = & 0.00447 \\
 + \log c & = & 0.76031 \\
 + \log y & = & 8.80264 \\
 \hline
 \log 0.36933 & = & 9.56742
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 A(2.7) & = & 9.49299 \\
 + & & 0.36933 \\
 \hline
 A(2.76348) & = & 9.86232
 \end{array}$$

3. Soll auch noch  $A(0.04352)$  gesucht werden, so ist  $p = 0$ ,  
 $y = 0.04352$

$$\begin{array}{rcl}
 \log y & = & 8.63869 \\
 \log x^2 & = & 7.27738 \\
 \log \frac{1}{8} & = & 9.22185 \\
 \hline
 & & 6.49923 \\
 \log(1+\frac{1}{8}y^2) & = & 0.00014 \\
 & & 0.30103 \\
 + \log y & = & 8.63869 \\
 \hline
 \log A(y) & = & 8.93986 \quad \text{folglich} \quad A(0.04352) = 0.08707
 \end{array}$$

## § 5.

Auch die umgekehrte Aufgabe, nämlich zu einem gegebenen  $\mathcal{A}(x)$  das zugehörige  $x$  zu bestimmen, können wir jetzt leicht lösen. Wir erhalten aus unserer Gleichung

$$y = \frac{\mathcal{A}(p+y) - \mathcal{A}(p)}{c[1 + (1+ay)by]}$$

Setzt man  $\mathcal{A}(p+y) = \mathcal{A}(x)$  und versteht unter  $\mathcal{A}(p)$  den nächstkleineren in Tafel I. stehenden Wert der Lamdafunction, so ist, wenn man  $y' = \frac{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(p)}{c}$  nimmt,  $y'$  als ein erster Näherungswert für  $y$  zu betrachten, dies gibt uns

$$y = \frac{y'}{1 + (1+ay)by}$$

Vernachlässigt man hier vorerst das Glied  $ay$  gegen 1 und setzt  $y'$  statt  $y$ , so erhält man einen genaueren Wert für  $y$ , den wir durch  $y''$  bezeichnen, also  $y'' = \frac{y'}{1 + by'}$ ; mit diesem können wir jetzt den Wert von  $y$  genau erhalten. Wir haben daher zur Lösung dieser Aufgabe die folgenden Gleichungen:

$$y' = \frac{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(p)}{c}$$

$$y'' = \frac{y'}{1 + by'}$$

$$y = \frac{y'}{1 + (1+ay'')by''}$$

$$x = p + y$$

Sei z. B.  $\mathcal{A}(x) = 6.25235$ , so gibt die Tafel den nächst kleineren Wert

$$\mathcal{A}(2.0) = 5.91577$$

$$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(2.0) = 0.33658$$

$$\log 0.33658 = 9.52709$$

$$-\log c = 0.65051$$

$$\log y' = 8.87658$$

$$+\log b = 9.30103$$

$$\log by' = 8.17761$$

$$\log(1+by') = 0.00649$$

$$\log y'' = 8.87009$$

$$+\log a = 8.52288$$

$$\log ay'' = 7.39297$$

$$\log(1+ay'') = 0.00107$$

$$+\log b = 9.30103$$

$$+\log y'' = 8.87009$$

$$8.17219$$

$$\log(1+(1+ay'')by'') = 0.00641$$

$$\log y' = 8.87658$$

$$\log y = 8.87017$$

$$y = 0.07416$$

$$x = p + y = 2.07416$$



Anm. Fände sich in diesem Falle  $\log y$  noch beträchtlich verschieden von  $\log y''$ , so würde man  $\log y'''$  statt  $\log y$  schreiben und die Rechnung nach der Formel  $y = \frac{y'}{1 + (1 + ay''')by''}$  wiederholen.

Wenn das gegebene  $A(x) < 0.20033$ , so findet man

$$y' = \frac{1}{3} A(x)$$

$$y'' = \frac{y'}{1 + \frac{1}{3} y'^2}$$

$$y = \frac{y'}{1 + \frac{1}{3} y''^2} = x$$

Z. B.  $A(x) = 0.08707$

$\log A(x) = 8.93987$ $+ \log \frac{1}{3} = 9.69897$ <hr style="width: 100%;"/> $\log y' = 8.63884$ $\log y'^2 = 7.27768$ $\log \frac{1}{3} = 9.22185$ <hr style="width: 100%;"/> $6.49953$ $\log(1 + \frac{1}{3} y'^2) = 0.00014$ <hr style="width: 100%;"/> $\log y'' = 8.63870$	$\log y''^2 = 7.27740$ $+ \log \frac{1}{3} = 9.22185$ <hr style="width: 100%;"/> $6.49925$ $\log(1 + \frac{1}{3} y''^2) = 0.00014$ $\log y' = 8.63884$ <hr style="width: 100%;"/> $\log y = 8.63870$ $x = y = 0.04352$
---	--

Hier stimmen  $y''$  und  $y$  vollständig überein, so dass die letzte Wiederholung der Rechnung ganz überflüssig war.

## § 6.

Um die Anwendbarkeit unserer Methode des Interpolirens in einem anderen Falle zu zeigen, stellen wir uns die Aufgabe, eine Tafel zu construiren, aus welcher man den natürlichen Logarithmen irgend einer Zahl auf 6 Decimalstellen genau entnehmen kann.

Der Taylor'sche Lehrsatz gibt die Beziehung:

$$* \lg(p+y) = \lg p + \frac{1}{p} \cdot y - \frac{1}{2p^2} \cdot y^2 + \frac{1}{3p^3} \cdot y^3 - \frac{1}{4p^4} \cdot y^4 + \dots$$

oder, wenn man nicht über die dritte Dimension hinausgeht und

---

\*) Die natürlichen Logarithmen sollen stets durch  $\lg$ , die brigg'schen durch  $\log$  bezeichnet werden.

$$a = \frac{2}{3p}, \quad b = \frac{1}{2p}, \quad c = \frac{1}{p}$$

setzt:

$$\lg(p+y) = \lg(p) + [1 - (1-ay)by]cy$$

Wie aus dieser Formel zu ersehen, kommt hier wiederholt die Aufgabe vor, zu einem gegebenen  $\log x$  (wo stets  $x < 1$ ) den zugehörigen  $\log(1-x)$  zu bestimmen. Vermittelst der Tafel für Logarithmen der Summe und Differenz lässt sich wohl diese Aufgabe lösen, denn es ist

$$\log(1-x) = \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) + \log x$$

Wegen des wiederholten Auftretens derselben würde jedoch die jedesmalige Umformung allzu umständlich sein; wir geben daher am Schlusse dieser Abhandlung eine Tafel, woraus man zu irgend einem gegebenen  $\log x$  den zugehörigen  $\log(1-x)$  ohne weiters entnehmen kann.

Diese Tafel (V) bedarf keiner besonderen Erklärung, da sie in ihrer Einrichtung mit der Mehrzahl der gebräuchlichen Logarithmentafeln übereinstimmt, und daher nach ihren Ueberschriften jedem Sachverständigen klar sein wird. Nur das hat man zu beachten, dass bei dem wachsenden Argument  $A$  die Functionen  $B$  abnehmen. Die Tafel ist als absolut vollständig zu betrachten; denn wenn  $\log x > 9.69897 - 10$ , so sucht man ihn unter  $B$  auf und erhält in dem zugehörigen  $A$  den  $\log(1-x)$ .

## § 7.

Wir lassen nun die Tafel der natürlichen Logarithmen folgen. Sie enthält die Logarithmen einer jeden zweistelligen Zahl auf 6 Decimalstellen. Die Tafel enthält ferner die brigg'schen Logarithmen der Grössen  $a$ ,  $b$  und  $c$ , so dass jetzt die in § 6. entwickelte Formel unmittelbar angewandt werden kann.

# II. Tafel der natürlichen Logarithmen.

$$\lg \text{nat}(p+y) = \lg \text{nat } p + [1 - (1 - ay)by]cy$$

p	lg p	log a	log b	log c	p	lg p	log a	log b	log c
10	2.302585	8.82391	8.69897	9.00000	60	4.094345	8.04576	7.92082	8.22185
11	2.397895	8.78252	8.65758	9.5861	61	4.110874	8.03858	7.91364	8.21467
12	2.484907	8.74473	8.61979	8.92082	62	4.127184	8.03152	7.90658	8.20761
13	2.564949	8.70997	8.58503	8.88606	63	4.143135	8.02457	7.89963	8.20066
14	2.639057	8.67778	8.55284	8.85387	64	4.158883	8.01773	7.89279	8.19382
15	2.708050	8.64782	8.52288	8.82391	65	4.174387	8.01100	7.88606	8.18709
16	2.772589	8.61979	8.49485	8.79588	66	4.189655	8.00436	7.87943	8.18046
17	2.833213	8.59346	8.46852	8.76955	67	4.204693	7.99783	7.87290	8.17393
18	2.890372	8.56864	8.44370	8.74473	68	4.219508	7.99140	7.86646	8.16749
19	2.944439	8.54516	8.42022	8.72125	69	4.234107	7.98506	7.86012	8.16115
20	2.995732	8.52288	8.39794	8.69897	70	4.248495	7.97881	7.85387	8.15490
21	3.044522	8.50169	8.37675	8.67778	71	4.262680	7.97265	7.84771	8.14874
22	3.091042	8.48149	8.35655	8.65758	72	4.276666	7.96653	7.84164	8.14267
23	3.135494	8.46218	8.33724	8.63827	73	4.290459	7.96059	7.83565	8.13668
24	3.178054	8.44370	8.31876	8.61979	74	4.304065	7.95468	7.82974	8.13077
25	3.218876	8.42597	8.30103	8.60206	75	4.317488	7.94885	7.82391	8.12494
26	3.258097	8.40894	8.28400	8.58503	76	4.330733	7.94310	7.81816	8.11919
27	3.295837	8.39254	8.26761	8.56864	77	4.343805	7.93742	7.81248	8.11351
28	3.332205	8.37675	8.25181	8.55284	78	4.356709	7.93181	7.80688	8.10791
29	3.367296	8.36151	8.23657	8.53760	79	4.369448	7.92628	7.80134	8.10237
30	3.401197	8.34679	8.22185	8.52288	80	4.382027	7.92082	7.79588	8.09691
31	3.433987	8.33145	8.20761	8.50864	81	4.394449	7.91542	7.79048	8.09151
32	3.465736	8.31876	8.19382	8.49485	82	4.406719	7.91009	7.78516	8.08619
33	3.496508	8.30539	8.18046	8.48149	83	4.418841	7.90483	7.77989	8.08092
34	3.526361	8.29243	8.16749	8.46852	84	4.430817	7.89963	7.77469	8.07572
p	lg p	log a	log b	log c	p	lg p	log a	log b	log c
35	3.555348	8.28084	8.15490	8.45593	85	4.442651	7.89449	7.76955	8.07058
36	3.583519	8.26761	8.14267	8.44370	86	4.454347	7.88941	7.76447	8.06550
37	3.610918	8.25571	8.13077	8.43180	87	4.465908	7.88439	7.75945	8.06048
38	3.637586	8.24413	8.11919	8.42022	88	4.477387	7.87943	7.75449	8.05552
39	3.663562	8.23284	8.10791	8.40894	89	4.488636	7.87452	7.74958	8.05061
40	3.688879	8.22185	8.09691	8.39794	90	4.499810	7.86967	7.74473	8.04576
41	3.713572	8.21112	8.08619	8.38722	91	4.510860	7.86487	7.73993	8.04096
42	3.737670	8.20066	8.07572	8.37675	92	4.521789	7.86012	7.73518	8.03621
43	3.761200	8.19044	8.06550	8.36653	93	4.532599	7.85543	7.73049	8.03152
44	3.784190	8.18046	8.05552	8.35655	94	4.543295	7.85078	7.72584	8.02687
45	3.806662	8.17070	8.04576	8.34679	95	4.553877	7.84619	7.72125	8.02228
46	3.828641	8.16115	8.03621	8.33724	96	4.564348	7.84164	7.71670	8.01773
47	3.850148	8.15181	8.02687	8.32790	97	4.574711	7.83714	7.71220	8.01323
48	3.871201	8.14267	8.01773	8.31876	98	4.584967	7.83268	7.70774	8.00877
49	3.891820	8.13371	8.00877	8.30980	99	4.595120	7.82827	7.70333	8.00436
50	3.912023	8.12494	8.00000	8.30103	100	4.605170	7.82391	7.69897	8.00000
51	3.931826	8.11634	7.99140	8.29243	lg nat            1000=6.907755 "                10000=9.210340 "                100000=11.512925 "                1000000=13.815511 "                10000000=16.118096 "                100000000=18.420681 "                1000000000=20.723266				
52	3.951244	8.10791	7.98297	8.28400					
53	3.970292	8.09963	7.97469	8.27572					
54	3.988984	8.09048	7.96658	8.26761					
55	4.007333	8.08355	7.95861	8.25964					
56	4.025352	8.07572	7.95078	8.25181					
57	4.043051	8.06803	7.94310	8.24413					
58	4.060443	8.06048	7.93554	8.23657					
59	4.077537	8.05306	7.92812	8.23915					
60	4.094345	8.04576	7.92082	8.22185					

$$\lg \text{nat}(p-y) = \lg \text{nat } p - [1 + (1 + ay)by]cy$$

Die Interpolation für solche zweistellige Zahlen, denen noch ein Decimalbruch angehängt ist, lässt sich jetzt leicht ausführen, wobei man zweckmässig nach folgendem Schema verfährt. Zur besseren Uebersicht ist dabei gesetzt worden:

$$ay = a', \quad (1-a')by = b', \quad (1-b')cy = c'$$

Schema.

log a =	log(1-b) =
+ log y =	+ log c =
log a' =	+ log y =
log(1-a') =	log c' =
+ log b =	log p =
+ log y =	+ c' =
log b' =	log(p+y) =

Man geht mit  $\log a'$  in die durch  $A$  bezeichnete Spalte unserer Tafel V. ein, entnimmt das zugehörige  $B$ , welches  $= \log(1-a')$  ist. Ganz ebenso erhält man  $\log(1-b')$ .

Vertauscht man in der § 6. entwickelten Formel  $y$  mit  $-y$ , so geht sie über in:

$$\lg(p-y) = \lg p - [1 + (1+ay)by]cy$$

Dieselbe findet sich auch im Fuss der Tafel II. angegeben und liefert dann eine grössere Genauigkeit als die erstere, wenn der der zweistelligen Zahl angehängte Bruch  $> \frac{1}{2}$  ist. Die Rechnung wird ganz nach dem gleichen Schema ausgeführt, man schreibe nur  $(1+a')$  statt  $(1-a')$ , ebenso  $(1+b')$  statt  $(1-b')$ ; auch hat man schliesslich  $c'$  von  $\log p$  zu subtrahiren.

Ist die Zahl, zu welcher der  $\lg$  nat gesucht werden soll, nicht zweistellig, so multiplicire oder dividire man dieselbe mit derjenigen Potenz von 10, so dass eine zweistellige Zahl entsteht, z. B.

$$\begin{aligned} \lg 0.069378 &= \lg 69.378 - \lg 1000 \\ \lg 578432 &= \lg 57.8432 + \lg 10000 \end{aligned}$$

Die Logarithmen mehrerer aufeinander folgender Potenzen von 10 sind am Schlusse der Taf. II. angegeben.

### § 8.

Durch mehrere Beispiele wollen wir den Gebrauch der Tafel II. erläutern.

1.  $\lg 36.29$  soll gesucht werden.

Man setzt  $p = 36$ ,  $y = 0.29$

$\log a = 8.26761$	$\log(1-b') = 9.99824$
$+ \log y = 9.46240$	$+ \log c = 8.44370$
$\log a' = 7.73001$	$+ \log y = 9.46240$
$\log(1-a') = 9.99766$	$\log c' = 7.90434$
$+ \log b = 8.14267$	$\log p = 3.583519$
$+ \log y = 9.46240$	$+ c' = 0.008023$
$\log b' = 7.60273$	$\lg 36.29 = 3.591542$

Auf 8 Decimalstellen genau ist  $\lg 36.29 = 3.5915\ 4222$ , daher obiges Resultat noch in der 6. Stelle richtig.

2.  $\lg 15.89$  soll gesucht werden.

Man setzt  $p = 15$  und  $y = 0.89$  und erhält  $\log a' = 8.59721$ ,  $\log b' = 8.45474$  und  $\log c' = 8.76075$ ,  $c' = 0.057644$ ,  $\lg p = 2.708050$ , folglich  $\lg 15.89 = 2.765694$ .

Auf 8 Decimalen ist  $\lg 15.89 = 2.7656\ 8998$ , daher unser Resultat um 4 Einheiten der 6. Stelle zu gross. Da nun aber  $15.89 = 16 - 0.11$ , so setze  $p = 16$ ,  $y = 0.11$  und benutze die im Fuss von Tafel II. stehende Formel, so erhält man  $\log a' = 7.66118$ ,  $\log b' = 7.53823$ ,  $\log c' = 7.83876$ ,  $c' = 0.006899$ ,  $\lg p = 2.772589$ , daher  $\lg 15.89 = 2.765690$ , welches Resultat noch in der 6. Stelle richtig ist.

Die Ursache, warum das letzte Resultat genauer, ist leicht einzusehen. Denn die dieser Rechnung zu Grunde liegende Reihe (§ 6)

$$\lg(p+y) = \lg p + \frac{1}{p}y - \frac{1}{2p^2}y^2 + \frac{1}{3p^3}y^3 - \frac{1}{4p^4}y^4 + \dots$$

convergiert, wenn  $y$  sich der Einheit nähert, nicht rasch genug, um das Glied mit  $y''$  zu vernachlässigen, wie hier geschehen ist. Dagegen ist nach der zweiten Formel  $y$  um so kleiner zu nehmen, je weniger der der zweistelligen Zahl angehängte Decimalbruch von 1 verschieden ist.

3.  $\lg 10.5$  ist zu bestimmen.

Hier wäre es gleichgültig, ob man nach der ersten oder zweiten Formel rechnet, weil in beiden Fällen  $y = 0.5$  zu setzen ist. Doch wird die zweite Formel etwas mehr Genauigkeit gewähren, weil für  $p = 11$ , die Werte von  $a$ ,  $b$  und  $c$  etwas kleiner sind als für  $p = 10$ . Wir setzen daher

$$p = 11, \quad y = 0.5$$

$\log a = 8.78252$	$\log(1+b') = 0.01005$
$+\log y = 9.69897$	$+\log c = 8.95861$
$\log a' = 8.48149$	$+\log y = 9.69897$
$\log(1+a') = 0.01296$	$\log c' = 8.66763$
$+\log b = 8.65758$	$\lg p = 2.397895$
$+\log y = 9.69897$	$c' = 0.046519$
$\log b' = 8.36951$	$\lg 10.5 = 2.351376$

Auf 8 Stellen ist  $\lg 10.5 = 2.3513\,7526$ , also der Fehler gleich  $\frac{1}{2}$  Einheiten der 6. Decimalstelle. Diess ist indes auch der ungünstigste Fall, der überhaupt eintreten kann, weil für solche Zahlen, wie 11.5 oder 12.5 u. s. f., wo  $y = \frac{1}{2}$  zu nehmen ist, die Werte von  $a, b, c$  stets abnehmen, für andere Zahlen dagegen immer  $y$  kleiner als  $\frac{1}{2}$  gesetzt werden kann.

Es lässt sich daher behaupten, dass durch die Tafel II., obwohl sie nur den Raum einer Seite in Anspruch nimmt, die Aufgabe gelöst ist, den natürlichen Logarithmen irgend einer Zahl durch eine leichte Rechnung auf 6 Decimalstellen zu bestimmen, wobei im ungünstigsten Falle die letzte Stelle höchstens um eine Einheit unsicher sein wird. Nach der gewöhnlichen Methode des Interpolirens hätte man, um ein gleiches Resultat zu erzielen, die 5 ersten Differenzen in Rechnung ziehen müssen, was jedenfalls viel umständlicher gewesen wäre.

## § 6.

Die Lösung der umgekehrten Aufgabe: Zu einem gegebenen  $\lg x$  die zugehörige Zahl  $x$  zu bestimmen, bietet nun auch keine Schwierigkeit. Man addirt oder subtrahirt  $\lg 10^n$ , wo  $n$  so zu wählen ist, dass die solcher Weise entstehende Zahl zwischen den Grenzen 2.302585 und 4.605170 enthalten ist. Setzt man dann  $\lg x \pm \lg 10^n = \lg(p+y)$  und versteht unter  $\lg p$  den nächst kleineren Wert der Tafel, so erhält man jetzt (siehe § 5.) die successiven Näherungswerte von  $y$  wie folgt:

$$y' = \frac{\lg(p+y) - \lg p}{c}$$

$$y'' = \frac{y'}{1 - by'}$$

$$y = \frac{y'}{1 - (1 - ay'')by''}$$

Setzt man  $\lg(p+y) - \lg p = \alpha$ ,  $y'b = \beta$ ,  $y''a = \gamma$  und  $(1-\gamma)by'' = \delta$ , so wird

$$y' = \frac{\alpha}{c}, \quad y'' = \frac{y'}{1-\beta}, \quad y = \frac{y'}{1-\delta}$$

Die Rechnung lässt sich zweckmässig nach folgendem Schema ausführen:

$\lg(p+y) =$	$\log y'' =$
$-\lg p =$	$+\log a =$
$\alpha =$	$\log \gamma =$
$\log \alpha =$	$\log(1-\gamma) =$
$-\log c =$	$+\log b =$
$\log y' =$	$+\log y'' =$
$+\log b =$	$\log \delta =$
$\log \beta =$	$\log y' =$
$\log(1-\beta) =$	$\log(1-\delta) =$
$\log y'' =$	$\log y =$

$$x = (p+y) \cdot 10^{\mp n}$$

Man könnte auch  $\lg x \pm \lg 10^n = \lg(p-y)$  setzen, und würde dann unter  $\lg p$  den nächst grösseren Wert der Tafel verstehen, dann hätte man

$$y' = \frac{\lg p - \lg(p-y)}{c}$$

$$y'' = \frac{y'}{1 + by'}$$

$$y = \frac{y'}{1 + (1 + ay'')by''}$$

Hier setzt man  $\alpha = \lg p - \lg(p-y)$  und schreibt  $(1+y)$  statt  $(1-\gamma)$ , ebenso  $(1+\beta)$  und  $(1+\delta)$  statt  $(1-\beta)$ ,  $(1-\delta)$ ; im übrigen ist die Rechnung ganz nach dem gleichen Schema auszuführen, und man hat schliesslich:

$$x = (p-y) \cdot 10^{\mp n}$$

## Beispiel.

$\lg x = 7.370860$	$\log y'' = 9.94951$
$\lg 100 = 4.605170$	$+ \log a = 8.64782$
$\lg(p+y) = 2.765690$	$\log y = 8.59733$
$\log 15 = 2.708050$	$\log(1-\gamma) = 9.98247$
$\alpha = 0.057640$	$+ \log b = 8.52288$
$\log \alpha = 8.76072$	$+ \log y'' = 9.94951$
$- \log c = 8.82391$	$\log \delta = 8.45486$
$\log y' = 9.93681$	$\log y' = 9.93681$
$+ \log b = 8.52288$	$\log(1-\delta) = 9.98744$
$\log \beta = 8.45969$	$\log p = 9.94937$
$\log(1-\beta) = 9.98730$	$y = 0.88996$
$\log y'' = 9.94951$	$p+y = 15.88996$
	$x = 1588.996$

Rechnen wir dasselbe Beispiel auch nach der zweiten Methode:

$\log 16 = 2.772589$	$\log y = 7.66124$
$- \log(p-y) = 2.765690$	$\log \delta = 7.52839$
$\alpha = 0.006899$	$\log y = 9.04145$
$\log y' = 9.04291$	$y = 0.110015$
$\log \beta = 7.52786$	$p-y = 15.889985$
$\log y'' = 9.04145$	$x = 1588.9985$

Dieses Resultat ist genauer als das erstere, weil hier  $y$  beträchtlich kleiner ausfiel als dort.

## § 10.

Die in § 3. mitgeteilte Tafel gibt die Werte der Lamdafunction nur bis zu dem Argumente  $p=3$ . Für grössere Werte von  $p$  entwickelt man  $\mathcal{A}(p)$  am zweckmässigsten in eine nach fallenden Potenzen von  $p$  fortschreitende Reihe. Nach dem früheren ist:

$$d\mathcal{A}(p) = 2\sqrt{1+p^2}dp = 2p\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}dp$$

$$d\mathcal{A}(p) = 2p dp \left\{ 1 + \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2.4p^4} + \frac{1.3}{2.4.6p^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8p^8} + \dots \right\}$$

Wird integrirt und die Constante durch  $C$  bezeichnet, so ist



$$A(p) = C + p^2 + \lg p + \frac{1}{8p^2} - \frac{1}{32p^4} + \frac{5}{384p^6} - \dots$$

Um den Wert von  $C$  zu bestimmen, haben wir auch

$$A(p) = p\sqrt{1+p^2} + \lg(p + \sqrt{1+p^2}) = p^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \lg p + \lg \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}\right]$$

$$A(p) = p^2 \left(1 + \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2 \cdot 4p^4} + \dots\right) + \lg p + \lg \left(2 + \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2 \cdot 4p^4} + \dots\right) \\ = p^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8p^2} + \dots + \lg p + \lg 2 + \left(\frac{1}{4p^2} - \frac{1}{16p^4} + \dots\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4p^2} - \dots\right)^2 + \dots$$

$$A(p) = \frac{1}{2} + \lg 2 + p^2 + \lg p + \frac{1}{8p^2} \dots$$

Die Vergleichung mit der obigen Reihe gibt

$$C = \frac{1}{2} + \lg 2 = 0.5 + 0.69314718 = 1.19314718$$

Die obige Reihe schreiben wir jetzt in folgender Form an:

$$A(p) = 1.193147 + p^2 + \lg p + \left[1 - \left(1 - \frac{5}{12p^2}\right) \frac{1}{4p^2}\right] \frac{1}{8p^2}$$

Setzt man darin  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = \frac{1}{8}$ , so wird

$$A(p) = 1.193147 + p^2 + \lg p + \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{p^2}\right) \frac{\beta}{p^2}\right] \frac{\gamma}{p^2};$$

hier ist

$$\log \alpha = 9.61979, \quad \log \beta = 9.39794, \quad \log \gamma = 9.09691$$

Um die Anwendung dieser Formel zu erläutern, nehmen wir  $p = 7$ .

Die Tafel II. gibt  $\lg 7 = \lg 70 - \lg 10 = 1.945910$

$\log \alpha = 9.61979$	$\log \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{p^2}\right) \frac{\beta}{p^2}\right] = 9.99780$
$+ \log \frac{1}{p^2} = 8.30980$	$+ \log \gamma = 9.09691$
<div style="border-top: 1px solid black; width: 100%;">7.92959</div>	$+ \log \frac{1}{p^2} = 8.30980$
$\log \left(1 - \frac{\alpha}{p^2}\right) = 9.99629$	<div style="border-top: 1px solid black; width: 100%;">log 0.0025381 = 7.40451</div>
$+ \log \beta = 9.39794$	
$+ \log \frac{1}{p^2} = 8.30980$	
<div style="border-top: 1px solid black; width: 100%;">7.70403</div>	

$$\begin{array}{r}
 1.193147 \\
 + p^3 = 49.0 \\
 + \lg p = 1.945910 \\
 + \quad 0.002538 \\
 \hline
 A(7) = 52.141595
 \end{array}$$

Ist bei der umgekehrten Aufgabe das gegebene  $A(x) > 12$ , so kommt es zunächst darauf an, einen Näherungswert für  $x$  zu bestimmen.

In der Reihe  $A(x) = x^2 + 1.193 \dots + \lg x + \frac{1}{8x^2} - \dots$  übersteigt das Glied  $x^2$  die Summe der folgenden Glieder beträchtlich, so dass  $\sqrt{A(x)}$  schon als ein Näherungswert von  $x$  betrachtet werden könnte; doch erhalten wir sogleich einen etwas genaueren Wert, wenn wir schreiben  $x = \sqrt{A(x) - 1.193 \dots - \lg x}$  und dabei  $\lg 3$  für  $\lg x$  setzen, da dies der kleinste hier vorkommende Wert von  $x$  ist. Bezeichnet man die successiven Näherungswerte von  $x$  durch  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , so findet sich hiernach:

$$\begin{aligned}
 x' &= \sqrt{A(x) - 2.305} \\
 x'' &= \sqrt{A(x) - 1.193147 - \lg x'} \\
 x''' &= \sqrt{A(x) - 1.193147 - \lg x'' - \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\alpha}{x''^2} \right) \frac{\beta}{x''^2} \right] \frac{\gamma}{x''^2}}
 \end{aligned}$$

$x'''$  wird hier meistens nur wenig von  $x''$  verschieden sein, und ist dann als der richtige Wert von  $x$  zu betrachten. Im anderen Falle würde man in der letzten Formel  $x'''$  an die Stelle von  $x''$  setzen und die Rechnung wiederholen.

Sei z. B.  $A(x) = 73.173644$

$$x' = \sqrt{70.869} = 8.4; \quad \lg 8.4 = 2.128232$$

$$x'' = \sqrt{69.852265} = 8.3578$$

$\lg x''$  kann man mittelst Tafel II. bestimmen, oder man multiplicirt  $x''$  mit 2.3025851.

$  \begin{array}{r}  \log \alpha = 9.61979 \\  + \log \frac{1}{x''^2} = 8.15582 \\  \hline  7.77561 \\  \log \left( 1 - \frac{\alpha}{x''^2} \right) = 9.99734 \\  + \log \beta = 9.39794 \\  + \log \frac{1}{x''^2} = 8.15582 \\  \hline  7.55110  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  \log \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\alpha}{x''^2} \right) \frac{\beta}{x''^2} \right] = 9.99846 \\  + \log \gamma = 9.09691 \\  + \log \frac{1}{x''^2} = 8.15582 \\  \hline  \log 0.0017832 = 7.25119  \end{array}  $
--	--

$$\begin{array}{r}
 1.193147 \\
 + \lg x'' = 2.123196 \\
 + \quad .0.001783 \\
 \hline
 3.318126 \\
 73.173644 \\
 \hline
 x''' = 69.855518 \\
 x''' = 8.35796
 \end{array}$$

Dieser Wert von  $x'''$  ist so wenig von  $x''$  verschieden, dass wir hier  $x = x'''$  nehmen können.

§ 11.

Zum Schlusse soll noch gezeigt werden, wie mittelst einer Tafel von sehr geringem Umfang, das als Gammafunction bezeichnete Euler'sche Integral für jede Zahl leicht berechnet werden kann. Dasselbe ist definirt durch:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^1 \left[ \log \frac{1}{x} \right]^{n-1} dx$$

In seinen Exercices de calcul integral entwickelt Legendre folgende Reihe zur Berechnung dieser Function:

$$\log \Gamma(1+n) = -\log(1+n) + B_1 n + B_2 n^2 - B_3 n^3 + B_4 n^4 - B_5 n^5 + B_6 n^6 - \dots$$

Die Bedeutung der Coefficienten  $B$  geht aus den folgenden Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= M(1-K), & B_2 &= \frac{1}{2}M(S_2-1), & B_3 &= \frac{1}{3}M(S_3-1), \\
 B_4 &= \frac{1}{4}M(S_4-1) \dots
 \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$M = 0.4342944819$$

$$K = 0.5772156649 \quad (\text{Constante des Integrallogarithmus})$$

$$S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$S_3 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

$$S_4 = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Die Zahlenwerte der  $B$  sind nach Legendre:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= 0.18361\ 29037\ 6840 & B_6 &= 0.00125\ 53326\ 86 \\
 B_2 &= 0.14004\ 56532\ 118 & B_7 &= 0.00051\ 80064\ 42 \\
 B_3 &= 0.02925\ 07326\ 917 & B_8 &= 0.00022\ 13466\ 62 \\
 B_4 &= 0.00893\ 81315\ 34 & B_9 &= 0.00009\ 69148\ 80 \\
 B_5 &= 0.00320\ 75040\ 58 & B_{10} &= 0.00004\ 31938\ 49 \\
 B_{11} &= 0.00001\ 95112\ 17 \\
 B_{12} &= 0.00000\ 89061\ 69 \\
 B_{13} &= 0.00000\ 40995\ 17 \\
 B_{14} &= 0.00000\ 18999\ 80 \\
 B_{15} &= 0.00000\ 08856\ 20
 \end{aligned}$$

Setzt man in obiger Reihe  $1+n=p$ , so geht sie, wenn man noch Kürze halber  $\log \Gamma(p)$  durch  $f(p)$  bezeichnet, über in:

$$f(p) = -\log p + B_1(p-1) + B_2(p-1)^2 - B_3(p-1)^3 + B_4(p-1)^4 - B_5(p-1)^5 + \dots$$

Durch wiederholte Differentiation findet sich:

$$f'(p) = -\frac{M}{p} + B_1 + 2B_2(p-1) - 3B_3(p-1)^2 + 4B_4(p-1)^3 - 5B_5(p-1)^4 + \dots$$

$$f''(p) = \frac{M}{p^2} + 2B_2 - 6B_3(p-1) + 12B_4(p-1)^2 - 20B_5(p-1)^3 + 30B_6(p-1)^4 - \dots$$

$$f'''(p) = -\frac{2M}{p^3} - 6B_3 + 24B_4(p-1) - 60B_5(p-1)^2 + 120B_6(p-1)^3 - 210B_7(p-1)^4 + \dots$$

Vermittelst dieser Reihen erhält man die folgende

**Tafel der Differentialquotienten der Gammafunction.**

$p$	$f'(p)$	$f''(p)$	$f'''(p)$
1.0	-0.2506 8158	+0.714 3858	-1.044 093
1.1	-0.1840 3443	+0.622 4739	-0.808 421
1.2	-0.1255 2843	+0.550 4149	-0.641 903
1.3	-0.0734 7867	+0.492 6000	-0.520 486
1.4	-0.0266 5897	+0.445 3067	-0.429 573
1.5	+0.0158 4739	+0.405 9794	-0.359 942
1.6	+0.0547 4171	+0.372 8122	-0.305 558
1.7	+0.0905 7119	+0.344 4966	-0.262 353
1.8	+0.1237 7020	+0.320 0638	-0.227 512
1.9	+0.1546 8882	+0.298 7825	-0.199 042
2.0	+0.1836 1290	+0.280 0913	-0.175 504

Die Berechnung dieser Zahlenwerte würde übrigens, wenn  $p$  sich der Zahl 2 nähert, sehr beschwerlich sein, weil in diesem Falle die obigen Reihen langsam convergiren. Es genügt indessen, diese Werte von  $p = 1.0$  bis  $p = 1.5$  zu kennen, weil die folgenden sich daraus ableiten lassen. Denn nach der Theorie der Gammafunction bestehen folgende Gleichungen:

$$\Gamma(1+x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{x\pi}{\sin x\pi} \quad \text{und} \quad \Gamma(2+x) = (1+x)\Gamma(1+x)$$

Vertauscht man in der letzteren Formel  $-x$  mit  $x$  und multiplicirt sie mit der ersten, so wird

$$\Gamma(1+x) \cdot \Gamma(2-x) = \frac{(1-x)x\pi}{\sin x\pi}$$

In diese  $1+x = p$  gesetzt, so geht sie über in:

$$\Gamma(3-p) \cdot \Gamma(p) = \frac{(p-1)(2-p)\pi}{\sin(p-1)\pi}$$

Wird diese Gleichung logarithmirt und dann wiederholt differentiirt, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$f'(3-p) = -\frac{M}{p-1} + \frac{M}{2-p} + \pi M \cot(p-1)\pi + f'(p)$$

$$f''(3-p) = -\frac{M}{(p-1)^2} - \frac{M}{(2-p)^2} + \frac{\pi^2 M}{\sin^2(p-1)\pi} - f''(p)$$

$$f'''(3-p) = -\frac{2M}{(p-1)^3} + \frac{2M}{(2-p)^3} + 2\pi^3 M \frac{\cos(p-1)\pi}{\sin^3(p-1)\pi} + f'''(p)$$

Setzt man z. B.  $p = 1.1$ , so wird  $3-p = 1.9$  und  $(p-1)\pi = \text{arc } 18^\circ$ . Dafür finden sich folgende Werte:

$$f'(1.9) = 0.3387 \, 23247 + f'(1.1)$$

$$f''(1.9) = 0.9212 \, 5640 - f''(1.1)$$

$$f'''(1.9) = 0.609 \, 3785 + f'''(1.1)$$

Für  $p = 1.5$  wird auch  $3-p = 1.5$ ;  $(p-1)\pi = \text{arc } 90^\circ$ . Dadurch werden in der ersten und dritten Gleichung die Werte zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens identisch gleich. Die zweite Gleichung gibt dagegen:

$$f''(1.5) = -8M + \pi^2 M - f''(1.5)$$

daher

$$f''(1.5) = \frac{1}{2}M(\pi^2 - 8) = 6B_2 - M \quad (\text{siehe unten}).$$

Setzt man in den 3 Gleichungen  $p = 1$ , so erhält man:

$$f'(2) = M + f'(1) + \infty - \infty$$

$$f''(2) = -M - f''(1) + \infty - \infty$$

$$f'''(2) = 2M + f'''(1) + \infty - \infty$$

Das Aufsuchen der wahren Werte dieser unbestimmten Ausdrücke nach den bekannten Regeln führt zu folgenden Resultaten:

$$\begin{aligned}f'(2) &= M + f'(1) \\f''(2) &= -M - f''(1) + \frac{1}{3}M\pi^2 \\f'''(2) &= 2M + f'''(1)\end{aligned}$$

Diese Werte lassen sich noch vereinfachen, denn die in diesem Paragraph angeführten Reihen für  $f'(p)$ ,  $f''(p)$ ,  $f'''(p)$  gehen, wenn man darin  $p = 1$  setzt, in die folgenden einfachen Ausdrücke über:

$$\begin{aligned}f'(1) &= -M + B_1 \\f''(1) &= M + 2B_2 \\f'''(1) &= -2M - 6B_3\end{aligned}$$

Werden dieselben oben eingesetzt, so erhält man

$$f'(2) = B_1, \quad f''(2) = \frac{1}{3}M\pi^2 - 2(M + B_2), \quad f'''(2) = -6B_3$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{1}{2}\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = S_2 \quad \text{und} \quad MS_2 = M + 2B_2$$

daher

$$\frac{1}{3}M\pi^2 = 2MS_2 = 2M + 4B_2$$

wodurch endlich

$$f''(2) = 2B_2$$

## § 12.

Ein Blick auf die Tafel der numerischen Werte der Differentialquotienten der Gammafunction (§ 11) zeigt, dass der erste derselben anfänglich negativ ist, zwischen  $p = 1.4$  und  $1.5$  durch Null geht, und dann positiv wird. Daher erreicht die Function, weil der zweite Differentialquotient zugleich positiv ist, innerhalb der angeführten Grenzen ein Minimum. Legendre findet, dass dieses statthabe bei dem Werte

$$p = 1.4613 \ 21451$$

und das Minimum selbst

$$\Gamma(p) = 0.88560 \ 31944$$

Wir lassen jetzt die Tafel zur Berechnung der Gammafunction folgen. In derselben sind die Werte dieser Function nur von  $p = 1$  bis  $p = 2$  enthalten, was vollständig genügt um  $\Gamma(p)$  für jedes andere  $p$  leicht abzuleiten.

Die Grössen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sind mittelst der in § 11. mitgetheilten Tabelle für  $f'(p)$ ,  $f''(p)$ ,  $f'''(p)$  berechnet worden (siehe § 2.).

Der Umstand, dass der erste Differentialquotient innerhalb der Grenzen der Tafel sein Zeichen ändert, hat auch eine entsprechende Modification des Interpolationsverfahrens zur Folge, wie dies bei beiden Theilen der Tafel im Kopf und Fuss derselben angegeben ist.

III. Tafel der logarithmischen Werte  
der Gammafunction.

$\log \Gamma(p+y) = \log \Gamma(p) - [1 - (1 - ay)by]cy$				
$p$	$\log \Gamma(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$
1.0	0.000 0000	9.68769	0.15378	9.39912
1.1	9.978 3407	9.63640	0.22819	9.26490
1.2	9.962 9225	9.58966	0.34092	9.09874
1.3	9.953 0203	9.54679	0.52530	8.86616
1.4	9.948 0528	9.50726	0.92179	8.42584
1.461631	9.947 2392	(Minimalwert)		
$\log \Gamma(p-y) = \log \Gamma(p) + [1 + (1 + ay)by]cy$				
$\log \Gamma(p+y) = \log \Gamma(p) + [1 + (1 - ay)by]cy$				
$p$	$\log \Gamma(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$
1.5	9.947 5449	9.47061	1.10752	8.19996
1.6	9.951 1020	9.43648	0.53214	8.73832
1.7	9.958 3912	9.40458	0.27916	8.95699
1.8	9.969 1287	9.37465	0.11159	9.09262
1.9	9.983 0693	9.34647	9.98487	9.18946
2.0	0.000 0000	9.31987	9.88237	9.26390
$\log \Gamma(p-y) = \log \Gamma(p) - [1 - (1 + ay)by]cy$				

Um die Gammafunction für ausserhalb der Tafel liegende Argumente zu berechnen, kann man folgende Formeln benutzen:

Gammafunction für positive Zahlen

$\mu$  bedeutet einen echten Bruch

$m$  irgend eine ganze positive Zahl

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu} \Gamma(1+\mu)$$

$$\Gamma(2+\mu) = (1+\mu) \Gamma(1+\mu)$$

$$\Gamma(3+\mu) = (1+\mu)(2+\mu) \Gamma(1+\mu)$$

$$\Gamma(4+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)(3+\mu) \Gamma(1+\mu)$$

⋮

$$\Gamma(m+\mu) = (1+\mu)(2+\mu) \dots (m-1+\mu) \Gamma(1+\mu)$$

Für  $\mu = 0$  folgt daraus

$$\Gamma(m) = 1.2.3 \dots (m-1)$$

## Gammafunction für negative Zahlen

$$\begin{aligned}
\Gamma(-\mu) &= -\frac{\Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu} \\
\Gamma(-1-\mu) &= +\frac{\Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu(1+\mu)} \\
\Gamma(-2-\mu) &= -\frac{\Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu(1+\mu)(2+\mu)} \\
\Gamma(-3-\mu) &= +\frac{\Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu(1+\mu)(2+\mu)(3+\mu)} \\
&\vdots \\
\Gamma(-m-\mu) &= \frac{(-1)^{m+1} \Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu(1+\mu)\dots(m+\mu)}
\end{aligned}$$

Die Werte von  $\log \Gamma(1+\mu)$  und von  $\log \Gamma(2-\mu)$  werden aus Tafel III. entnommen.

## § 13.

Die Vorschriften des vorigen Paragraphs sollen wieder durch einige Beispiele erläutert werden.

1. Gesucht wird  $\log \Gamma(1.068)$ . Hier setzt man  $p=1$ ,  $y=0.068$

$$\begin{array}{rcl}
\log a & = & 9.68769 \\
+\log y & = & 8.83251 \\
\hline
& & 8.52020 \\
\log(1-ay) & = & 9.98537 \\
+\log b & = & 0.15378 \\
+\log y & = & 8.83251 \\
\hline
& & 8.97166 \\
\log(1-(1-ay)by) & = & 9.95728 \\
+\log c & = & 9.39912 \\
+\log y & = & 8.83251 \\
\hline
\log 0.0154494 & = & 8.18891
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\log \Gamma(1) & = & 0.000\ 0000 \\
& & -\ 0.015\ 4494 \\
\hline
\log \Gamma(1.068) & = & 9.984\ 5506
\end{array}$$

Auf 9 Decimalen genau ist  $\log \Gamma(1.068) = 9.984\ 552\ 985$ , daher das obige Resultat um 24 Einheiten der 7ten Decimale fehlerhaft.

Setzt man nun aber  $p=1.1$ ,  $y=0.032$ , und rechnet nach der im Fuss des ersten Teils der Tafel III. angegebenen Formel, so wird



$$\begin{array}{rcl}
 \log a & = & 9.63640 \\
 + \log y & = & 8.50515 \\
 \hline
 \log ay & = & 8.14155 \\
 \log(1+ay) & = & 0.00598 \\
 + \log b & = & 0.22819 \\
 + \log y & = & 8.50515 \\
 \hline
 & = & 8.73932 \\
 \log(1+(1+ay)by) & = & 0.02320 \\
 + \log c & = & 9.26490 \\
 + \log y & = & 8.50515 \\
 \hline
 \log 0.0062123 & = & 7.79325
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \log \Gamma(1.1) & = & 9.978\ 3407 \\
 + 0.006\ 2123 & & \\
 \hline
 \log \Gamma(1.068) & = & 9.984\ 5530
 \end{array}$$

Da dieses Resultat noch in der siebenten Stelle richtig ist, so wird man stets diejenige der beiden Formeln anwenden, für welche das  $y$  am kleinsten wird.

2. Es soll  $\log \Gamma(1.489)$  bestimmt werden.

Nach der Formel im Kopf vom ersten Teil der Tafel III. ist

$$p = 1.4, \quad y = 0.089$$

„ „ „ „ Fuss vom zweiten Teil der Tafel III. ist

$$p = 1.5, \quad y = 0.011$$

Legt man die letzteren Werte zu Grunde, so findet sich  $\log \Gamma(1.489) = 9.947\ 3952$ , was bis auf 1 Einheit der siebenten Stelle richtig ist.

3.  $\log \Gamma(7.31374)$  soll berechnet werden.

Nach den Formeln des § 11. ist zu setzen  $m = 7, \mu = 0.31374$ ,

$$\Gamma(m+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)(3+\mu)(4+\mu)(5+\mu)(6+\mu) \cdot \Gamma(1+\mu)$$

$$1+\mu = 1.31374 = p+y, \text{ daher } p = 1.3 \text{ und } y = 0.01374$$

$$\begin{array}{rcl}
 \log \Gamma(1+\mu) & = & 9.952\ 0570 \\
 \log(1+\mu) & = & 0.118\ 5094 \\
 \log(2+\mu) & = & 0.364\ 3145 \\
 \log(3+\mu) & = & 0.520\ 3184 \\
 \log(4+\mu) & = & 0.634\ 8539 \\
 \log(5+\mu) & = & 0.725\ 4003 \\
 \log(6+\mu) & = & 0.800\ 2867 \\
 \hline
 \log \Gamma(7.31374) & = & 3.115\ 7402
 \end{array}$$

## § 14.

Was nun die umgekehrte Aufgabe betrifft, zu einem gegebenen  $\Gamma(x)$  das zugehörige  $x$  zu bestimmen, so hat man zunächst zu untersuchen, ob es hier nur eine oder mehrere Lösungen gibt. Liegt  $\Gamma(x)$  zwischen den Grenzen 0.8856 und 1.0 oder  $\log \Gamma(x)$  zwischen 9.947...—10 und 0.0, so zeigt ein Blick auf Tafel III., dass es 2 Werte von  $x$  gibt, welche sich auch (siehe § 5.) leicht bestimmen lassen.

Um auch in anderen Fällen darüber in's Klare zu kommen, stellen wir uns die Aufgabe, die Curve zu construiren, deren Gleichung ist:  $y = \Gamma(x)$ .

Nach den Formeln des § 11. findet man leicht folgende Werte:

$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
0.0	$\infty$	2	1.0	6	120
0.5	1.7724	3	2.0	7	720
1.0	1.0	4	6.0	8	5040
1.4616	0.8856	5	24.0	9	40320

Die Curve (s. Fig.) erstreckt sich auf der positiven Seite der Ordinatenaxe mit 2 Aesten  $NCB$ ,  $NDF$  in's Unendliche; für den ersten derselben ist diese Axe eine Asymptote. Der Abscisse  $AM = 1.46...$  entspricht die Ordinate  $MN = 0.88...$ , welche den kürzesten Abstand der Curve von der Abscissenaxe angibt. Für negative Werte von  $x$  sind die  $y$  theils negativ und theils positiv und zwar von 0 bis  $-1$  stets negativ; von  $-1$  bis  $-2$  immer positiv u. s. f. Für jede ganzzahlige negative Abscisse ist  $y = \infty$  d. h. die Curve besteht auf der negativen Seite der Ordinatenaxe aus einer unbegrenzten Zahl von Zweigen, welche durch Asymptoten getrennt sind, die in den Abständen  $-1, -2, -3, \dots$  der  $Y$ -Axe parallel laufen. Die Scheitel  $N', N'', N''', \dots$  dieser aufeinanderfolgenden Zweige nähern sich fortwährend der Abscissenaxe, denn es ist

$$M'N' = -3.54..., \quad M''N'' = 2.31..., \quad M'''N''' = -0.89..., \\ M^{IV}N^{IV} = 0.24..., \quad M^VN^V = -0.05.$$

Hieraus ersieht man, dass jedem positiven  $y$ , welches  $> 0.8856$  zwei positive Werte des  $x$  entsprechen, wovon der kleinere zwischen 0 und 1.46..., der andere zwischen 1.46... und  $\infty$  liegt. Ausserdem gibt es dafür noch eine unbegrenzte Zahl negativer Werte. Negativen Werten des  $y$  entsprechen dagegen nur negative Abscissen, ebenfalls in unbegrenzter Zahl.

Wir beschränken uns hier darauf, zu einem gegebenen  $\Gamma(x)$  die beiden positiven  $x$  zu bestimmen. Hier sind vor allem genäherte Werte zu suchen und dieselben dann noch zu verbessern. Da indes die Ermittlung derselben sehr zeitraubende Versuchsrechnungen erfordern würde, so teilen wir hier eine abgekürzte Tafel mit, die sehr rasch zum Ziele führt.

**IV. Tafel zum Aufsuchen der Näherungswerte des  $x$ , wenn  $\log \Gamma(x)$  gegeben ist.**

$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$
0.0000	8		0.01	2.00		1.0	0.000	22	3.5	0.522	48	6.0	2.079	75	8.5	4.147	91			
0.0001	4.00	30	0.02	1.69	31	1.1	9.978	15	3.6	0.570	50	6.1	2.154	75	8.6	4.238	91			
0.0002	3.70	18	0.03	1.52	17	1.2	9.963	10	3.7	0.620	52	6.2	2.229	76	8.7	4.329	92			
0.0003	3.52	12	0.04	1.39	13	1.3	9.953	5	3.8	0.672	54	6.3	2.305	77	8.8	4.420	92			
0.0004	3.40	10	0.05	1.29	8	1.4	9.948	0	3.9	0.724	56	6.4	2.382	77	8.9	4.513	93			
0.0005	3.30	8	0.06	1.21	7	1.5	9.948	8	4.0	0.778	58	6.5	2.459	78	9.0	4.606	93			
0.0006	3.22	6	0.07	1.14	6	1.6	9.951	3	4.1	0.833	60	6.6	2.537	79	9.1	4.699	93			
0.0007	3.16	6	0.08	1.08	5	1.7	9.958	7	4.2	0.890	62	6.7	2.616	80	9.2	4.792	95			
0.0008	3.10	5	0.09	1.03	5	1.8	9.969	11	4.3	0.947	64	6.8	2.696	80	9.3	4.887	94			
0.0009	3.05	5	0.10	0.98	5	1.9	9.983	14	4.4	1.006	66	6.9	2.776	81	9.4	4.981	96			
0.0010	3.00					2.0	0.000	20	4.5	1.066	68	7.0	2.857	82	9.5	5.077	95			
						2.1	0.020	22	4.6	1.126	70	7.1	2.939	82	9.6	5.172	96			
						2.2	0.042	25	4.7	1.188	72	7.2	3.021	83	9.7	5.268	97			
						2.3	0.067	27	4.8	1.251	74	7.3	3.104	84	9.8	5.365	97			
						2.4	0.094	30	4.9	1.315	76	7.4	3.188	84	9.9	5.462	98			
						2.5	0.124	31	5.0	1.380	78	7.5	3.272	85	10	5.560				
0.001	3.00	30	0.1	0.98	32	2.6	0.155	34	5.1	1.446	80	7.6	3.357	85						
0.002	2.70	18	0.2	0.66	18	2.7	0.189	35	5.2	1.513	82	7.7	3.442	87	20	17.085				
0.003	2.52	12	0.3	0.48	12	2.8	0.224	38	5.3	1.581	84	7.8	3.529	87	30	30.947				
0.004	2.40	10	0.4	0.35	10	2.9	0.262	39	5.4	1.649	86	7.9	3.615	87	40	46.310				
0.005	2.30	8	0.5	0.25	8	3.0	0.301	41	5.5	1.719	88	8.0	3.702	88	50	62.784				
0.006	2.22	7	0.6	0.17	7	3.1	0.342	43	5.6	1.789	90	8.1	3.790	89	60	80.142				
0.007	2.15	6	0.7	0.11	6	3.2	0.385	44	5.7	1.861	92	8.2	3.879	89	70	98.233				
0.008	2.09	5	0.8	0.07	4	3.3	0.429	45	5.8	1.933	94	8.3	3.968	89	80	116.952				
0.009	2.04	4	0.9	0.03	3	3.4	0.474	48	5.9	2.005	96	8.4	4.057	90	90	136.218				
0.010	2.00		1.0	0.00		3.5	0.522		6.0	2.079		8.5	4.147		100	155.970				
$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$	$x$	$\log \Gamma(x)$	$\Delta$

Sei z. B.  $\log \Gamma(x) = 3.115\,9572$ , so liefert uns diese Tafel, indem man auf die gewöhnliche Weise interpolirt, für  $x$  die beiden Näherungswerte: 0.00077 und 7.314.

Den ersten können wir leicht genauer erhalten. Denn bezeichnet man die successiven Näherungswerte durch  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , ..., so gibt uns die Gleichung  $\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu} \Gamma(1+\mu)$  den Wert  $\mu = \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(\mu)}$ . Im Zähler setzen wir  $x'$  an die Stelle von  $\mu$ , während der Nenner das gegebene

$\Gamma(x)$  ist, daher  $x'' = \frac{\Gamma(1+x')}{\Gamma(x)}$ , und ebenso  $x''' = \frac{\Gamma(1+x'')}{\Gamma(x)}$ ; der letztere Wert wird meist schon genau sein, so dass wir ihn  $= x$  setzen können.

Nehmen wir danach  $x' = 0.00077$ , so gibt Tafel III.

$$\log \Gamma(1.00077) = 9.9998072$$

daher  $x'' = 0.000765715$ . Die fernere Rechnung liefert  $x = 0.000765717$ , welcher Wert, wie man sieht, von  $x''$  nicht wesentlich verschieden ist. Wie der andere Wert von  $x$  genauer gefunden werden kann, soll im folgenden Paragraphen gezeigt werden.

### § 15.

Die Gleichung  $\Gamma(m+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)\dots(m-1+\mu)\Gamma(1+\mu) = \Gamma(x)$  gäbe, wenn der Wert von  $x = 7.314$  genau wäre,  $m = 7$  und  $\mu = 0.314$ . Die ganze Zahl  $m$  ist hier richtig bestimmt, das  $\mu$  dagegen bedarf noch einer Correction, welche durch  $\Delta\mu$  bezeichnet werden soll, so dass dann also  $x = m + \mu + \Delta\mu$ .

Nimmt man von obiger Gleichung die Logarithmen und beachtet, dass

$$\log \Gamma(1+\mu) = -\log(1+\mu) + B_1\mu + B_2\mu^2 - B_3\mu^3 + B_4\mu^4 - \dots$$

so erhält man

$$\log \Gamma(m+\mu) = \log(2+\mu) + \log(3+\mu) + \dots + \log(m-1+\mu) + B_1\mu + B_2\mu^2 - B_3\mu^3 + B_4\mu^4 - \dots$$

$$\frac{d \log \Gamma(m+\mu)}{d\mu} = \frac{M}{2+\mu} + \frac{M}{3+\mu} + \dots + \frac{M}{m-1+\mu} + B_1 + 2B_2\mu - 3B_3\mu^2 + 4B_4\mu^3 - 5B_5\mu^4$$

Da in unserem Falle  $\mu$  nur näherungsweise bekannt ist, so setzt man jetzt

$$d \log \Gamma(m+\mu) = \log \Gamma(x) - \log \Gamma(m+\mu)$$

und schreibt  $\Delta\mu$  statt  $d\mu$

$$\Delta\mu = \frac{\log \Gamma(x) - \log \Gamma(m+\mu)}{\frac{M}{2+\mu} + \frac{M}{3+\mu} + \dots + \frac{M}{m-1+\mu} + B_1 + 2B_2\mu - 3B_3\mu^2 + 4B_4\mu^3 - 5B_5\mu^4 + \dots}$$

Die Reihe im Nenner schreiben wir in folgender Weise

$$B_1 + 3B_2\mu \left( \frac{2B_2}{3B_3} - \mu \right) + 5B_3\mu^3 \left( \frac{4B_4}{5B_5} - \mu \right) + 7B_4\mu^5 \left( \frac{6B_6}{7B_7} - \mu \right) + \dots$$

und setzen zur Abkürzung

$$\alpha_1 = 3B_3, \quad \alpha_3 = 5B_5, \quad \alpha_5 = 7B_7$$

$$\beta = B_1, \quad \beta_1 = \frac{2B_3}{3B_3}, \quad \beta_3 = \frac{4B_4}{5B_5}, \quad \beta_5 = \frac{6B_6}{7B_7}$$

Die Lösung der Aufgabe ist daher durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\Gamma(m+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)\dots(m-1+\mu)\Gamma(1+\mu)$$

$$\Delta\mu = \frac{\log \Gamma(x) - \log \Gamma(m+\mu)}{\frac{M}{2+\mu} + \frac{M}{3+\mu} + \dots + \frac{M}{m-1+\mu} + \beta + \alpha_1\mu(\beta_1-\mu) + \alpha_3\mu^3(\beta_3-\mu) + \alpha_5\mu^5(\beta_5-\mu) + \dots}$$

Dabei ist

$\log M = 9.637784$	$\beta = 0.183613$
$\log \alpha_1 = 8.94326$	$\beta_1 = 3.19184$
$\log \alpha_3 = 8.20514$	$\beta_3 = 2.22931$
$\log \alpha_5 = 7.55943$	$\beta_5 = 2.07719$
$\log \alpha_7 = 6.94063$	$\beta_7 = 2.03016$
$\log \alpha_9 = 6.33168$	$\beta_9 = 2.01254$
$\log \alpha_{11} = 5.72668$	$\beta_{11} = 2.00538$

$$x = m + \mu + \Delta\mu$$

In unserem Beispiel ist  $m = 7$ ,  $\mu = 0.314$ ,  $\log \Gamma(m+\mu) = 3.1159572$ ,  
 $\log \Gamma(x) - \log \Gamma(m+\mu) = -0.0002170$

$M:(2+\mu) = 0.187681$	$\beta = 0.183613$
$M:(3+\mu) = 0.131048$	$\alpha_1\mu(\beta_1-\mu) = 0.079298$
$M:(4+\mu) = 0.100671$	$\alpha_3\mu^3(\beta_3-\mu) = 0.000951$
$M:(5+\mu) = 0.081726$	$\alpha_5\mu^5(\beta_5-\mu) = 0.000020$
$M:(6+\mu) = 0.068782$	$\alpha_7\mu^7(\beta_7-\mu) = 0.000000$
<hr/>	<hr/>
0.569908	0.263882

$$\Delta\mu = -\frac{0.000217}{0.833790} = -0.00026026$$

$$\mu + \Delta\mu = 0.31373974$$

$$x = 7.3137397$$

Hier hätte man  $x = 7.3137400$  finden sollen (siehe Beispiel 3. § 12.). Der Fehler 0.0000003 ist so klein, dass er nicht in Betracht kommt. Wenn in einem solchen Falle der echte Bruch  $\mu$  nur wenig kleiner ist, als 1, so convergirt die Reihe  $\alpha_1\mu(\beta_1-\mu) + \alpha_3\mu^3(\beta_3-\mu) + \dots$  sehr langsam, und müssten deshalb viele Glieder derselben berechnet werden. Man kann sich diese Rechnung erleichtern, indem man für

$m$  einen um 1 grösseren Wert nimmt und für  $\mu$  seine Ergänzung zu 1 setzt;  $m-\mu$  ist jetzt dieselbe Zahl, die vorher durch  $m+\mu$  bezeichnet wurde, also ist in den vorigen Formeln  $\mu$  mit  $-\mu$  zu vertauschen. Die erste Gleichung wird daher

$$\Gamma(m-\mu) = (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu) \dots (m-1-\mu)\Gamma(1-\mu)$$

$\Gamma(1-\mu)$  lässt sich nicht direct aus Tafel III. berechnen, daher setzen wir in der Formel

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu} \Gamma(1+\mu) \text{ (siehe § 11.)}$$

$(1-\mu)$  an die Stelle von  $\mu$  und erhalten

$$\Gamma(1-\mu) = \frac{1}{1-\mu} \Gamma(2-\mu)$$

dies oben eingesetzt gibt:

$$\Gamma(m-\mu) = (2-\mu)(3-\mu) \dots (m-1-\mu) \Gamma(2-\mu)$$

Die anderen Formeln gehen über in:

$$\Delta\mu = \frac{\log \Gamma(m-\mu) - \log \Gamma(x)}{\frac{M}{2-\mu} + \frac{M}{3-\mu} + \dots + \frac{M}{m-1-\mu} + \beta - \alpha_1\mu(\beta_1+\mu) - \alpha_3\mu^3(\beta_3+\mu) - \alpha_5\mu^5(\beta_5+\mu) - \dots}$$

$$x = m - (\mu + \Delta\mu)$$

Beispiel.  $\log \Gamma(x) = 0.7069847$ . Die Tafel IV. gibt uns den Näherungswert für  $x$  zu 3.867. Anstatt also jetzt  $m=3$  und  $\mu=0.867$  zu nehmen, machen wir  $m=4$  und  $\mu=0.133$ , so dass also  $m-\mu=3.867$ . Es findet sich danach  $\Gamma(m-\mu)=1.867.2867 \Gamma(1.867)$ ;  $\log \Gamma(m-\mu)=0.7067004$ ;  $\log \Gamma(m-\mu) - \log \Gamma(x) = -0.0002843$

$M:(2-\mu) = 0.23262$	$\alpha_1\mu(\beta_1+\mu) = 0.03880$
$M:(3-\mu) = 0.15148$	$\alpha_3\mu^3(\beta_3+\mu) = 0.00009$
$\beta = 0.18361$	$\alpha_5\mu^5(\beta_5+\mu) = 0.00000$
	0.03889

$$\Delta\mu = -\frac{0.0002843}{0.52882} = -0.0005376, \quad x = 3.8675376.$$

Zur Erzielung gleicher Genauigkeit hätte man bei Anwendung der früheren Formeln mindestens die doppelte Anzahl der Glieder jener Reihe berechnen müssen.



$\log x = A, \quad \log(1-x) = B$											
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.00	9.99	564	568	561	560	559	558	557	556	555	554
01		553	552	551	550	549	548	547	546	545	544
02		543	542	541	540	539	538	536	535	534	533
03		532	531	530	529	528	527	526	524	523	522
04		521	520	519	518	517	516	514	513	512	511
8.05		510	509	508	507	505	504	503	502	501	500
06		498	497	496	495	494	493	491	490	489	488
07		487	486	484	483	482	481	480	478	477	476
08		475	473	472	471	470	469	467	466	465	464
09		462	461	460	459	457	456	455	454	452	451
8.10	9.99	450	449	447	446	445	443	442	441	439	438
11		437	436	434	433	432	430	429	428	426	425
12		424	422	421	420	418	417	416	414	413	412
13		410	409	407	406	405	403	402	401	399	398
14		396	395	394	392	391	389	388	386	385	384
8.15		382	381	379	378	376	375	374	372	371	369
16		368	366	365	363	362	360	359	357	356	354
17		353	351	350	348	347	345	344	342	341	339
18		338	336	335	333	331	330	328	327	325	324
19		322	321	319	317	316	314	313	311	309	308
8.20	9.99	306	305	303	301	300	298	296	295	293	292
21		290	288	287	285	283	282	280	278	277	275
22		273	272	270	268	266	265	263	261	260	258
23		256	254	253	251	249	247	246	244	242	240
24		239	237	235	233	232	230	228	226	224	223
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.25	9.99	221	219	217	215	213	212	210	208	206	204
26		202	201	199	197	195	193	191	189	187	186
27		184	182	180	178	176	174	172	170	168	166
28		164	163	161	159	157	155	153	151	149	147
29		145	143	141	139	137	135	133	131	129	127
8.30	9.99	125	123	121	119	117	114	112	110	108	106
31		104	102	100	098	096	094	093	089	087	085
32		083	081	079	077	074	072	070	068	066	064
33		061	059	057	055	053	050	048	046	044	042
34		039	037	035	033	030	028	026	024	021	019
8.35		017	014	012	010	007	005	003	001	*998	*996
36	9.98	994	991	989	986	984	982	979	977	975	972
37		970	967	965	963	960	958	955	953	950	948
38		946	943	941	938	936	933	931	928	926	923
39		921	918	916	913	911	908	905	903	900	898
8.40	9.98	895	893	890	887	885	882	880	877	875	872
41		869	866	864	861	858	856	853	850	848	845
42		842	840	837	834	832	829	826	823	821	818
43		815	812	810	807	804	801	798	796	793	790
44		787	784	781	779	776	773	770	767	764	761
8.45		758	756	753	750	747	744	741	738	735	732
46		729	726	723	720	717	714	711	708	705	702
47		699	696	693	690	687	684	681	678	674	671
48		668	665	662	659	656	653	649	646	643	640
49		637	634	630	627	624	621	617	614	611	608
8.50	9.98	604									
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log x = B, \quad \log(1-x) = A$											

| 1

10.1

20.2

30.3

40.4

50.5

60.6

70.7

80.8

90.9

| 2

10.2

20.4

30.6

40.8

51.0

61.2

71.4

81.6

91.8

| 3

10.3

20.6

30.9

41.2

51.5

61.8

72.1

82.4

92.7

| 4

10.4

20.8

31.2

41.6

52.0

62.4

72.8

83.2

93.6



$\log x = A, \quad \log(1-x) = B$											
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.50	9.98	604	601	598	595	591	588	585	581	578	575
51		571	568	565	561	558	554	551	548	544	541
52		538	534	531	527	524	520	517	513	510	506
53		503	499	496	492	489	485	482	478	475	471
54		467	464	460	457	453	449	446	442	438	435
8.55		431	427	424	420	416	413	409	405	401	398
56		394	390	386	382	379	375	371	367	363	360
57		356	352	348	344	340	336	332	328	325	321
58		317	313	309	305	301	297	293	289	285	281
59		277	273	269	264	260	256	252	248	244	240
8.60	9.98	236	232	227	223	219	215	211	206	202	198
61		194	189	185	181	177	172	168	164	159	155
62		151	146	142	138	133	129	124	120	116	111
63		107	102	098	093	089	084	080	075	071	066
64		062	057	052	048	043	039	034	029	025	020
8.65		015	011	006	001	*997	*992	*987	*982	*978	*973
66	9.97	968	963	958	954	949	944	939	934	929	925
67		920	915	910	905	900	895	890	885	880	875
68		870	865	860	855	85	845	840	834	829	824
69		819	814	809	804	798	793	788	783	777	772
8.70	9.97	767	762	756	751	746	740	735	730	724	719
71		714	708	703	697	692	686	681	675	670	664
72		659	653	648	642	637	631	625	620	614	608
73		603	597	591	586	580	574	568	563	557	551
74		545	539	534	528	522	516	510	504	498	592
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.75	9.97	486	480	474	468	462	456	450	444	438	432
76		426	420	414	408	402	395	389	383	377	371
77		364	358	352	345	339	333	326	320	314	307
78		301	295	288	282	275	269	262	256	249	243
79		236	229	223	216	210	203	196	190	183	176
8.80		170	163	159	149	142	136	129	122	115	108
81		101	094	088	081	074	067	060	053	046	039
82		031	024	017	010	003	*996	*989	*982	*974	*967
83	9.96	960	953	945	938	931	923	916	909	901	894
84		886	879	872	864	857	849	841	834	826	819
8.85		811	804	796	788	781	773	765	757	750	742
86		734	726	718	711	703	695	687	679	671	663
87		655	647	639	631	623	615	607	598	590	582
88		574	566	557	549	541	533	524	516	508	499
89		491	482	474	465	457	448	440	431	423	414
8.90	9.96	406	397	388	380	371	362	353	345	336	327
91		318	309	300	292	283	274	265	256	247	238
92		229	219	210	201	192	183	174	165	155	146
93		137	127	118	109	099	090	080	071	062	052
94		042	033	023	014	004	*994	*985	*975	*965	*956
8.95	9.95	946	936	926	916	907	897	887	877	867	857
96		847	837	827	817	806	796	786	776	766	755
97		745	735	725	714	704	693	683	672	662	651
98		641	630	620	609	598	588	577	566	556	545
99		534	523	512	501	490	479	468	457	446	435
9.00		424									
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log x = B, \quad \log(1-x) = A$											

| 3 | 4

10.30.4  
20.60.8  
30.91.2  
41.21.6  
51.52.0  
61.82.4  
72.12.8  
82.43.2  
92.73.6

| 5 | 6

10.50.6  
21.01.2  
31.51.8  
42.02.4  
52.53.0  
63.03.6  
73.54.2  
84.04.8  
94.55.4

| 6 | 7 | 8

10.60.70.8  
21.21.41.6  
31.82.12.4  
42.42.83.2  
53.03.54.0  
63.64.24.8  
74.24.95.6  
84.85.66.4  
95.46.37.2

| 9 | 10 | 11

10.91.01.1  
21.82.02.2  
32.73.03.3  
43.64.04.4  
54.55.05.5  
65.46.06.6  
76.37.07.7  
87.28.08.8  
98.19.09.9

log x = A, log (1 - x) = B											P. P.							
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	
9.00	9.95	424	413	402	391	380	368	357	346	334	323	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
01		312	300	289	277	266	254	243	231	220	208	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
02		196	185	173	161	149	137	126	114	102	090	3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
03		078	066	054	042	030	017	005	*993	*981	*968	4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4
04	9.94	956	944	931	919	907	894	882	869	857	844	5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
9.05		831	819	806	793	781	768	755	742	729	716	6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6
06		703	690	677	664	651	638	625	612	599	585	7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2
07		572	559	545	532	518	505	491	478	464	451	8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8
08		437	423	410	396	382	368	354	341	327	313	9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4
09		299	285	270	256	242	228	214	200	185	171		17	18	19	20	21	22
9.10		156	142	128	113	099	084	069	055	040	025	1	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
11		011	*996	*981	*966	*951	*936	*921	*906	*891	*876	2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4
12	9.93	861	845	830	815	800	784	769	753	738	722	3	5.1	5.4	5.7	6.0	6.3	6.6
13		707	691	676	660	644	628	613	597	581	565	4	6.8	7.2	7.6	8.0	8.4	8.8
14		549	533	517	501	484	468	452	436	419	403	5	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0
9.15		386	370	353	337	320	304	287	270	253	237	6	10.2	10.8	11.4	12.0	12.6	13.2
16		220	203	186	169	152	135	118	100	083	066	7	11.9	12.6	13.3	14.0	14.7	15.4
17		049	031	014	*996	*979	*961	*944	*926	*908	*890	8	13.6	14.4	15.2	16.0	16.8	17.6
18	9.92	873	855	837	819	801	783	765	747	728	710	9	15.3	16.2	17.1	18.0	18.9	19.8
19		692	673	655	637	618	599	581	562	544	525		23	24	25	26	27	28
9.20		506	487	468	449	430	411	392	373	354	334	1	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
21		315	296	276	257	237	218	198	178	158	139	2	4.0	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6
22		119	099	079	059	039	019	*998	*978	*958	*937	3	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4
23	9.91	917	897	876	855	835	814	793	772	752	731	4	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2
24		710	689	667	646	624	604	582	561	539	518	5	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0
9.25	9.91	496	475	453	431	409	387	365	343	321	299	6	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8
26		277	255	232	210	187	165	142	120	097	074	7	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6
27		051	028	005	*982	*959	*936	*913	*890	*866	*843	8	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4
28	9.90	819	796	772	748	725	701	677	653	629	605	9	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2
29		580	556	532	507	483	458	434	409	384	360		29	30	31	32	33	34
9.30		335	310	285	260	234	209	184	158	133	107	1	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
31		082	056	030	005	*979	*953	*927	*900	*874	*848	2	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8
32	9.89	822	795	769	742	715	688	662	635	608	581	3	8.7	9.0	9.3	9.6	9.9	10.2
33		554	526	499	472	444	417	389	361	333	306	4	11.6	12.0	12.4	12.8	13.2	13.6
34		278	250	221	193	165	136	108	079	051	022	5	14.5	15.0	15.5	16.0	16.6	17.0
9.35	9.88	993	964	935	906	877	848	819	789	760	730	6	17.4	18.0	18.6	19.2	19.8	20.4
36		701	671	641	611	581	551	521	490	460	429	7	20.3	21.0	21.7	22.4	23.1	23.8
37		399	368	337	307	276	245	214	182	151	120	8	23.2	24.0	24.8	25.6	26.4	27.2
38		088	056	025	*993	*961	*927	*897	*865	*832	*800	9	26.1	27.0	27.9	28.8	29.7	30.6
39	9.87	768	735	702	670	637	604	571	537	504	471		35	36	37	38	39	40
9.40		437	404	370	336	302	268	234	200	166	131	1	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
41		097	062	027	*992	*957	*922	*887	*852	*816	*781	2	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0
42	9.86	745	709	674	638	602	565	529	493	456	419	3	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.0
43		383	346	309	272	234	197	160	122	084	046	4	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.0
44		088	*970	*932	*894	*855	*817	*778	*739	*700	*661	5	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.0
9.45	9.85	622	583	543	504	464	424	384	344	304	264	6	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.0
46		223	183	142	101	060	019	*978	*936	*895	*853	7	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.0
47	9.84	811	770	727	685	643	600	558	515	472	429	8	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.0
48		386	343	299	255	212	168	124	079	035	*991	9	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.0
49	9.83	946	901	856	811	766	720	675	629	583	537							
9.50		491																
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.						
log x = B, log (1 - x) = A											P. P.							

log x = A,      log(1-x) = B											
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.50	9.88	491	445	398	352	305	258	211	164	116	069
51		021	*973	*925	*877	*828	*780	*731	*682	*633	*584
52	9.82	584	485	435	385	335	284	234	183	133	082
53		080	*979	*928	*876	*824	*772	*720	*667	*615	*562
54	9.81	501	456	402	349	295	241	187	133	078	023
9.55	9.80	969	913	858	808	747	691	635	579	522	466
56		409	352	294	237	179	121	063	004	*946	*887
57	9.79	828	769	709	650	590	530	469	409	348	287
58		226	164	103	041	*979	*916	*854	*791	*728	*664
59	9.78	601	537	473	409	344	279	214	149	084	018
9.60	9.77	952	886	819	752	685	618	550	483	415	346
61		278	209	140	070	000	*981	*860	*790	*719	*648
62	9.76	577	505	433	361	288	216	143	069	*996	*922
63	9.75	847	773	698	623	547	472	396	319	242	165
64		088	011	*933	*854	*776	*697	*618	*538	*458	*378
9.65	9.74	297	216	135	054	*972	*899	*807	*724	*641	*557
66	9.73	473	389	304	219	133	047	*961	*875	*783	*700
67	9.72	613	425	436	347	258	169	079	*988	*897	*806
68	9.71	715	623	530	437	344	250	156	062	*967	*872
69	9.70	776	680	583	486	388	290	192	093	*994	*894
9.70	9.69	794	693	592	490	390	286	182	079		
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log x = B,      log(1-x) = A											

P. P.				
	46	47	48	49
1	4.6	4.7	4.8	4.9
2	9.2	9.4	9.6	9.8
3	13.8	14.1	14.4	14.7
4	18.4	18.8	19.2	19.6
5	23.0	23.5	24.0	24.5
6	27.6	28.2	28.8	29.4
7	32.2	32.9	33.6	34.3
8	36.8	37.6	38.4	39.2
9	41.4	42.3	43.2	44.1
	50	51	52	53
1	5.0	5.1	5.2	5.3
2	10.0	10.2	10.4	10.6
3	15.0	15.3	15.6	15.9
4	20.0	20.4	20.8	21.2
5	25.0	25.5	26.0	26.5
6	30.0	30.6	31.2	31.8
7	35.0	35.7	36.4	37.1
8	40.0	40.8	41.6	42.4
9	45.0	45.9	46.8	47.7

Z. vor. Seite.		Partes proporcionales																	
41	42	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69		
1	4.1	4.2	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	
2	8.2	8.4	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.0	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6	13.8	
3	12.8	12.6	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7	18.0	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	
4	16.4	16.8	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2	23.6	24.0	24.4	24.8	25.2	25.6	26.0	26.4	26.8	27.2	27.6	
5	20.5	21.0	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0	29.5	30.0	30.5	31.0	31.5	32.0	32.5	33.0	33.5	34.0	34.5	
6	24.6	25.2	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8	35.4	36.0	36.6	37.2	37.8	38.4	39.0	39.6	40.2	40.8	41.4	
7	28.7	29.4	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.3	42.0	42.7	43.4	44.1	44.8	45.5	46.2	46.9	47.6	48.3	
8	32.8	33.6	43.2	44.0	44.8	45.6	46.4	47.2	48.0	48.8	49.6	50.4	51.2	52.0	52.8	53.6	54.4	55.2	
9	36.9	37.8	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2	53.1	54.0	54.9	55.8	56.7	57.6	58.5	59.4	60.3	61.2	62.1	
43	44	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85		
1	4.3	4.4	7.0	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	
2	8.6	8.8	14.0	14.2	14.4	14.6	14.8	15.0	15.2	15.4	15.6	15.8	16.0	16.2	16.4	16.6	16.8	17.0	
3	12.9	13.2	24.0	21.8	21.6	21.9	22.2	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.0	24.3	24.6	24.9	25.2	25.5	
4	17.2	17.6	28.0	28.4	28.8	29.2	29.6	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.0	32.4	32.8	33.2	33.6	34.0	
5	21.5	22.0	35.0	35.5	36.0	36.5	37.0	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.0	40.5	41.0	41.5	42.0	42.5	
6	25.8	26.4	42.0	42.6	43.2	43.8	44.4	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.0	48.6	49.2	49.8	50.4	51.0	
7	30.1	30.8	49.0	49.7	50.4	51.1	51.8	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.0	56.7	57.4	58.1	58.8	59.5	
8	34.4	35.2	56.0	56.8	57.6	58.4	59.2	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.0	64.8	65.6	66.4	67.2	68.0	
9	38.7	39.6	63.0	63.9	64.8	65.7	66.6	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.0	72.9	73.8	74.7	75.6	76.5	
45	46	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101		
1	4.5	4.6	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0	10.1	
2	9.0	9.2	17.2	17.4	17.6	17.8	18.0	18.2	18.4	18.6	18.8	19.0	19.2	19.4	19.6	19.8	20.0	20.2	
3	13.5	13.8	25.8	26.1	26.4	26.7	27.0	27.3	27.6	27.9	28.2	28.5	28.8	29.1	29.4	29.7	30.0	30.3	
4	18.0	18.4	34.4	34.8	35.2	35.6	36.0	36.4	36.8	37.2	37.6	38.0	38.4	38.8	39.2	39.6	40.0	40.4	
5	22.5	23.0	43.0	43.5	44.0	44.5	45.0	45.5	46.0	46.5	47.0	47.5	48.0	48.5	49.0	49.5	50.0	50.5	
6	27.0	27.6	51.6	52.2	52.8	53.4	54.0	54.6	55.2	55.8	56.4	57.0	57.6	58.2	58.8	59.4	60.0	60.6	
7	31.5	32.2	60.2	60.9	61.6	62.3	63.0	63.7	64.4	65.1	65.8	66.5	67.2	67.9	68.6	69.3	70.0	70.7	
8	36.0	36.8	68.4	69.6	70.4	71.2	72.0	72.8	73.6	74.4	75.2	76.0	76.8	77.6	78.4	79.2	80.0	80.8	
9	40.5	41.4	77.8	78.3	79.2	80.1	81.0	81.9	82.8	83.7	84.6	85.5	86.4	87.3	88.2	89.1	90.0	90.9	

## XVI.

## Miscellen.

## 1.

## Note über conjugirte Tangenten.

Der Zweck nachfolgender Note ist zu beweisen:

a) dass die Summe der Krümmungsradien zweier conjugirten Normalschnitte einer Fläche constant ist, und

b) dass je zwei conjugirte Tangenten einer Fläche die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser der betreffenden Punktlinie besitzen.

Mit Zugrundelegung jener Bezeichnungen, welche Hoppe in seinen „Principien der Flächentheorie“ eingeführt hat, muss, wenn  $k = \frac{\partial v}{\partial u}$  das Richtungsverhältniss und  $\varrho$  den Krümmungsradius eines beliebigen Normalschnittes bedeuten, sein

$$\varrho = \frac{e + 2fk + gk^2}{E + 2Fk + Gk^2}.$$

Beziehen sich  $k'$  und  $\varrho'$  in derselben Weise auf jenen Normalschnitt, dessen Tangente zur Tangente des früheren conjugirt ist, so findet bekanntlich die Gleichung statt

$$E + F(k + k') + Gkk' = 0.$$

Da nun

$$\varrho + \varrho' = \frac{e + 2fk + gk^2}{E + 2Fk + Gk^2} + \frac{e + 2fk' + gk'^2}{E + 2Fk' + Gk'^2}$$

und weil ferner, wie leicht zu erweisen,

und

$$E + 2Fk + Gk^2 = (F + Gk)(k - k')$$

$$E + 2Fk' + Gk'^2 = (F + Gk')(k' - k),$$

so muss sein

$$e + e' = \frac{1}{k - k'} \left( \frac{e + 2fk + gk^2}{F + Gk} - \frac{e + 2fk' + gk'^2}{F + Gk'} \right)$$

$$= \frac{2fF - eG + g[F(k + k') + Gkk']}{F^2 + G[F(k + k') + Gkk']}.$$

Nach Substitution des Wertes

kommt

$$F(k + k') + Gkk' = -E$$

$$e + e' = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Bezeichnen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die Hauptkrümmungsradien, so gelten bekanntlich die Gleichungen

und

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2}$$

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{EG - F^2}{t^2}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir

$$e + e' = \varrho_1 + \varrho_2,$$

d. h. die Summe der Krümmungsradien zweier conjugirten Normalschnitte ist gleich der Summe der entsprechenden Hauptkrümmungsradien, also für einen Punkt der Fläche constant. — Der unter b) angeführte Satz ist eine einfache Folge des eben bewiesenen Satzes. Unter Punktklinie verstehen wir nämlich die Dupin'sche „Indicatrice“, deren Gleichung lautet:

$$\frac{\xi^2}{\varrho_1} + \frac{\eta^2}{\varrho_2} = \delta,$$

wo

$$\delta = E\partial u^2 + 2F\partial u\partial v + G\partial v^2,$$

in welcher Form sie bloss eine andere Ausdrucksweise des Euler'schen Satzes bildet, wobei  $\delta$  die doppelte constante Entfernung der Schnittebene von der Berührungsebene bedeutet \*).

Die Quadrate ihrer Axen sind

$$a^2 = \delta\varrho_1, \quad b^2 = \delta\varrho_2.$$

\*) Siehe meinen Aufsatz über Punktklinien in dieser Zeitschrift.

Nun ist bekannt, dass

$$\partial s^2 = e \partial u^2 + 2f \partial u \partial v + g \partial v^2,$$

folglich

$$e = \frac{\partial s^2}{\partial}.$$

$\partial s$  ist ein beliebiger Halbmesser der Punktklinie. Wenn also

$$e + e' = e_1 + e_2,$$

so muss sein

$$\partial s^2 + \partial s'^2 = a^2 + b^2,$$

d. h. die Summe der Quadrate jener Radien der Punktklinie, welche zweien conjugirten Normalschnitten entsprechen, ist gleich der Summe der Quadrate der Axen, also constant. Das ist aber die bekannte Eigenschaft zweier conjugirten Halbmesser einer Linie 2. Grades, folglich stimmen die Richtungen zweier conjugirten Tangenten mit denen zweier conjugirten Durchmesser der Punktklinie überein.

Königgrätz, am 24. April 1877.

F. Hoza.

### 3.

#### Ort der Punkte constanter Berührungssehnens in Bezug auf einen Kegelschnitt <sup>1)</sup>.

Mit dieser Aufgabe beschäftigten sich die Herren Gruuert <sup>2)</sup> und Schlömilch <sup>3)</sup>; die Enveloppe der Sehnens constanter Länge, die Polarreciproke erwähnten Ortes entwickelte und untersuchte Herr Dr. Ed. Weyr <sup>4)</sup> mittelst der Liniencoordinaten. Die Auflösung, welche ich hier mittheile, ist ganz einfach. Mit Zuhilfenahme eines eindeutigen Parameters <sup>5)</sup>  $u$ , können wir die Gleichung des Kegelschnittes

$$K \equiv y^2 - 2px - qx^2 = 0 \quad (1)$$

1) Erschien in Studnička-s „Casopis matematiky a fysiky“. Prag. Bd. VI. pg. 139.

2) Gruuert „Archiv für Math. und Phys.“ Bd. 47.

3) Schlömilch „Zeitschrift für Math. und Phys.“ Jahrg. XIV. pg. 158.

4) ibid. Jahrg. XVII. pg. 164.

5) Siehe Dr. Em. Weyr „kuželosečkách a jich kruzích zakřivenosti“ (Kegelschnitte und deren Krümmungskreise) in Studnička-s Casopis math. a fys. Bd. II. pg. 65., sowie desselben Abhandlung über Kegelschnitte, Sitzungsab. d. k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 18|10 1872. Prag.

durch nachstehendes Gleichungspaar ersetzen

$$\begin{aligned} x &= \frac{2p}{u^2 - q} \\ y &= \frac{2pu}{u^2 - q} \end{aligned} \quad (2)$$

wo

$$y = ux;$$

somit ist auch die geometrische Deutung des Parameters ersichtlich. Aus einem Punkte  $A$  können wir zwei Tangenten ziehen. Die Parameter der Berührungspunkte  $u_1, u_2$  erhalten wir aus der Gleichung der Tangente, welche wir zu diesem Behufe entwickeln wollen. Die Gleichung der Secante als Verbindungslinie  $\overline{u_1 u_2}$  zweier Curvenpunkte ist

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{2p}{u_1^2 - q} & \frac{2pu_1}{u_1^2 - q} & 1 \\ \frac{2p}{u_2^2 - q} & \frac{2pu_2}{u_2^2 - q} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 2p \\ 1 & u_1 & u_1^2 - q \\ 0 & 1 & u_1 + u_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Für  $u_1 = u_2 = u$  geht die Gleichung der Secante in die der Tangente im Punkte  $u$  über, in

$$2uy - (u^2 + q)x - 2p = 0 \quad (4)$$

Diese Gleichung gibt uns eine Relation zwischen dem Parameter des Berührungspunktes und der Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Tangente an. Nehmen wir nun den Punkt  $A(x, y)$  auf der Tangente als fest als gegeben an, so können wir aus der Gl. (4) die Parameter der Berührungspunkte finden als deren Wurzeln nach  $u$ .

Ordnen wir demnach die Gleichung (4) nach den Potenzen von  $u$ , so erhalten wir zwischen den Coordinaten des Punktes  $A$  und den Parametern der Berührungspunkte  $u_1, u_2$  nachstehende Relationen:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \frac{2y}{x} \\ u_1 u_2 &= \frac{qx + 2p}{x} \end{aligned} \quad (5)$$

wo  $u_1, u_2$  sich wie erwähnt als Wurzeln der Gleichung (4) nach  $u$  ergeben.

Mit Hilfe des Gleichungspaares (5) können wir nur unsere Aufgabe lösen. Es sei die gegebene Länge der Berührungssehne  $\overline{u_1 u_2}$  gleich  $c$ , so ist

Es ist aber 
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = c^2 \quad (6)$$

$$x_1 - x_2 = 2p \left\{ \frac{1}{u_1^2 - q} - \frac{1}{u_2^2 - q} \right\} = 2p \frac{u_2^2 - u_1^2}{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)}$$

oder wenn wir den Zähler in Factoren zerlegen und die Identität

$$(u_1 - u_2)^2 \equiv (u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2 \quad (7)$$

benutzen

$$x_1 - x_2 = 2p \frac{-(u_1 + u_2) \sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2}}{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)}$$

Aehnlich erhalten wir

$$y_1 - y_2 = 2p \left\{ \frac{u_1}{u_1^2 - q} - \frac{u_2}{u_2^2 - q} \right\} = 2p \frac{-(u_1 - u_2)(u_1 u_2 + q)}{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)},$$

und mit Hilfe der Gl. (7)

$$y_1 - y_2 = 2p \frac{-(u_1 u_2 + q) \sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2}}{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)}.$$

Führen wir diese Werte für  $(x_1 - x_2)$  und  $(y_1 - y_2)$  in die Gl. (6) ein, so erhalten wir

$$(8) \quad \{(u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2\} \{(u_1 + u_2)^2 + (u_1 u_2 + q)^2\} = \lambda^2 \{(u_1 u_2 + q)^2 - 2q(u_1 + u_2)\}^2,$$

wo wir der Kürze wegen setzen

$$\lambda^2 = \frac{c^2}{4p^2}.$$

Führen wir nun aus den Gleichungen (5) die Werte für  $u_1 u_2$  und  $(u_1 + u_2)$  in die Gleichung (8) ein, womit wir anzeigen, dass  $u_1$  und  $u_2$  die Berührungspunkte der vom Punkte  $A$  an den Kegelschnitt gelegten Tangenten sind, und dass  $c$  nach Gl. (6) die gegebene constante Länge der Berührungssehne ist, so erhalten wir für den Ort die Gleichung

$$(9) \quad \{y^2 - x(qx + 2p)\} \{y^2 + (qx + p)^2\} = \lambda^2 \{(qx + p)^2 - qxy\}^2 - q$$

oder setzen wir kurz

$$K \equiv y^2 - qx^2 - 2px$$

$$L \equiv y^2 + (qx + p)^2$$

$$H \equiv (qx + p)^2 - qxy,$$



so ist die Gleichung des Ortes

$$KL - \lambda^2 H^2 = 0 \quad (10)$$

Ist nun die Berührungssehne zwar constant aber unbestimmt, so erhalten wir eine ganze Schaar solcher Curven, welche zusammen ein Curvenbüschel vierter Ordnung bilden, welche einen gemeinschaftlichen Doppelpunkt auf der  $X$  Achse haben in der Entfernung

$$x = -\frac{p}{q} = -a$$

vom Anfangspunkte, wo  $a$  die halbe grosse Achse des gegebenen Kegelschnittes bedeutet.

Aus der Form der Gleichung des Ortes folgt, dass der verlangte Ort die Kegelschnitte

$$K = 0, \quad L = 0$$

in den Punkten berührt, in welcher dieselben den Kegelschnitt  $H$  schneiden, was wir auch analytisch nachweisen können. Es sei  $B$  z. B. einer der vier Schnittpunkte der Kegelschnitte

$$K = 0, \quad H = 0,$$

d. h. seine Coordinaten genügen ihren Gleichungen. Bezeichnen wir die Gleichung des Ortes (10) kurz

$$F = 0,$$

so ist die Richtungsconstante der Tangente eines beliebigen Punktes derselben gleich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1}{F_2} = -\frac{K_1 L + KL_1 - 2\lambda^2 HH_1}{K_2 L + KL_2 - 2\lambda^2 HH_2} \quad (11)$$

und an der Curve  $K$  ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{K_1}{K_2} \quad (12)$$

Der Punkt  $B$  liegt nun auch auf der Curve  $F$ , da seine Coordinaten den Gleichungen

$$K = 0, \quad H = 0$$

genügen, somit auch der Gleichung (10) nämlich

$$F = 0.$$

Führen wir die Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung (11), so erhalten wir, nachdem wir früher mit  $L$  gekürzt haben

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{K_1}{K_2},$$

d. h. die Curven  $K$  und  $F$  haben im Punkte  $B$  eine gemeinschaftliche Tangente. Ähnliches ergibt sich für die Durchschnittspunkte der Curven

$$L = 0, \quad H = 0$$

welche auch, wie schon erwähnt wurde, Punkte der Curve  $F$ , d. i. des gesuchten Ortes sind. K. Zahradnik.

## 3.

**Summierung einer Reihe.**

Beispielsweise sei von einer Methode der Summierung Gebrauch gemacht, die sich vielfach anwenden lässt. Die gegebene Reihe sei

$$\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Nun ist

$$a^{-b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{-au} u^{b-1} \partial u$$

daher, wenn man  $a = b = k+1$  setzt,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=\infty} (k+1)^{-(k+1)} &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty e^{-(k+1)u} u^k \partial u \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \partial u \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(ue^{-u})^k}{k!} = \int_0^\infty e^{-u} \partial u \cdot e^{-ue^{-u}} \end{aligned}$$

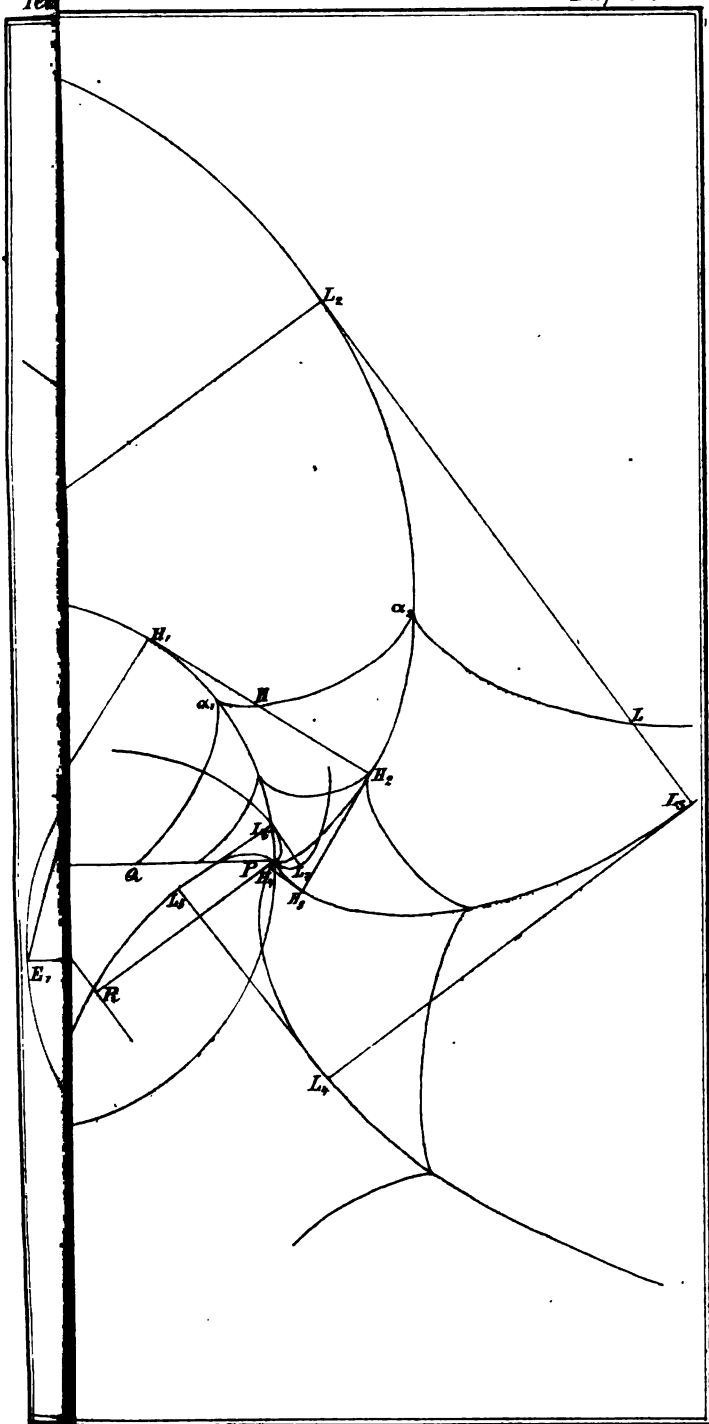
oder, nach Substitution  $e^{-u} = v$ ,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{-k} = \int_0^1 v^{-v} \partial v$$

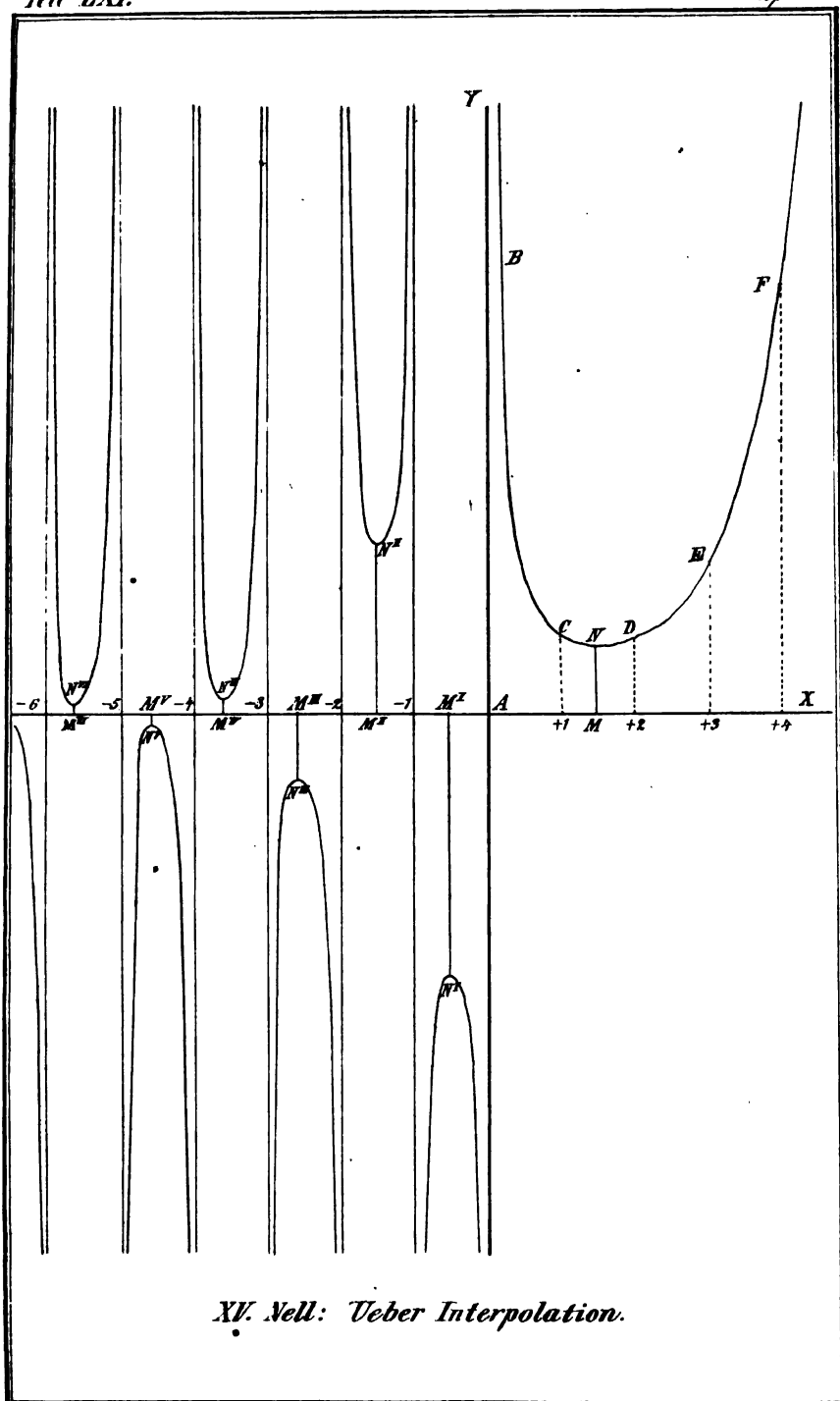
Ähnlich findet man:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} k^{-k} = \int_0^1 v^v \partial v$$

R. Hoppe.







XV. Nell: Ueber Interpolation.



Verlag von **Louis Nebert** in *Halle a/S.*  
(Durch jede Buchhandlung zu beziehen.)

- Koestler**, Oberlehrer **H.**, Leitfaden für den Anfangsunterricht in der *Geometrie* an höh. Lehranstalten. 2 Hefte mit viel. Holzschn. gr. 8. geh. 1 Mk. 90 Pf.
- Koestler**, Oberlehrer **H.**, Leitfaden für den Anfangsunterricht in der *Arithmetik* an höh. Lehranstalten. gr. 8. geh. 75 Pf.
- Hoffmann**, Prof. **J. C. V.**, Redacteur d. Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, Vorschule der Geometrie. Ein methodischer Leitfaden beim Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre f. d. unteren Klassen der Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminare, sowie zum Selbstunterricht, besonders für Volksschullehrer. 1<sup>o</sup> Lief. (Erste Hälfte d. Planimetrie). Mit 230 Holzschnitten und 2 lithogr. Figurentafeln. gr. 8. geh. 3 Mk.
- Schwarz**, Dr. **H.**, Grundzüge für den Rechenunterricht. 8. geh. 40 Pf.
- Emsmann**, Dr. **G.**, Mathematische Excursionen. Ein Uebungsbuch zum Gebrauche in den oberen Klassen höherer Lehranstalten und beim Selbststudium. Mit 2 lithogr. Figurentafeln. gr. 8. geh. 3 Mk 60 Pf.
- Dronke**, Dr. **A.**, Einleitung in die höhere Algebra. Mit 12 in den Text eingedruckten Holzschnitten. gr. 8. geh. 4 Mk 50 Pf.
- 

## Principien der Flächentheorie.

Von  
**Dr. R. Hoppe**,  
Professor an der Universität Berlin.  
1876. gr. 8. Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

---

## Tafeln zur dreissigstelligen logarithmischen Rechnung.

Berechnet  
von  
**Dr. R. Hoppe**,  
Professor an der Universität Berlin.  
1876. gr. 8. Geh. Preis 80 Pf.

*Leipzig.*

**C. A. Koch's** Verlagsbuchhandlung.

# Westermann's Illustrierte Deutsche Monatshefte

Preis pro Quartal 3 Mark.

**Neue Subscriptionseröffnung 1. October 1877**

bringen, neben einer Reihe vorzüglicher wissenschaftlicher  
Beiträge, Novellen von:

*Th. Storm*: Carsten Curator; — *W. Raabe*: Wunnigel; — *Levin Schücking*: Eine treue Seele; — *K. Frenzel*: Die Uhr; — *Wilh. Raabe*: Deutscher Adel; — *R. Hamerling*: Ralph und Blanca; — *E. Hofer*: Fantaisie; — *V. Blüthgen*: Die schwarze Kaschka, und den Roman von

**Friedrich Spielhagen**

## **Das Skelet im Hause.**

Bestellungen übernehmen alle Buchhandlungen und Postanstalten.

### I N H A L T.

	Seite.
VII. Geometrische Veranschaulichung des binomischen Satzes. Von Koppe . . . . .	113
VIII. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Von Alfred Siebel. (Fortsetzung.) . . . . .	122
IX. Sur les lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation $XYZ = T^2$ . Par Paul Appell . . . . .	144
X. Zur Kinematik des Auges. Von R. Hoppe . . . . .	146
XI. Propriétés nouvelles de la tangente et de la normale aux courbes du second degré. Par Georges Dostor . . . . .	160
XII. Propositions sur les coniques. Par Georges Dostor . . . . .	171
XIII. Der Punkt der gleichen Paralleltransversalen. Von Emil Hain . . . . .	177
XIV. Isogonal entsprechende Gerade des Dreiecks. Von Emil Hain . . . . .	182
XV. Ueber Interpolation. Von Nell . . . . .	185
XVI. Miscellen.	
1. Note über conjugirte Tangenten. Von F. Hoza . . . . .	218
2. Ort der Punkte constanten Berührungsschnitten in Bezug auf einen Kegelschnitt. Von K. Zahradnik . . . . .	220
3. Summirung einer Reihe. Von R. Hoppe . . . . .	224

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.



# ARCHIV

der

## MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht  
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von  
**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von  
**R. Hoppe.**

Einundsechzigster Teil. Drittes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

---

Leipzig.  
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,  
J. Sengbusch.

1877.

Verlag von Louis Nebert in Halle a/S.  
(Durch jede Buchhandlung zu beziehen.)

- Enneper, Prof. Dr. A., *Elliptische Functionen. Theorie u. Geschichte.* Akademische Vorträge. Lex. 8<sup>o</sup>. geh. 16 Mk.
- Günther, Prof. Sigm., *Studien z. Geschichte d. mathemat. u. physikal. Geographie.*
- I. Heft: Die Lehre v. d. Erdrundung u. Erdbewegung im Mittelalter bei den Occidentalen. gr. 8<sup>o</sup>. geh. 1 Mk. 80 Pf.
- II. Heft: Die Lehre v. d. Erdrundung u. Erdbewegung im Mittelalter bei den Arabern u. Hebräern. gr. 8<sup>o</sup>. geh. 2 Mk. 10 Pf.
- Thomae, Prof. Dr. J., *Ueber e. spezielle Klasse Abel'scher Functionen.* gr. 4<sup>o</sup>. geh. 4 Mk. 50 Pf.
- Thomae, Prof. Dr. J., *Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung d. elliptisch. u. Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden.* gr. 4<sup>o</sup>. geh. 3 Mk.
- Thomae, Prof. Dr. J., *Abriss e. Theorie der complexen Functionen u. der Thetafunctionen e. Veränderlichen.* Zweite vermehrte Auflage. gr. 8<sup>o</sup>. geh. 5 Mk. 25 Pf.
- Thomae, Prof. Dr. J., *Einleitung in d. Theorie d. bestimmten Integrale.* gr. 4<sup>o</sup>. geh. 2 Mk. 80 Pf.
- Thomae, Prof. Dr. J., *Ebene geometrische Gebilde I. u. II. Ordnung v. Standpunkte der Geometrie d. Lage betrachtet.* gr. 4<sup>o</sup>. geh. 2 Mk. 25 Pf.
- Thomae, Prof. Dr. J., *Ueber e. Function, welche e. linearen Differential- und Differenzengleichung IV. Ordn. Genüge leistet.* gr. 4<sup>o</sup>. geh. 1 Mk. 50 Pf.
- Hochheim, Dr. A., *Ueber d. Differentialcurven d. Kegelschnitte.* gr. 8<sup>o</sup>. geh. 3 Mk.
- Hochheim, Dr. A., *Ueber Pole u. Polaren d. parabolisch. Curven III. Ordnung.* gr. 4<sup>o</sup>. geh. 1 Mk.
- Dronke, Dr. A., *Einleitung in die höhere Algebra.* gr. 8<sup>o</sup>. geh. 4 Mk. 50 Pf.
- Bette, Dr. W., *Unterhaltungen über einige Capitel d. Mécanique céleste u. der Kosmogonie.* gr. 8<sup>o</sup>. geh. 2 Mk.
- Clouth, G. M., *Tafeln zur Berechnung goniometrischer Coordinaten.* Lex. 8. geh. 5 Mk.
- Wiegand, Dr. A., *Wie mir's erging.* Autobiographische Skizzen. 8. geh. 2 Mk.

---

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.  
(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)

## Siebenstellige gemeine Logarithmen

der Zahlen von 1 bis 108000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Secunden nebst einer Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile.

Von Dr. Ludwig Schrön, Director der Sternwarte zu Jena.

*Sechzehnte revidirte Stereotyp-Ausgabe.* Imperial-Octav. geh.

Tafel I. u. II. (Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen). Preis 4 Mk. 20 Pf.

Tafel III. (Interpolationstafel, Supplement zu allen Logarithmentafeln). Preis 1 Mk. 80 Pf.

Tafel I. (Logarithmen der Zahlen). Preis 2 Mk. 40 Pf.

## XVII.

## Ueber das Dreieck.

Von

**Max Greiner.**

In dieser Abhandlung sollen insbesondere die dem Dreiecke ein- und unbeschriebenen Kreise und die Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des Dreiecks einer näheren Untersuchung unterzogen werden, unter besonderer Bezugnahme auf die Sätze über Pol und Polare des Dreiecks.

Man betrachte nun, um den vorkommenden Gleichungen und Ausdrücken eine möglichst einfache Form zu geben, die Seiten des Dreiecks als Tangenten eines aus dem Coordinatenanfang beschriebenen Kreises; so werden, wenn:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung dieses Kreises ist, und  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  die Coordinaten der Berührungspunkte sind, die Gleichungen der Dreiecksseiten die folgenden:

$$A = xx_1 + yy_1 - r^2 = 0$$

$$B = xx_2 + yy_2 - r^2 = 0$$

$$C = xx_3 + yy_3 - r^2 = 0$$

wobei die Bedingungsgleichungen:

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = r^2 \quad . . . . . (1)$$

stattfinden.

Die Gleichungen der Seiten in der Normalform sind also:

$$\frac{A}{r} = 0, \quad \frac{B}{r} = 0, \quad \frac{C}{r} = 0$$

und die der Aussenwinkelhalbirenden sind:

$$\begin{aligned} A' &= B + C = 0 \\ B' &= A + C = 0 \quad . . . . . (2) \\ C' &= A + B = 0 \end{aligned}$$

Diese Aussenwinkelhalbirenden bilden ein Dreieck, dessen Ecken  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  die Mittelpunkte der dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise sind; deren Gleichungen erhalten werden, wenn man berücksichtigt, dass:

$$\lambda_1^2 A^2 + \lambda_2^2 B^2 + \lambda_3^2 C^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 AB - 2\lambda_1 \lambda_3 AC - 2\lambda_2 \lambda_3 BC = 0 = F(x, y)$$

überhaupt die Gleichung irgend eines Kegelschnitts ist, der die Seiten des Dreiecks (Fig. 1.) berührt (Pol und Polare des Dreiecks (16)), und nun die Grössen  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  so bestimmt, dass dieser Kegelschnitt bezüglich die Mittelpunkte  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  erhält.

Für den Mittelpunkt dieses Kegelschnitts hat man aber die Gleichungen:

$$\frac{1}{2} F'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} F'(y) = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 (\lambda_1 A - \lambda_2 B - \lambda_3 C) + \lambda_2 x_2 (-\lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C) \\ + \lambda_3 x_3 (-\lambda_1 A - \lambda_2 B + \lambda_3 C) = 0 \\ \lambda_1 y_1 (\lambda_1 A - \lambda_2 B - \lambda_3 C) + \lambda_2 y_2 (-\lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C) \\ + \lambda_3 y_3 (-\lambda_1 A - \lambda_2 B + \lambda_3 C) = 0 \end{aligned}$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} \lambda_1 A - \lambda_2 B - \lambda_3 C &= ku \\ -\lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C &= kv \\ -\lambda_1 A - \lambda_2 B + \lambda_3 C &= kw \end{aligned}$$

so folgen durch Addition je zweier dieser Gleichungen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 A &= k'(v + w) \\ \lambda_2 B &= k'(u + w) \\ \lambda_3 C &= k'(u + v) \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 u + \lambda_2 x_2 v + \lambda_3 x_3 w &= 0 \\ \lambda_1 y_1 u + \lambda_2 y_2 v + \lambda_3 y_3 w &= 0 \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus die Grössen  $\lambda_1 u$ ,  $\lambda_2 v$ ,  $\lambda_3 w$  und setzt der Kürze halber:

$$\begin{aligned}
 x_2 y_3 - x_3 y_2 &= \varrho_1 \\
 x_3 y_1 - x_1 y_3 &= \varrho_2 \quad \dots \dots \dots (3) \\
 x_1 y_2 - x_2 y_1 &= \varrho_3
 \end{aligned}$$

so hat man:

$$\lambda_1 u = k'' \varrho_1, \quad \lambda_2 v = k'' \varrho_2, \quad \lambda_3 w = k'' \varrho_3$$

Die Werte für  $u, v, w$ , in die vorigen drei Gleichungen eingesetzt geben:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 0 + \lambda_2 \varrho_3 + \lambda_3 \varrho_2 &= k''' A \\
 \lambda_1 \varrho_3 + \lambda_2 0 + \lambda_3 \varrho_1 &= k''' B \\
 \lambda_1 \varrho_2 + \lambda_2 \varrho_1 + \lambda_3 0 &= k''' C
 \end{aligned}$$

woraus sich ergeben:

$$\lambda_1 = \mu \begin{vmatrix} A & \varrho_3 & \varrho_2 \\ B & 0 & \varrho_1 \\ C & \varrho_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_2 = \mu \begin{vmatrix} 0 & A & \varrho_2 \\ \varrho_3 & B & \varrho_1 \\ \varrho_2 & C & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = \mu \begin{vmatrix} 0 & \varrho_3 & A \\ \varrho_3 & 0 & B \\ \varrho_2 & \varrho_1 & C \end{vmatrix}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \mu \varrho_1 (-\varrho_1 A + \varrho_2 B + \varrho_3 C) \\
 \lambda_2 &= \mu \varrho_2 (\varrho_1 A - \varrho_2 B + \varrho_3 C) \quad \dots \dots \dots (4) \\
 \lambda_3 &= \mu \varrho_3 (\varrho_1 A + \varrho_2 B - \varrho_3 C)
 \end{aligned}$$

Hierdurch sind die Grössen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  so bestimmt, dass  $A, B, C$  die Dreieckscoordinaten für den Mittelpunkt des Kegelschnittes ( $F(x, y) = 0$ ) sind.

Will man also die Gleichung desjenigen Kreises, der die Seite  $A$  des Dreiecks  $abc$  direct und die Seiten  $B$  und  $C$  in ihren Verlängerungen berührt, so hat man in die Gleichungen (4) statt der Grössen  $A, B, C$  die Dreieckscoordinaten des Punktes  $a'$  einzuführen. Nun ist aber:

$$B_{a'}' \equiv 0, \quad C_{a'}' \equiv 0$$

folglich:

$$A_{a'} + C_{a'} \equiv 0, \quad A_{a'} + B_{a'} \equiv 0$$

deshalb:

$$A_{a'} = A_{a'}, \quad B_{a'} = -A_{a'}, \quad C_{a'} = -A_{a'}$$

und somit:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -\mu' \varrho_1 (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) \\
 \lambda_2 &= \mu' \varrho_2 (\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3) \quad \dots \dots \dots (4a) \\
 \lambda_3 &= \mu' \varrho_3 (\varrho_2 - \varrho_2 + \varrho_3)
 \end{aligned}$$

Ebenso ergeben sich die Werte von  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  für die beiden andern dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise, und man erhält, indem man:

$$\begin{aligned}
 \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 &= \sigma_0 \\
 -\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 &= \sigma_1 \\
 \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 &= \sigma_2 \quad \dots \dots \dots (5) \\
 \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 &= \sigma_3
 \end{aligned}$$

setzt, als Gleichungen jener drei Kreise die folgenden:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \sigma_0^2 \varrho_1^2 A^2 + \sigma_3^2 \varrho_2^2 B^2 + \sigma_2^2 \varrho_3^2 C^2 + 2\sigma_0 \sigma_3 \varrho_1 \varrho_2 AB + 2\sigma_0 \sigma_2 \varrho_1 \varrho_3 AC \\
 &\quad - 2\sigma_2 \sigma_3 \varrho_2 \varrho_3 BC = 0 \\
 K_2 &= \sigma_3^2 \varrho_1^2 A^2 + \sigma_0^2 \varrho_2^2 B^2 + \sigma_1^2 \varrho_3^2 C^2 + 2\sigma_0 \sigma_3 \varrho_1 \varrho_2 AB - 2\sigma_1 \sigma_3 \varrho_1 \varrho_3 AC \\
 &\quad + 2\sigma_0 \sigma_1 \varrho_2 \varrho_3 BC = 0 \\
 K_3 &= \sigma_2^2 \varrho_1^2 A^2 + \sigma_1^2 \varrho_2^2 B^2 + \sigma_0^2 \varrho_3^2 C^2 - 2\sigma_1 \sigma_3 \varrho_1 \varrho_2 AB + 2\sigma_0 \sigma_2 \varrho_1 \varrho_3 AC \\
 &\quad + 2\sigma_0 \sigma_1 \varrho_2 \varrho_3 BC = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

Verbindet man nun diejenigen Punkte, in welchen jeder der drei Kreise  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  die verlängerten Dreiecksseiten berührt, so entsteht ein Dreieck  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ , dessen Eigenschaften nun näher zu untersuchen sind.

Die Seite  $A''$  kann man sich auch als Polare der Ecke  $a$  bezüglich des Kreises  $a'$  aufgefasst denken und erhält somit deren Gleichung, wenn man sich aus der Gleichung:

$$F_a(x, y) = 0$$

jenes Kreises die Gleichung seiner Polaren bezüglich eines Punktes  $O$  ableitet:

$$x \frac{1}{2} F_a'(x_0) + y \frac{1}{2} F_a'(y_0) + z F_a'(z_0) = 0$$

und als Punkt  $O$  die Ecke  $a$  des Dreiecks  $ABC$  wählt, wofür:

$$B_0 \equiv 0 \quad \text{und} \quad C_0 \equiv 0$$

ist.

Auf dieselbe Weise ergeben sich die Gleichungen für  $B''$  und  $C''$ , so dass man hat:

$$\begin{aligned}
 A'' &= \sigma_0 \varrho_1 A + \sigma_3 \varrho_2 B + \sigma_2 \varrho_3 C = 0 \\
 B'' &= \sigma_3 \varrho_1 A + \sigma_0 \varrho_2 B + \sigma_1 \varrho_3 C = 0 \quad \dots \dots \dots (7) \\
 C'' &= \sigma_2 \varrho_1 A + \sigma_1 \varrho_2 B + \sigma_0 \varrho_3 C = 0
 \end{aligned}$$

Zufolge (5) hat man auch:

$$\begin{aligned}
 A'' &= \sigma_0 \varrho_1 A + (\sigma_0 - 2\varrho_3) \varrho_2 B + (\sigma_0 - 2\varrho_2) \varrho_3 C = 0 \\
 A'' &= \sigma_0 (\varrho_1 A + \varrho_2 B + \varrho_3 C) - 2\varrho_2 \varrho_3 (B + C) = 0 \\
 A'' &= \sigma_0 (x(\varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \varrho_3 x_3) + y(\varrho_1 y_1 + \varrho_2 y_2 + \varrho_3 y_3) - r^2 \sigma_0) \\
 &\quad - 2\varrho_2 \varrho_3 (B + C) = 0
 \end{aligned}$$

Da aber nach (3):

$$\begin{aligned}
 \varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \varrho_3 x_3 &\equiv 0 \\
 \varrho_1 y_1 + \varrho_2 y_2 + \varrho_3 y_3 &\equiv 0 \quad \dots \dots \dots (8)
 \end{aligned}$$

so folgt:

$$\begin{aligned}
 A'' &= -2\varrho_2 \varrho_3 (B + C) - r^2 \sigma_0^2 = 0 \\
 \text{ebenso:} \quad B'' &= -2\varrho_1 \varrho_3 (A + C) - r^2 \sigma_0^2 = 0 \\
 C'' &= -2\varrho_1 \varrho_2 (A + B) - r^2 \sigma_0^2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots (9)
 \end{aligned}$$

Zufolge der Gleichungen (2) ergibt sich nun, dass die Geraden  $A'', B'', C''$  bezüglich parallel sind mit  $A', B', C'$ , was auch unmittelbar hervorgeht, wenn man berücksichtigt, dass die Kreispolaren  $A'', B'', C''$  der Ecken  $a, b, c$  des gegebenen Dreiecks senkrecht stehen auf den Geraden  $aa', bb', cc'$ .

Daher der Satz:

Das Dreieck  $A''B''C''$  ist ähnlich und ähnlichliegend mit dem Dreiecke  $A'B'C'$  der Aussenwinkelhalbirenden des gegebenen Dreiecks. . . . . (10)

Die Coordinaten der Eckpunkte  $a'', b'', c''$  des Dreiecks  $A''B''C''$  ergeben sich durch Auflösung je zweier der drei Gleichungen (7) nach  $A, B, C$  und sind bestimmt durch die Verhältnisse:

$$\begin{aligned} A_{a''}:B_{a''}:C_{a''} &= -2\varrho_2\varrho_3(\varrho_2+\varrho_3):\varrho_3(\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_3^2):\varrho_2(\varrho_1^2-\varrho_2^2+\varrho_3^2) \\ A_{b''}:B_{b''}:C_{b''} &= \varrho_3(\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_3^2):-2\varrho_1\varrho_3(\varrho_1+\varrho_3):\varrho_1(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2) \\ A_{c''}:B_{c''}:C_{c''} &= \varrho_2(\varrho_1^2-\varrho_2^2+\varrho_3^2):\varrho_1(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2):-2\varrho_1\varrho_2(\varrho_1+\varrho_2) \end{aligned}$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf (1)

$$\begin{aligned} r^2(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2) &= -\varrho_1^2(x_1^2+y_1^2)+\varrho_2^2(x_2^2+y_2^2)+\varrho_3^2(x_3^2+y_3^2) \\ &= \varrho_2^2x_2^2-\varrho_1^2x_1^2+\varrho_2^2y_2^2-\varrho_1^2y_1^2+\varrho_3^2(x_3^2+y_3^2) \\ &= (\varrho_2x_2+\varrho_1x_1)(\varrho_2x_2-\varrho_1x_1)+(\varrho_2y_2+\varrho_1y_1)(\varrho_2y_2-\varrho_1y_1)+\varrho_3^2(x_3^2+y_3^2) \end{aligned}$$

und zufolge der Gleichungen (8) hat man:

$$\begin{aligned} r^2(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2) &= -\varrho_3x_3(\varrho_2x_2-\varrho_1x_1)-\varrho_3y_3(\varrho_2y_2-\varrho_1y_1)+\varrho_3^2(x_3^2+y_3^2) \\ &= -\varrho_3[-x_3(x_1\varrho_1-x_2\varrho_2+x_3\varrho_3)-y_3(y_1\varrho_1-y_2\varrho_2+y_3\varrho_3)] \\ &= -2\varrho_2\varrho_3(x_2x_3+y_2y_3) \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun  $x_\lambda x_\mu + y_\lambda y_\mu$  mit  $\Sigma_{\lambda\mu}$ , so hat man:

$$r^2(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2) = -2\varrho_2\varrho_3\Sigma_{23}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} r^2(\varrho_1^2-\varrho_2^2+\varrho_3^2) &= -2\varrho_1\varrho_3\Sigma_{13} \\ r^2(\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_3^2) &= -2\varrho_1\varrho_2\Sigma_{12} \end{aligned} \quad . . . . . (11)$$

Mithin gehen obige Verhältnisse über in:

$$\begin{aligned} A_{a''}:B_{a''}:C_{a''} &= \frac{r^2(\varrho_2+\varrho_3)}{\varrho_1}:\Sigma_{12}:\Sigma_{13} \\ A_{b''}:B_{b''}:C_{b''} &= \Sigma_{12}:\frac{r^2(\varrho_1+\varrho_3)}{\varrho_2}:\Sigma_{23} \\ A_{c''}:B_{c''}:C_{c''} &= \Sigma_{13}:\Sigma_{23}:\frac{r^2(\varrho_1+\varrho_2)}{\varrho_3} \end{aligned} \quad . . . . . (12)$$

Für die Verbindungslinien der Eckpunkte  $a, b, c$  des Dreiecks  $ABC$  mit den Eckpunkten  $a'', b'', c''$  des Dreiecks  $A''B''C''$  hat man die Gleichungen:

$$BC_{a''} - CB_{a''} = 0$$

$$CA_{b''} - AC_{b''} = 0$$

$$AB_{c''} - BA_{c''} = 0$$

oder:

$$B\Sigma_{12} - C\Sigma_{12} = 0$$

$$C\Sigma_{12} - A\Sigma_{23} = 0$$

$$A\Sigma_{23} - B\Sigma_{13} = 0$$

Da aber diese Gleichungen die Höhen des Urdreiecks  $ABC$  darstellen, so folgt der Satz:

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken der Dreiecke  $ABC$  und  $A''B''C''$  treffen sich in einem und demselben Punkte und zwar in dem Höhenschnittpunkte des Urdreiecks  $ABC$ . . . . . (13)

Die ähnlichen und ähnlichliegenden Dreiecke  $A'B'C'$  und  $A''B''C''$  besitzen einen Ähnlichkeitspunkt  $Q$ , in welchem sich die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken schneiden.

Die Gleichungen dieser Verbindungslinien  $a'a'', b'b'', c'c''$  sind nun:

$$B''C_{a''} - C''B_{a''} = 0$$

$$C''A_{b''} - A''C_{b''} = 0$$

$$A''B_{c''} - B''A_{c''} = 0$$

Zufolge (9) und (2) hat man aber:

$$A'' = -2\varrho_2\varrho_3A' - r^2\sigma_0^2 = 0$$

$$B'' = -2\varrho_1\varrho_3B' - r^2\sigma_0^2 = 0$$

$$C'' = -2\varrho_1\varrho_2C' - r^2\sigma_0^2 = 0$$

Da nun

$$B_{a'} \equiv 0 \quad \text{und} \quad C_{a'} \equiv 0$$

so sind:

$$B_{a''} = -r^2\sigma_0^2 \quad \text{und} \quad C_{a''} = -r^2\sigma_0^2$$

ebenso sind:

$$A_{b''} = C_{b''} = -r^2\sigma_0^2$$

$$B_{c''} = C_{c''} = -r^2\sigma_0^2$$

so dass die Gleichungen von  $a'a'', b'b'', c'c''$  übergehen in:

$$B'' - C'' = 0$$

$$C'' - A'' = 0$$

$$A'' - B'' = 0$$



woraus zugleich ersichtlich ist, dass die Geraden  $a'a''$ ,  $b'b''$ ,  $c'c''$  sich in einem und demselben Punkte treffen.

Mit Hülfe der Gleichungen (9) nehmen aber obige Gleichungen die Formen an:

$$\frac{B'}{\varrho_2} - \frac{C'}{\varrho_3} = 0$$

$$\frac{C'}{\varrho_3} - \frac{A'}{\varrho_1} = 0$$

$$\frac{A'}{\varrho_1} - \frac{B'}{\varrho_2} = 0$$

und da diesen drei Gleichungen durch die Coordinaten des Aehnlichkeitspunktes  $Q$  genügt werden muss, so hat man:

$$A_q' = \varrho_1 \lambda, \quad B_q' = \varrho_2 \lambda, \quad C_q' = \varrho_3 \lambda$$

oder mit Rücksicht auf (2)

$$B_q + C_q = \lambda \varrho_1$$

$$A_q + C_q = \lambda \varrho_2$$

$$A_q + B_q = \lambda \varrho_3$$

woraus folgt:

$$A_q : B_q : C_q = \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 \quad \dots \dots \dots (14)$$

Verbindet man den Schnittpunkt der Geraden  $a'a''$  und der entsprechenden Dreiecksseite  $A$  mit der Gegenecke  $a$  des Dreiecks  $ABC$ , so ist die Gleichung dieser Verbindungslinie einerseits:

$$\mu B + \lambda C = 0$$

Die Gleichung von  $a'a''$  ist nach Obigem:

$$B' \varrho_3 - C' \varrho_2 = 0$$

oder:

$$A(\varrho_2 - \varrho_3) + B \varrho_2 - C \varrho_3 = 0$$

Die Gleichung der gesuchten Linie ist also anderseits:

$$A(\varrho_2 - \varrho_3) + B \varrho_2 - C \varrho_3 - kA = 0$$

und somit muss sein:

$$\mu B + \lambda C \equiv A(\varrho_2 - \varrho_3 - k) + B \varrho_2 - C \varrho_3$$

also:

$$\mu = \varrho_2, \quad \lambda = -\varrho_3$$

Es ist also die Gleichung der Verbindungslinie des Punktes  $a$  mit dem Schnittpunkte von  $a'a''$  und  $A$

$$B \varrho_2 - C \varrho_3 = 0$$

d. h. die der Seitenhalbierungstransversale des Dreiecks  $ABC$ .

Daraus ergibt sich der Satz:

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken der Dreiecke  $A'B'C'$  und  $A''B''C''$  gehen durch die Mitten des Urdreiecks und treffen sich in einem und demselben Punkte  $Q$ .

Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks Quadrate und verlängert die den Dreiecksseiten parallelen Quadratseiten bis sie sich schneiden, so entsteht ein dem gegebenen Dreiecke ähnliches und mit ihm ähnlichliegendes Dreieck. Der Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke heisst der Grebe'sche Punkt.

Da man aber von den Quadraten

entweder: alle drei nach Aussen;

oder: je zwei nach Aussen und das dritte nach Innen;

oder: je eines nach Aussen und die beiden andern nach Innen;

oder: alle drei nach Innen

errichten kann, so werden im Allgemeinen acht Grebe'sche Punkte entstehen können.

Sind  $s_1, s_2, s_3$  die Längen der Dreiecksseiten, deren Gleichungen in der Normalform sind:

$$\frac{A}{r} = 0, \quad \frac{B}{r} = 0, \quad \frac{C}{r} = 0$$

so haben die zu den Dreiecksseiten parallelen Quadratseiten die Gleichungen:

$$A''' = A \pm rs_1 = 0$$

$$B''' = B \pm rs_2 = 0$$

$$C''' = C \pm rs_3 = 0$$

Die Verbindungslinien der Ecken  $a, b, c$  und  $a''', b''', c'''$  der Dreiecke  $ABC$  und  $A'''B'''C'''$  schneiden sich im Grebe'schen Punkte  $G$ .

Für die Gleichung der Verbindungslinie  $aa'''$  hat man nun einerseits:

$$B - \lambda C = 0$$

und andererseits:

$$\mu(B \pm rs_2) + \nu(C \pm rs_3) = 0$$

so dass:

$$B - \lambda C \equiv \mu(B \pm rs_2) + \nu(C \pm rs_3) = 0$$

folglich:

$$x_2 - \lambda x_3 = \mu x_2 + \nu x_3$$

$$y_2 - \lambda y_3 = \mu y_2 + \nu y_3$$

$$1 - \lambda = \mu \left(1 \mp \frac{s_2}{r}\right) + \nu \left(1 \mp \frac{s_3}{r}\right)$$

$$\therefore \lambda = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_2 & x_3 \\ y_2 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 \mp \frac{s_2}{r} & 1 \pm \frac{s_3}{r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_2 & x_3 \\ y_3 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 \mp \frac{s_2}{r} & 1 \mp \frac{s_3}{r} \end{vmatrix}} = \frac{s_2}{s_3}$$

Somit ist die Gleichung von  $aa''$ :

$$\frac{B}{s_2} - \frac{C}{s_3} = 0$$

ebenso von  $bb''$ :

$$\frac{C}{s_3} - \frac{A}{s_1} = 0$$

und von  $cc''$ :

$$\frac{A}{s_1} - \frac{B}{s_2} = 0$$

Für die Coordinaten ihres gemeinschaftlichen Schnittpunktes  $G$  hat man demnach:

$$A_g : B_g : C_g = s_1 : s_2 : s_3$$

woraus hervorgeht, dass man denselben Grebe'schen Punkt erhält, ob man die drei Quadrate nach Aussen oder nach Innen errichtet.

Würde man dieselbe Rechnung für den Fall durchführen, dass:

$$A'' = A \mp rs_1 = 0$$

$$B'' = B \pm rs_2 = 0$$

$$C'' = C \pm rs_3 = 0$$

so erhielte man für die Coordinaten des Grebe'schen Punktes:

$$A_{g_1} : B_{g_1} : C_{g_1} = -s_1 : s_2 : s_3$$

Es fallen somit von den acht Grebe'schen Punkten je zwei in einen zusammen, so dass man bloß einen inneren und drei äussere Grebe'sche Punkte erhält (Fig. 3.), deren Coordinatenverhältnisse die folgenden sind:

$$A_g : B_g : C_g = s_1 : s_2 : s_3$$

$$A_{g_1} : B_{g_1} : C_{g_1} = -s_1 : s_2 : s_3$$

$$A_{g_2} : B_{g_2} : C_{g_2} = s_1 : -s_2 : s_3 \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$A_{g_3} : B_{g_3} : C_{g_3} = s_1 : s_2 : -s_3$$

Nun hat man aber für die Länge  $s_1$  der Dreiecksseite  $bc$ :

$$s_1^2 = (x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2$$

Die Coordinaten  $x_b$  und  $y_b$ , ferner  $x_c$  und  $y_c$  ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_b x_1 + y_b y_1 &= r^2 & \text{und} & & x_c x_2 + y_c y_2 &= r^2 \\ x_b x_3 + y_b y_3 &= r^2 & & & x_c x_1 + y_c y_1 &= r^2 \end{aligned}$$

so dass:

$$\begin{aligned} x_b &= \frac{r^2}{\varrho_2} (y_1 - y_3), & x_c &= \frac{r^2}{\varrho_3} (y_2 - y_1) \\ y_b &= \frac{r^2}{\varrho_2} (x_3 - x_1), & y_c &= \frac{r^2}{\varrho_3} (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

$$\therefore s_1^2 = \frac{r^4}{\varrho_2^2 \varrho_3^2} (y_1 \varrho_3 - y_3 \varrho_2 - y_2 \varrho_2 + y_1 \varrho_2)^2 + \frac{r^4}{\varrho_2^2 \varrho_3^2} (x_3 \varrho_3 - x_1 \varrho_3 - x_1 \varrho_2 + x_2 \varrho_2)^2$$

Zufolge der Gleichungen (8) hat man:

$$s_1^2 = \frac{r^4}{\varrho_2^2 \varrho_3^2} (y_1^2 \sigma_0^2 + x_1^2 \sigma_0^2) = \frac{r^6 \sigma_0^2}{\varrho_2^2 \varrho_3^2}$$

somit ist:

$$s_1 = \frac{r^3 \sigma_0}{\varrho_2 \varrho_3}$$

und ebenso:

$$s_2 = \frac{r^3 \sigma_0}{\varrho_1 \varrho_3} \dots \dots \dots (16)$$

$$s_3 = \frac{r^3 \sigma_0}{\varrho_1 \varrho_2}$$

folglich:

$$\begin{aligned} A_g : B_g : C_g &= \varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 \\ A_{g_1} : B_{g_1} : C_{g_1} &= -\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 \dots \dots \dots (17) \\ A_{g_2} : B_{g_2} : C_{g_2} &= \varrho_1 : -\varrho_2 : \varrho_3 \\ A_{g_3} : B_{g_3} : C_{g_3} &= \varrho_1 : \varrho_2 : -\varrho_3 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Verbindungsline der Punkte  $G_1$  und  $G_2$  ist:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ -\varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \varrho_1, & -\varrho_2, & \varrho_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\frac{A}{\varrho_1} + \frac{B}{\varrho_2} = 0$$

ebenso sind die Gleichungen von  $G_1 G_3$  und  $G_2 G_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{A}{\varrho_1} + \frac{C}{\varrho_3} &= 0 \\ \frac{B}{\varrho_2} + \frac{C}{\varrho_3} &= 0 \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

d. h. Die äusseren Grebe'schen Punkte bilden ein Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des Urdreiecks gehen . . . . . (19)

Die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte  $G$  und  $G_1$  ist:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ -\varrho_1 & \varrho_2, & \varrho_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\frac{B}{\varrho_2} - \frac{C}{\varrho_3} = 0$$

Ebenso sind die Gleichungen  $GG_2$  und  $GG_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{C}{\varrho_3} - \frac{A}{\varrho_1} &= 0 \\ \frac{A}{\varrho_1} - \frac{B}{\varrho_2} &= 0 \end{aligned} \quad . . . . . (20)$$

d. h. Die Verbindungslinie des inneren Grebe'schen Punktes mit je einem äusseren geht durch die entsprechende Ecke des Urdreiecks . . . . . (21)

Aus den Gleichungen (18) und (20) folgt der Satz:

Die in einer Ecke des Dreiecks zusammenstossenden Verbindungslinien der 4 Grebe'schen Punkte trennen die Dreiecksseiten harmonisch . . . . . (22)

Demzufolge liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten der Dreiecke  $ABC$  und  $G_1G_2G_3$  auf einer Geraden, der Polaren des Punktes  $G$ .

Die Gleichung des dem Dreiecke  $ABC$  umschriebenen Kreises ist:

$$AB\varrho_3 + AC\varrho_2 + BC\varrho_1 = 0$$

woraus folgt:

Der Polkegelschnitt des Grebe'schen Punktes ist der Umkreis des Dreiecks . . . . . (23)

Die Gleichungen (18) stellen aber die Tangenten des Umkreises in den Ecken des Dreiecks dar, wodurch sich folgende einfache Construction der Grebe'schen Punkte ergibt:

Zieht man in den Ecken des Dreiecks an den Umkreis die Tangenten, so schneiden sich dieselben in den drei äusseren Grebe'schen Punkten; ihre Verbindungslinien mit den entsprechenden Ecken des Dreiecks liefern als Schnitt den inneren Grebe'schen Punkt.

Da die in den Ecken des Dreiecks an den Umkreis gezogenen Tangenten die gegenüberliegenden Dreiecksseiten in drei Punkten einer Geraden  $P(g)$  schneiden, welches die Dreieckspolare des Grebe'schen Punktes ist, so steht die Verbindungslinie des Umkreiscentrums mit dem Grebe'schen Punkte senkrecht auf der Geraden  $P(g)$ .

Die Dreieckspolaren sämtlicher Punkte des Umkreises gehen durch den Grebe'schen Punkt; und die Dreieckspolaren sämtlicher Punkte der Geraden  $P(g)$  umhüllen einen Kegelschnitt, der die Seiten des Dreiecks in ihren Schnittpunkten mit  $GG_1$ ,  $GG_2$ ,  $GG_3$  berührt.

Da der Mittelpunkt  $J$  des dem Dreiecke einbeschriebenen Kreises mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt, so hat man für seine Coordinaten:

$$A_i : B_i : C_i = 1 : 1 : 1 \dots \dots \dots (24)$$

Die Seiten  $A$  und  $A'$ ,  $B$  und  $B'$ ,  $C$  und  $C'$  der Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  schneiden sich in drei Punkten einer Geraden, welche die Linie der äusseren Aehnlichkeitspunkte der drei dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise ist.

Ihre Gleichung ist einerseits:

$$A + \lambda(B + C) = 0$$

und andersseits:

$$B + \mu(A + C) = 0$$

folglich:

$$A + B + C = 0$$

Wäre Punkt  $O$  ihr Dreieckspol, so müsste ihre Gleichung zusammenfallen mit der Gleichung:

$$AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0 = 0$$

was nur dann der Fall ist, wenn:

$$A_0 : B_0 : C_0 = 1 : 1 : 1$$

d. h. Der Pol der Linie der äusseren Aehnlichkeitspunkte für die drei dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise ist das Inkreiscentrum  $\dots \dots \dots (25)$

Der dem Inkreiscentrum entsprechende Polkegelschnitt hat die Gleichung:

$$AB + BC + CA = 0$$

Für dessen Mittelpunkt hat man die Gleichungen:

$$A(x_2 + x_3) + B(x_1 + x_3) + C(x_1 + x_2) = 0$$

$$A(y_2 + y_3) + B(y_1 + y_3) + C(y_1 + y_2) = 0$$

und somit für dessen Coordinaten:

$$A:B:C = \sigma_1:\sigma_2:\sigma_3$$

Mit Rücklicht auf Gleichung (14) folgt somit:

Der Polkegelschnitt des Inkreiscentrums geht durch die Ecken des Dreiecks  $ABC$ , berührt die Seiten des Dreiecks  $A'B'C'$  der Aussenwinkelhalbirenden und hat den Ähnlichkeitspunkt  $Q$  der Dreiecke  $A'B'C'$  und  $A''B''C''$  zum Mittelpunkt . . . . . (26)

Der dem Inkreiscentrum entsprechende Umhüllungskegelschnitt hat die Gleichung:

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC - 2BC = 0$$

Derselbe berührt die Seiten des Dreiecks  $ABC$  in den Schnittpunkten der Winkelhalbirenden.

Die Coordinaten seines Mittelpunktes  $E$  ergeben sich aus den Gleichungen:

$$A_e(-x_1 + x_2 + x_3) + B_e(x_1 - x_2 + x_3) + C_e(x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

$$A_e(-y_1 + y_2 + y_3) + B_e(y_1 - y_2 + y_3) + C_e(y_1 + y_2 - y_3) = 0$$

so dass:

$$A_e:B_e:C_e = (q_2 + q_3):(q_1 + q_3):(q_1 + q_2) \dots \dots \dots (27)$$

Bildet man nun die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_g & B_g & C_g \\ A_e & B_e & C_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ q_2 + q_3 & q_1 + q_3 & q_1 + q_2 \end{vmatrix}$$

so geht dieselbe durch Addition der Elemente der beiden letzten Horizontalreihen über in:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 + q_2 + q_3 & q_1 + q_2 + q_3 & q_1 + q_2 + q_3 \end{vmatrix}$$

oder nach Unterdrückung des Factors  $(q_1 + q_2 + q_3)$  in:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist aber identisch gleich Null, woraus hervorgeht, dass die Punkte  $J$ ,  $G$  und  $E$  einer und derselben Geraden angehören.

Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_g & B_g & C_g \\ A_e & B_e & C_e \\ A_j & B_j & C_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e_1 + e_2 + e_3 & e_1 - e_2 + e_3 & e_1 + e_2 - e_3 \\ e_2 + e_3 & e_1 + e_3 & e_1 + e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

erhält durch Subtraction der Elemente der beiden ersten Horizontalreihen zwei gleiche Reihen und ist somit identisch Null, weshalb auch die Punkte  $Q$ ,  $E$  und  $G$  einer Geraden angehören.

Sind nun  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  und  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  die Coordinaten zweier Punkte 0 und 1, so hat man für das hierzu harmonische Punktepaar 2, 3 die Gleichungen:

$$\nu A_2 = A_0 + \lambda A_1, \quad \mu A_3 = A_0 - \lambda A_1$$

$$\nu B_2 = B_0 + \lambda B_1, \quad \mu B_3 = B_0 - \lambda B_1$$

$$\nu C_2 = C_0 + \lambda C_1, \quad \mu C_3 = C_0 - \lambda C_1$$

oder:

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_0 + \lambda A_1}{B_0 + \lambda B_1}, \quad \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_0 - \lambda A_1}{B_0 - \lambda B_1}$$

Durch Elimination der Grösse  $\lambda$  aus beiden letzten Gleichungen folgt die Bedingungsgleichung:

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \equiv 0 \quad . . (28)$$

dafür, dass die Punktepaare 0,1 und 2,3 harmonisch sind.

Wählt man nun als Punktepaar 0,1 die Punkte  $G$  und  $E$ , und als Punktepaar 2,3 die Punkte  $J$  und  $Q$ , so wird Gleichung (28):

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_2 + e_3 & e_1 + e_3 \\ -e_1 + e_2 + e_3 & e_1 - e_2 + e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ -e_1 + e_2 + e_3 & e_1 - e_2 + e_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_2 + e_3 & e_1 + e_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_2 + e_3 & e_1 + e_3 \\ -e_1 & -e_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 + e_3 & e_1 + e_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_2 & e_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 + e_3 & e_1 + e_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 + e_3 & e_1 + e_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \end{aligned}$$

d. h. Die vier Punkte  $G$ ,  $E$ ,  $J$  und  $Q$  liegen auf einer und derselben Geraden und sind harmonisch . . . . . (29)



Da der Punkt  $Q$  der Aehnlichkeitspunkt der Dreiecke  $A'B'C'$  und  $A''B''C''$  ist und das Inkreiscentrum  $J$  zugleich der Höhenschnittpunkt im Dreiecke  $A'B'C'$  ist; so muss der Höhenschnittpunkt  $H''$  des Dreiecks  $A''B''C''$  auf der Verbindungslinie  $JQ$  und somit also auf der Linie der vier Punkte  $G, E, J, Q$  liegen.

Die Verbindungslinien der Berührungspunkte des Inkreises und der Dreiecksseiten mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks haben die Gleichungen:

$$BC_1 - CB_1 = 0$$

$$AC_2 - CA_2 = 0$$

$$AB_3 - BA_3 = 0$$

Nun sind aber:

$$A_2 = B_1 = x_1x_2 + y_1y_2 - r^2 = T_{12}$$

$$A_3 = C_1 = x_1x_3 + y_1y_3 - r^2 = T_{13}$$

$$B_3 = C_2 = x_1x_3 + y_2y_3 - r^2 = T_{23}$$

somit werden die Gleichungen obiger Verbindungslinien:

$$BT_{13} - CT_{12} = 0$$

$$CT_{12} - AT_{23} = 0$$

$$AT_{23} - BT_{13} = 0$$

woraus ersichtlich ist, dass die genannten drei Geraden sich in einem und demselben Punkte treffen.

Dessen Coordinatenverhältniss wird nun:

$$A:B:C = \frac{1}{T_{23}} : \frac{1}{T_{13}} : \frac{1}{T_{12}}$$

Es ist aber zufolge der Gleichungen (11):

$$T_{23} = \Sigma_{23} - r^2 = -\frac{r^2(-\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2)}{2\varrho_2\varrho_3} - r^2 = -\frac{r^2\sigma_0\sigma_1}{2\varrho_2\varrho_3}$$

ebenso:

$$T_{13} = -\frac{r^2\sigma_0\sigma_2}{2\varrho_1\varrho_3}$$

$$T_{12} = -\frac{r^2\sigma_0\sigma_3}{2\varrho_1\varrho_2}$$

d. h. Die Verbindungslinien der Berührungspunkte des Inkreises und der Dreiecksseiten mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks

schnneiden sich in einem und demselben Punkte  $L$ , dessen Coordinatenverhältniss ist:

$$A_L : B_L : C_L = \frac{1}{\sigma_1 \varrho_1} : \frac{1}{\sigma_2 \varrho_2} : \frac{1}{\sigma_3 \varrho_3} \dots \dots \dots (30)$$

Die Gleichungen seiner Dreieckspolare, seines entsprechenden Polkegelschnittes und Umbüllungskegelschnittes sind der Reihe nach:

$$P(L) = \sigma_1 \varrho_1 A + \sigma_2 \varrho_2 B + \sigma_3 \varrho_3 C = 0$$

$$\Pi(L) = AB\sigma_1\sigma_2\varrho_1\varrho_2 + AC\sigma_1\sigma_3\varrho_1\varrho_3 + BC\sigma_2\sigma_3\varrho_2\varrho_3 = 0 \dots \dots \dots (31)$$

$$\Phi(L) = \sigma_1^2 \varrho_1^2 A^2 + \sigma_2^2 \varrho_2^2 B^2 + \sigma_3^2 \varrho_3^2 C^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \varrho_1 \varrho_2 AB - 2\sigma_1 \sigma_3 \varrho_1 \varrho_3 AC - 2\sigma_2 \sigma_3 \varrho_2 \varrho_3 BC = 0$$

Verbindet man die Schnittpunkte der Dreiecksseiten  $B$ ,  $C''$  und  $C$ ,  $B''$ ; ebenso  $A$ ,  $C''$  und  $C$ ,  $A''$ ; und  $A$ ,  $B''$  und  $B$ ,  $A''$  und bezeichnet diese Verbindungslinien bezüglich mit  $U$ ,  $V$ ,  $W$  (Fig. 1.), so hat man für  $U$  die identischen Gleichungen:

$$U = \varrho_1 \sigma_2 A + \varrho_2 \sigma_1 B + \varrho_3 \sigma_0 C + \lambda B \equiv \mu(\varrho_1 \sigma_3 A + \varrho_2 \sigma_0 B + \varrho_3 \sigma_1 C) + \nu C = 0$$

folglich:

$$\sigma_2 = \mu \sigma_3$$

$$\varrho_2 \sigma_1 + \lambda = \mu \varrho_2 \sigma_0$$

also:

$$\mu = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \quad \lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \varrho_2 \sigma_0 - \varrho_2 \sigma_1$$

Es wird also die Gleichung von  $U$ :

$$U = \varrho_1 \sigma_2 \sigma_3 A + \varrho_2 \sigma_0 \sigma_2 B + \varrho_3 \sigma_0 \sigma_3 C = 0$$

ebenso:

$$V = \varrho_1 \sigma_0 \sigma_1 A + \varrho_2 \sigma_1 \sigma_3 B + \varrho_3 \sigma_0 \sigma_3 C = 0$$

$$W = \varrho_1 \sigma_0 \sigma_1 A + \varrho_2 \sigma_0 \sigma_2 B + \varrho_3 \sigma_1 \sigma_2 C = 0$$

Für die Verbindungslinie der Schnittpunkte von  $U$  und  $A$ , und  $V$  und  $B$  hat man demnach die identischen Gleichungen:

$$\varrho_1 \sigma_2 \sigma_3 A + \varrho_2 \sigma_0 \sigma_2 B + \varrho_3 \sigma_0 \sigma_3 C + \lambda A = \mu(\varrho_1 \sigma_0 \sigma_1 A + \varrho_2 \sigma_1 \sigma_3 B + \varrho_3 \sigma_0 \sigma_3 C) + \nu B = 0$$

woraus folgt:

$$\varrho_1 \sigma_2 \sigma_3 + \lambda = \mu \varrho_1 \sigma_0 \sigma_1$$

$$\varrho_3 \sigma_0 \sigma_3 = \mu \varrho_3 \sigma_0 \sigma_3$$

also:

$$\mu = 1, \quad \lambda = \varrho_1 \sigma_0 \sigma_1 - \varrho_1 \sigma_2 \sigma_3$$

wodurch obige Gleichung übergeht in:

$$\varrho_1 \sigma_1 A + \varrho_2 \sigma_2 B + \varrho_3 \sigma_3 C = 0$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich aber auch für die Verbindungslinie der Schnittpunkte von  $U$  mit  $A$  und  $W$  mit  $C$ , so dass unter Berücksichtigung von (31) folgt:

Die Geraden  $U, V, W$  schneiden die Dreiecksseiten  $A, B, C$  in drei Punkten einer Geraden  $P(L)$ , welche die Dreieckspolare des Punktes  $L$  ist . . . . . (32)

Setzt man in den Gleichungen (4) statt  $A, B, C$  die Coordinaten des Inkreiscentrums ein, wodurch:

$$\lambda_1 = \mu \varrho_1 \sigma_1, \quad \lambda_2 = \mu \varrho_2 \sigma_2, \quad \lambda_3 = \mu \varrho_3 \sigma_3$$

werden; so folgt für die Gleichung des Inkreises:

$$\varrho_1^2 \sigma_1^2 A^2 + \varrho_2^2 \sigma_2^2 B^2 + \varrho_3^2 \sigma_3^2 C^2 - 2\varrho_1 \varrho_2 \sigma_1 \sigma_2 AB - 2\varrho_1 \varrho_3 \sigma_1 \sigma_3 AC \\ - 2\varrho_2 \varrho_3 \sigma_2 \sigma_3 BC = 0 . . . . . (33)$$

und mit Rücksicht auf (31):

Der dem Punkte  $L$  entsprechende Umhüllungskegelschnitt ist der dem Urdreiecke einbeschriebene Kreis . . . . . (34)

Man verbinde nun den Berührungspunkt des Kreises  $K_1$  (Fig. 2.) und die Seite  $A$  mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte  $a$  und stelle die Gleichung dieser Verbindungslinie fest.

Die Polaren der Ecken  $b$  und  $c$  des Urdreiecks bezüglich des Kreises  $K_1$  gehen durch den Berührungspunkt des Kreises  $K_1$  mit der Seite  $A$ . Ist nun:

$$\lambda_1^2 A^2 + \lambda_2^2 B^2 + \lambda_3^2 C^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 AB - 2\lambda_1 \lambda_3 AC - 2\lambda_2 \lambda_3 BC = 0$$

die Gleichung des Kreises  $K_1$ , wobei nach (4a)

$$\lambda_1 = -\mu \varrho_1 \sigma_0; \quad \lambda_2 = \mu \varrho_2 \sigma_3; \quad \lambda_3 = \mu \varrho_3 \sigma_2$$

so hat man für die Kreispolare irgend eines Punktes  $o$  die Gleichung:

$$\lambda_1 A(\lambda_1 A_0 - \lambda_2 B_0 - \lambda_3 C_0) + \lambda_2 B(-\lambda_1 A_0 + \lambda_2 B_0 - \lambda_3 C_0) \\ + \lambda_3 C(-\lambda_1 A_0 - \lambda_2 B_0 + \lambda_3 C_0) = 0$$

und somit sind die Gleichungen der Kreispolaren der Eckpunkte  $b$  und  $c$ ; indem man hiefür beziehungsweise:

$$A_0 = 0, \quad C_0 = 0 \quad \text{und} \quad A_0 = 0 \quad B_0 = 0$$

zu setzen hat

$$-\lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C = 0$$

und

$$-\lambda_1 A - \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0$$

Jede durch den Berührungspunkt des Kreises  $K_1$  mit der Seite  $A$  gehende Gerade hat also die Gleichung:

$$(-\lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C) + \nu(-\lambda_1 A - \lambda_2 C + \lambda_3 C) = 0$$

und wenn dieselbe ausserdem noch durch die Ecke  $a$  gehen soll, so muss

$$-\lambda_1 A_a - \nu \lambda_1 A_a = 0$$

$$\therefore \nu = -1 \text{ sein.}$$

Es ist also die Gleichung der Verbindungslinie des Berührungspunktes von Kreis  $K_1$  und Seite  $A$  mit Eckpunkt  $a$

$$\frac{\varrho_2}{\sigma_2} B - \frac{\varrho_3}{\sigma_3} C = 0$$

Ebenso hat man für die Verbindungslinien der Ecken  $b$  und  $c$  des Dreiecks mit den auf ihren Gegenseiten liegenden Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise  $K_2$  und  $K_3$  die Gleichungen:

$$\frac{\varrho_3}{\sigma_3} C - \frac{\varrho_1}{\sigma_1} A = 0$$

$$\frac{\varrho_1}{\sigma_1} A - \frac{\varrho_2}{\sigma_2} B = 0$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

Die Verbindungslinien der Eckpunkte des Urdreiecks mit den auf ihren Gegenseiten liegenden Berührungspunkten der dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise schneiden sich in einem und demselben Punkte  $F$  . . . . . (35)

Zugleich hat man für dessen Coordinaten:

$$AF:BF:CF = \frac{\sigma_1}{\varrho_1} : \frac{\sigma_2}{\varrho_2} : \frac{\sigma_3}{\varrho_3}$$

Die Gleichung seiner Dreieckspolaren ist:

$$AB_F \cdot CF + BA_F \cdot CF + CA_F \cdot BF = 0$$

oder:

$$A\varrho_1\sigma_2\sigma_3 + B\varrho_2\sigma_1\sigma_3 + C\varrho_3\sigma_1\sigma_2 = 0$$

Die Gleichung jener Geraden, welche die Schnittpunkte der Dreiecksseiten  $A$  und  $A''$ ;  $B$  und  $B''$  verbindet, ist:

$$\varrho_1\sigma_0 A + \varrho_2\sigma_3 B + \varrho_3\sigma_2 C + \lambda A \equiv \mu(\varrho_1\sigma_3 A + \varrho_2\sigma_0 B + \varrho_3\sigma_1 C) + \nu B = 0$$

folglich:

$$\varrho_1 \sigma_0 + \lambda = \mu \varrho_1 \sigma_2$$

$$\varrho_2 \sigma_3 = \mu \varrho_2 \sigma_0 + \nu$$

$$\varrho_3 \sigma_2 = \mu \varrho_3 \sigma_1$$

woraus

$$\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sigma_3 \varrho_1 - \varrho_1 \sigma_0$$

wird, und somit obige Gleichung übergeht in:

$$A \varrho_1 \sigma_2 \sigma_3 + B \varrho_2 \sigma_1 \sigma_3 + C \varrho_3 \sigma_1 \sigma_2 = 0$$

Dieselbe Gleichung würde sich ergeben für die Linie, welche die Schnittpunkte der Dreiecksseiten  $A$  und  $A''$ ;  $C$  und  $C''$  verbindet, weshalb folgt:

Die entsprechenden Seiten der Dreiecke  $ABC$  und  $A''B''C''$  schneiden sich in drei Punkten einer Geraden, nämlich der Polare des Punktes  $F$  . . . . . (36)

Die Mitten  $a'''$ ,  $b'''$ ,  $c'''$  der Dreiecksseiten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  bilden ein mit dem Urdreiecke ähnliches Dreieck, dessen Inkreiscentrum der Spieker-sche Punkt genannt wird.

Die zu den Seiten  $A$  und  $B$  gehörigen Seitenhalbierungstransversalen haben die Gleichungen:

$$B \varrho_2 - C \varrho_3 = 0$$

$$C \varrho_3 - A \varrho_1 = 0$$

so dass die Gleichung der Seite  $C'''$  des Mittendreiecks  $a'''b'''c'''$  wird:

$$C''' = C \varrho_3 - A \varrho_1 + k B \equiv \lambda (B \varrho_2 - C \varrho_3) + \nu A = 0$$

folglich:

$$\varrho_3 = -\lambda \varrho_2$$

$$- \varrho_1 = \nu$$

$$k = \lambda \varrho_2$$

woraus folgt:

$$k = - \varrho_2$$

somit:

$$C''' = A \varrho_1 + B \varrho_2 - C \varrho_3 = 0$$

ebenso:

$$B''' = A \varrho_1 - B \varrho_2 + C \varrho_3 = 0$$

$$A''' = -A \varrho_1 + B \varrho_2 + C \varrho_3 = 0$$

Bringt man diese Gleichungen mit Rücksicht auf (8) auf die Normalformen, so hat man:

$$C'' = \frac{A\varrho_1 + B\varrho_2 - C\varrho_3}{2\varrho_3 r} = 0$$

$$B'' = \frac{A\varrho_1 - B\varrho_2 + C\varrho_3}{2\varrho_3 r} = 0$$

$$A'' = \frac{-A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3}{2\varrho_1 r} = 0$$

Die Winkelhalbirenden des Dreiecks  $a''b''c''$  haben somit die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho_1 A(\varrho_1 + \varrho_2) - \varrho_2 B(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_3 C(\varrho_1 - \varrho_2) &= 0 \\ -\varrho_1 A(\varrho_3 + \varrho_1) + \varrho_2 B(\varrho_3 - \varrho_1) + \varrho_3 C(\varrho_3 + \varrho_1) &= 0 \\ \varrho_1 A(\varrho_2 - \varrho_3) + \varrho_2 B(\varrho_2 + \varrho_3) - \varrho_3 C(\varrho_2 + \varrho_3) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Winkelhalbirenden schneiden sich im Spieker'schen Punkte  $U$ , dessen Coordinatenverhältniss ist:

$$A_u : B_u : C_u = \frac{\varrho_2 + \varrho_3}{\varrho_1} : \frac{\varrho_3 + \varrho_1}{\varrho_2} : \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_3} \dots \dots (37)$$

Denkt man sich auch noch die Aussenwinkelhalbirenden des Dreiecks  $a''b''c''$  gezogen, so entstehen noch drei äussere Spieker'sche Punkte, welche die Mittelpunkte der dem Dreiecke  $a''b''c''$  anbeschriebenen Kreise sind.

Die Innenwinkelhalbirenden des Dreiecks  $a''b''c''$  gehen durch die Mitten der Dreiecksseiten  $A, B, C$  und sind parallel mit denen des Urdreiecks; stehen also ebenfalls senkrecht auf den Seiten des Dreiecks  $A'B'C'$ .

Jede Dreiecksseite ist aber gemeinschaftliche Tangente von je zwei auf derselben Seite dieser Dreiecksseite liegenden Aussenberührungskreisen, und die Mitte dieser Dreiecksseite des Urdreiecks ist bekanntlich von den Berührungspunkten jener Kreise gleich weit entfernt; woraus nun hervorgeht, dass die Innenwinkelhalbirenden des Dreiecks  $a''b''c''$  zugleich Potenzlinien von je zwei der Aussenberührungskreise  $k_1, k_2, k_3$  sind. Somit folgt der Satz:

Der Spieker'sche Punkt ist der Potenzpunkt der drei dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise . . . . . (38)

Durch ähnliche Betrachtungen gelangt man auch zum Satze:

Jeder äussere Spieker'sche Punkt ist der Potenzpunkt für den Inkreis und für je zwei dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise . (39)

Die Gleichungen der Seitenhalbirungstransversalen des Urdreiecks, die sich bekanntlich im Schwerpunkte  $S$  desselben schneiden, sind:

$$Ae_1 - Be_2 = 0$$

$$Be_2 - Ce_3 = 0$$

$$Ce_3 - Ae_1 = 0$$

woraus sich für  $S$  ergibt:

$$A_S : B_S : C_S = \frac{1}{e_1} : \frac{1}{e_2} : \frac{1}{e_3} \quad \dots \dots \dots (40)$$

Bildet man nun die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Av, & Bu, & Cv \\ Aj, & Bj, & Cj \\ As, & Bs, & Cs \end{vmatrix}$$

oder:

$$\Delta = \lambda \cdot \begin{vmatrix} e_2 + e_3, & e_3 + e_1, & e_1 + e_2 \\ e_1, & e_2, & e_3 \\ 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{e_1}, & \frac{1}{e_2}, & \frac{1}{e_3} \end{vmatrix} = e \begin{vmatrix} e_2 + e_3, & e_3 + e_1, & e_1 + e_2 \\ e_1, & e_2, & e_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

so erhält man durch Addition der Elemente der beiden ersten Horizontalreihen zwei gleiche Reihen, weshalb:

$$\Delta \equiv 0 \text{ ist.}$$

Für die Determinante:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} Aj, & Bj, & Cj \\ As, & Bs, & Cs \\ Af, & Bf, & Cf \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{e_1}, & \frac{1}{e_2}, & \frac{1}{e_3} \\ \frac{\sigma_1}{e_1}, & \frac{\sigma_2}{e_2}, & \frac{\sigma_3}{e_3} \end{vmatrix} = \mu \cdot \begin{vmatrix} e_1, & e_2, & e_3 \\ 1, & 1, & 1 \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

erhält man ebenfalls durch Addition der doppelten Elemente der ersten Horizontalreihe zu denen der letztern zwei gleiche Reihen, weshalb auch:

$$\Delta' = 0 \text{ ist.}$$

d. h. Die Punkte  $J$ ,  $U$ ,  $S$ ,  $F$  liegen auf einer und derselben Geraden.

Betrachtet man nun die Punkte  $J$  und  $U$  als Punktpaar 0,1 und die Punkte  $S$  und  $F$  als Punktpaare 2,3, so hat man zufolge (28):

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{matrix} A_J & B_J \\ A_S & B_S \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} A_U & B_U \\ A_F & B_F \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} A_S & B_S \\ A_F & B_F \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} A_U & B_U \\ A_S & B_S \end{matrix} \right| = \\
& = \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{e_1} & \frac{1}{e_2} \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} \frac{e_2+e_3}{e_1} & \frac{e_1+e_3}{e_2} \\ \frac{\sigma_1}{e_1} & \frac{\sigma_2}{e_2} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ \frac{\sigma_1}{e_1} & \frac{\sigma_2}{e_2} \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} \frac{e_2+e_3}{e_1} & \frac{e_1+e_3}{e_2} \\ \frac{1}{e_1} & \frac{1}{e_2} \end{matrix} \right| = \\
& = k \cdot \left( \left| \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ e_2+e_3 & e_1+e_3 \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ e_2+e_3 & e_1+e_3 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right| \right) \equiv 0
\end{aligned}$$

Somit der Satz:

Das Inkreiscentrum, der Spieker'sche Punkt, der Schwerpunkt und der Punkt  $F$  des Urdreiecks liegen auf einer und derselben Geraden und sind harmonisch. . . . . (41)

Da aber der Schwerpunkt des Urdreiecks zugleich der Aehnlichkeitspunkt für dieses und das Dreieck  $A''B''C''$  ist, ferner  $J$  und  $U$  homologe Punkte beider Dreiecke sind, deren Seiten im Verhältnisse 1:2 stehen, so muss auch der Schwerpunkt  $S$  die Strecke  $JU$  im Verhältnisse 1:2 teilen.

Weil aber:

$$\begin{aligned}
(JUSF) &= -1 \\
\frac{JS}{US} : \frac{JF}{UF} &= -1
\end{aligned}$$

so ist auch:

$$\frac{UF}{JF} = \frac{1}{2}$$

d. h. Der Spieker'sche Punkt liegt in der Mitte zwischen den Punkten  $J$  und  $F$ .

Aus obigen Gründen ist aber auch der Radius des Spieker'schen Kreises halb so gross wie der Inkreisradius, woraus folgt:

Die Punkte  $S$  und  $F$  sind die Aehnlichkeitspunkte des Inkreises und Spieker'schen Kreises . . . . . (42)

Der dem Dreiecke  $a''b''c''$  umschriebene Kreis wird der Neunpunktkreis des Urdreiecks genannt, dessen Gleichung nun im Folgenden festzustellen ist.

Die Seiten des Dreiecks  $a''b''c''$  haben nach Früherem die Gleichungen:



$$C''' = A\varrho_1 + B\varrho_2 - C\varrho_3 = 0$$

$$B''' = A\varrho_1 - B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$

$$A''' = -A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$

Für den Ausdruck  $A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3$  hat man aber:

$$A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = x(x_1\varrho_1 + x_2\varrho_2 + x_3\varrho_3) + y(y_1\varrho_1 + y_2\varrho_2 + y_3\varrho_3) - r^2(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) = -r^2\sigma_0$$

Zufolge der Gleichungen (8) lässt sich also dieser Ausdruck als eine von den variablen Grössen  $x$  und  $y$  unabhängige Grösse darstellen, die der Kürze halber mit  $2w$  bezeichnet werde.

Die Gleichung:

$$A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$

stellt also, wie auch aus Satz (33) über Pol und Polare des Dreiecks hervorginge, die unendlich ferne Gerade der Ebene dar.

Jeder durch die Ecken des Dreiecks  $a'''b'''c'''$  gehende Kegelschnitt hat aber die Gleichung:

$$\lambda_1 B''' C''' + \lambda_2 A''' C''' + \lambda_3 A''' B''' = 0$$

oder:

$$A^2\varrho_1^2(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) + B^2\varrho_2^2(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) + C^2\varrho_3^2(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) + 2BC\lambda_1\varrho_2\varrho_3 + 2AC\lambda_2\varrho_1\varrho_3 + 2AB\lambda_3\varrho_1\varrho_2 = 0$$

Da aber auch:

$$C''' = w - C\varrho_3 = 0$$

$$B''' = w - B\varrho_2 = 0$$

$$A''' = w - A\varrho_1 = 0$$

so hat man für die erstere Gleichung:

$$\lambda_1(B\varrho_2 - w)(C\varrho_3 - w) + \lambda_2(A\varrho_1 - w)(C\varrho_3 - w) + \lambda_3(A\varrho_1 - w)(B\varrho_2 - w) = 0$$

Damit der durch diese Gleichung dargestellte Kegelschnitt ein Kreis sei, müssen die Coefficienten der Grössen  $x^2$  und  $y^2$  einander gleich und der Coefficient von  $x.y$  gleich Null sein, weshalb man die Gleichungen erhält:

$$\lambda_1\varrho_2\varrho_3(x_2x_3 - y_2y_3) + \lambda_2\varrho_1\varrho_3(x_1x_3 - y_1y_3) + \lambda_3\varrho_1\varrho_2(x_1x_2 - y_1y_2) = 0$$

$$\lambda_1\varrho_2\varrho_3(x_2y_3 + y_2x_3) + \lambda_2\varrho_1\varrho_3(x_1y_3 + y_1x_3) + \lambda_3\varrho_1\varrho_2(x_1y_2 + y_1x_2) = 0$$

woraus sich ergibt:

$$\lambda_1\varrho_2\varrho_3 = k \cdot \begin{vmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_3 + x_3y_1 & x_1y_2 + x_2y_1 \end{vmatrix}$$

Entwickelt und vereinfacht man diese Determinante und verfährt ebenso für die Grössen  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$ , so folgt:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = e_1^2 : e_2^2 : e_3^2$$

Somit hat man nach (11):

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &= \mu(e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) = \frac{2\mu e_2 e_3 \Sigma_{23}}{r^2} \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= \mu(-e_1^2 + e_2^2 - e_3^2) = \frac{2\mu e_1 e_3 \Sigma_{13}}{r^2} \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= \mu(-e_1^2 - e_2^2 + e_3^2) = \frac{2\mu e_1 e_2 \Sigma_{12}}{r^2}\end{aligned}$$

Es wird also die Gleichung des Neunpunktkreises:

$$A^2 e_1 \Sigma_{23} + B^2 e_2 \Sigma_{13} + C^2 e_3 \Sigma_{12} + BC e_1 r^2 + AC e_2 r^2 + AB e_3 r^2 = 0 \quad (43)$$

Differentiirt man diese Gleichung partiell nach  $x$  und  $y$ , so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}A(2x_1 e_1 \Sigma_{23} + x_3 e_2 r^2 + x_2 e_3 r^2) + B(2x_2 e_2 \Sigma_{13} + x_3 e_1 r^2 + x_1 e_3 r^2) \\ + C(2x_3 e_3 \Sigma_{12} + x_1 e_2 r^2 + x_2 e_1 r^2) = 0 \\ A(2y_1 e_1 \Sigma_{23} + y_3 e_2 r^2 + y_2 e_3 r^2) + B(2y_2 e_2 \Sigma_{13} + y_3 e_1 r^2 + y_1 e_3 r^2) \\ + C(2y_3 e_3 \Sigma_{12} + y_1 e_2 r^2 + y_2 e_1 r^2) = 0\end{aligned}$$

aus denen die Coordinaten des Neunpunktkreiscentrums  $N$  sich ergeben.

Schreibt man obige Gleichungen der Kürze halber:

$$\begin{aligned}A\alpha_0 + B\beta_0 + C\gamma_0 &= 0 \\ A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 &= 0\end{aligned}$$

so hat man:

$$A_N : B_N : C_N = (\beta_0 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_0) : (\gamma_0 \alpha_1 - \gamma_1 \alpha_0) : (\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0)$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 2x_1 e_1 \Sigma_{23} + x_3 e_2 (x_2^2 + y_2^2) + x_2 e_3 (x_3^2 + y_3^2) \\ \alpha_0 &= 2x_1 e_1 \Sigma_{23} + x_2 x_3 (x_2 e_2 + x_3 e_3) + x_3 e_2 y_2^2 + x_2 e_3 y_3^2 \\ \alpha_0 &= 2x_1 e_1 \Sigma_{23} - x_1 x_2 x_3 e_1 + x_3 y_2 (-y_1 e_1 - y_3 e_3) + x_2 e_3 y_3^2 \\ \alpha_0 &= 2x_1 e_1 \Sigma_{23} - x_1 x_2 x_3 e_1 - x_3 y_1 y_2 e_1 + y_3 e_3 (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ \alpha_0 &= e_1 (2x_1 \Sigma_{23} - x_1 x_2 x_3 - x_3 y_1 y_2 + x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3) \\ \alpha_0 &= e_1 (x_1 \Sigma_{23} - y_2 e_2 + y_3 e_3)\end{aligned}$$

ebenso:

$$\beta_0 = e_2(x_3 \Sigma_{13} - y_3 e_3 + y_1 e_1)$$

$$\gamma_0 = e_3(x_3 \Sigma_{12} - y_1 e_1 + y_2 e_2)$$

Die Grössen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  erhält man aus den Grössen  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  mit Ausserachtlassung des Vorzeichens durch Vertauschung der Grössen  $x$  und  $y$ , da aber hierbei die Ausdrücke  $e_1, e_2, e_3$  ihr Vorzeichen ändern, so hat man:

$$\alpha_1 = e_1(y_1 \Sigma_{23} + x_2 e_2 - x_3 e_3)$$

$$\beta_1 = e_2(y_2 \Sigma_{13} + x_3 e_3 - x_1 e_1)$$

$$\gamma_1 = e_3(y_3 \Sigma_{12} + x_1 e_1 - x_2 e_2)$$

Durch zweckmässige Umformung erhält man nun:

$$A_N : B_N : C_N = (e_2 e_3 + \Sigma_{12} \Sigma_{13}) : (e_1 e_3 + \Sigma_{12} \Sigma_{23}) : (e_1 e_2 + \Sigma_{13} \Sigma_{23}) . \quad (44)$$

Nun hat man nach Früheren (über Pol und Polare des Dreiecks) für den Höhenschnittpunkt  $H$  des Urdreiecks:

$$A_H : B_H : C_H = \frac{1}{\Sigma_{23}} : \frac{1}{\Sigma_{13}} : \frac{1}{\Sigma_{12}} \quad . . . . . (45)$$

und für den Umkreismittelpunkt  $M$  desselben Dreiecks

$$A_U : B_U : C_U = \Sigma_{23} : \Sigma_{13} : \Sigma_{12} \quad . . . . . (46)$$

Bildet man nun die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_N & B_N & C_N \\ A_H & B_H & C_H \\ A_S & B_S & C_S \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} e_2 e_3 + \Sigma_{12} \Sigma_{13} & e_1 e_3 + \Sigma_{12} \Sigma_{23} & e_1 e_2 + \Sigma_{13} \Sigma_{23} \\ \Sigma_{12} \Sigma_{13} & \Sigma_{13} \Sigma_{23} & \Sigma_{13} \Sigma_{23} \\ e_2 e_3 & e_1 e_3 & e_1 e_2 \end{vmatrix}$$

so ist ersichtlich, dass  $\Delta \equiv 0$  ist, woraus hervorgeht, dass die Punkte  $N, H$  und  $S$  einer Geraden angehören.

Früher wurde bewiesen, dass auch die Punkte  $M, S$  und  $H$  auf einer und derselben Geraden liegen und:

$$\frac{MS}{SH} = \frac{1}{2}$$

Da aber das Neunpunktkreiscentrum und Umkreiscentrum homologe Punkte der ähnlichen Dreiecke  $ABC$  und  $A'''B'''C'''$  sind, deren Ähnlichkeitspunkt  $S$  ist, so ist auch:

$$\frac{SN}{MS} = \frac{1}{2}$$

Es ergibt sich somit:

Die Punkte  $M, S, N$  und  $H$  liegen auf einer und derselben Geraden und sind harmonisch . . . . . (47)

Ferner folgt:

Der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt des Urdreiecks, sind Aehnlichkeitspunkte des Umkreises und Nennpunktkreises. (48)

Die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes  $\alpha'$  mit dem Berührungspunkte 1 der Seite  $A$  und des Inkreises, hat die Gleichung:

$$B' + kC' = 0$$

oder:

$$A + C + k(A + B) = 0$$

oder:

$$A_1 + C_1 + k(A_1 + B_1) = 0$$

weshalb:

$$k = -\frac{C_1}{B_1} = -\frac{T_{13}}{T_{12}}$$

Man hat somit für diese Gerade die Gleichung:

$$\frac{B'}{T_{13}} - \frac{C'}{T_{12}} = 0$$

und ebenso für die Verbindungslinien der Mittelpunkte  $\beta'$  und  $\gamma'$  mit den Berührungspunkten 2 und 3:

$$\frac{C'}{T_{12}} - \frac{A'}{T_{23}} = 0$$

$$\frac{A'}{T_{23}} - \frac{B'}{T_{13}} = 0$$

woraus hervorgeht:

Die Verbindungslinien der Mittelpunkte der dem Urdreieck anbeschriebenen Kreise mit den Berührungspunkten des Inkreises und der von jenen Kreisen direct berührten Dreiecksseiten, schneiden sich in einem und demselben Punkte  $D$  . . . . . (49)

Für dessen Coordinaten ergibt sich:

$$AD' = \lambda T_{23}, \quad BD' = \lambda T_{13}, \quad CD' = \lambda T_{12}$$

oder:

$$BD + CD = \lambda T_{23}, \quad AD + CD = \lambda T_{13}, \quad AD + BD = \lambda T_{12}$$

$$AD:BD:CD = (-T_{23} + T_{31} + T_{12}) : (T_{23} - T_{31} + T_{12}) : (T_{23} + T_{31} - T_{12})$$

da nun:

$$T_{23} = -\frac{r^2 \sigma_0 \sigma_1}{\rho_2 \rho_3}, \quad T_{31} = -\frac{r^2 \sigma_0 \sigma_2}{\rho_1 \rho_3}, \quad T_{12} = -\frac{r^2 \sigma_0 \sigma_3}{\rho_1 \rho_2}$$

so hat man:

$$AD:BD:CD = \frac{1}{\sigma_1} : \frac{1}{\sigma_2} : \frac{1}{\sigma_3} \dots \dots \dots (50)$$

Die Verbindungslinie der Ecke  $a''$  des Dreiecks  $A''B''C''$  mit dem auf der Seite  $A$  liegenden Berührungspunkte 1 des Inkreises hat die Gleichung:

$$B'' + kC'' = 0$$

oder:

$$(e_1\sigma_3A + e_2\sigma_0B + e_3\sigma_1C) + k(e_1\sigma_2A + e_2\sigma_1B + e_3\sigma_0C) = 0$$

Nun ist aber:

$$(e_1\sigma_3A_1 + e_2\sigma_0B_1 + e_3\sigma_1C_1) + k(e_1\sigma_2A_1 + e_2\sigma_1B_1 + e_3\sigma_0C_1) \equiv 0$$

woraus folgt, da wieder  $B_1 = T_{12}$ ,  $C_1 = T_{13}$  und  $A_1 = 0$  ist:

$$k = -\frac{\sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2}{\sigma_0\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3} = -\frac{4e_1e_2}{4e_1e_3} = -\frac{e_2}{e_3}$$

Also geht obige Gleichung über in:

$$\frac{B''}{e_3} - \frac{C''}{e_3} = 0$$

Ebenso folgt für die Gleichungen der Verbindenden der Ecken  $b''$  und  $c''$  mit den Berührungspunkten 2 und 3:

$$\frac{C''}{e_3} - \frac{A''}{e_1} = 0$$

$$\frac{A''}{e_1} - \frac{B''}{e_2} = 0$$

Es ergibt sich also der Satz:

Die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks  $A''B''C''$  mit den entsprechenden Berührungspunkten des Inkreises und den Seiten des Urdreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte  $K$ . (51)

Die Gleichungen jener Verbindungslinien sind aber:

$$\begin{aligned} e_1\sigma_1A(e_2 - e_3) + e_2\sigma_2B(e_2 + e_3) - e_3\sigma_3C(e_2 + e_3) &= 0 \\ -e_1\sigma_1A(e_3 + e_1) + e_2\sigma_2B(e_3 - e_1) + e_3\sigma_3C(e_3 + e_1) &= 0 \\ e_1\sigma_1A(e_1 + e_2) - e_2\sigma_2B(e_1 + e_2) + e_3\sigma_3C(e_1 - e_2) &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Coordinaten des Punktes  $K$ :

$$A_k:B_k:C_k = \frac{e_2 + e_3}{e_1\sigma_1} : \frac{e_1 + e_3}{e_2\sigma_2} : \frac{e_1 + e_2}{e_3\sigma_3} \dots \dots \dots (52)$$

Da nach Früheren die Punkte  $U$ ,  $J$  und  $S$  einer Geraden angehören, so ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{e_2+e_3}{e_1}, & \frac{e_1+e_3}{e_2}, & \frac{e_1+e_2}{e_3} \\ 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{e_1}, & \frac{1}{e_2}, & \frac{1}{e_3} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Dividirt man nun die Elemente der ersten Verticalreihe mit  $\sigma_1$ , die der zweiten mit  $\sigma_2$  und die der dritten mit  $\sigma_3$ , so folgt:

$$\begin{vmatrix} A_k, & B_k, & C_k \\ A_D, & B_D, & C_D \\ A_L, & B_L, & C_L \end{vmatrix} \equiv 0$$

d. h. Die Punkte  $k$ ,  $D$  und  $L$  liegen auf einer und derselben Geraden.

Weil aber auch die Punkte  $J$ ,  $S$ ,  $T$  einer Geraden angehören, so hat man:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{e_1}, & \frac{1}{e_2}, & \frac{1}{e_3} \\ \frac{\sigma_1}{e_1}, & \frac{\sigma_2}{e_2}, & \frac{\sigma_3}{e_3} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Diese Determinante geht aber, indem man mit  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , die Elemente der ersten, zweiten und dritten Verticalreihe dividirt über in:

$$\begin{vmatrix} A_D, & B_D, & C_D \\ A_L, & B_L, & C_L \\ A_S, & B_S, & C_S \end{vmatrix} \equiv 0$$

d. h. Die Punkte  $D$ ,  $L$  und  $S$  gehören ebenfalls einer und derselben Geraden an:

Betrachtet man nun die Punkte  $D$  und  $k$  als das Punktepaar 0,1,  $L$  und  $S$  als das Punktepaar 2,3, so hat man nach (28):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1}, & \frac{1}{\sigma_2} \\ \frac{1}{\sigma_1 e_1}, & \frac{1}{\sigma_2 e_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{e_2+e_3}{\sigma_1 e_1}, & \frac{e_1+e_3}{\sigma_2 e_2} \\ \frac{1}{e_1}, & \frac{1}{e_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1}, & \frac{1}{\sigma_2} \\ \frac{1}{e_1}, & \frac{1}{e_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{e_1+e_3}{\sigma_1 e_1}, & \frac{e_2+e_3}{\sigma_2 e_2} \\ \frac{1}{\sigma_1 e_1}, & \frac{1}{\sigma_2 e_2} \end{vmatrix}$$

$$\varrho_1^2 \varrho_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varrho_2 & \varrho_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varrho_2 + \varrho_3 & \varrho_1 + \varrho_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varrho_2 + \varrho_3 & \varrho_1 + \varrho_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \Delta}{\varrho_1 - \varrho_2} \doteq 0 \quad \text{oder: } \Delta \equiv 0$$

Hieraus folgt:

Die Punkte  $D$ ,  $K$ ,  $L$  und  $S$  liegen auf einer und derselben Geraden und sind harmonisch . . . . . (53)

Da alle Kreise durch die unendlich fernen Kreispunkte hindurchgehen, deren Verbindungslinie nach Früheren die Gleichung

$$A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$

besitzt; so kann man, wenn  $K' = 0$  und  $K'' = 0$  die Gleichungen zweier Kreise vorstellen, stets setzen:

$$K' - \mu K'' = (A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3) \cdot (A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0$$

worin alsdann:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

die Gleichung der Potenzglieder beider Kreise bedeuten muss.

Zur Bestimmung der Grössen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\mu$  erhielt man nun allerdings sechs Gleichungen; wovon aber zwei nur die schon vorausgesetzte Bedingung enthalten, dass  $K' = 0$  und  $K'' = 0$  Kreisgleichungen sind, so dass also in Wirklichkeit die zu suchenden Grössen unzweideutig bestimmt werden können.

Nun ist nach (33) die Gleichung des Inkreises:

$$K_I = A^2 \varrho_1^2 \sigma_1^2 + B^2 \varrho_2^2 \sigma_2^2 + C^2 \varrho_3^2 \sigma_3^2 - 2AB\varrho_1 \varrho_2 \sigma_1 \sigma_2 - 2AC\varrho_1 \varrho_3 \sigma_1 \sigma_3 - 2BC\varrho_2 \varrho_3 \sigma_2 \sigma_3 = 0$$

und nach Früheren die Gleichung des Umkreises:

$$K_M = AB\varrho_3 + AC\varrho_2 + BC\varrho_1 = 0$$

Setzt man nun:

$$K_M + \mu K_I = (A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3)(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0$$

so hat man durch Gleichsetzung der Coefficienten von  $A^2$ ,  $B^2$  und  $C^2$

$$\varrho_1 \alpha = \mu \varrho_1^2 \sigma_1, \quad \varrho_2 \beta = \mu \varrho_2^2 \sigma_2, \quad \varrho_3 \gamma = \mu \varrho_3^2 \sigma_3$$

Es ist also:

$$A\varrho_1\sigma_1^2 + B\varrho_2\sigma_2^2 + C\varrho_3\sigma_3^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (54)$$

die Gleichung der Potenzlinie für den Umkreis und Inkreis des Urdreiecks.

Die Linie der äusseren Aehnlichkeitspunkte der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise hat bekanntlich die Gleichung:

$$A + B + C = 0$$

und es ist nun leicht zu zeigen, dass diese Gerade, die unendlich ferne Gerade und die Potenzlinie des Umkreises und Inkreises sich in einem und demselben Punkte schneiden; denn die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varrho_1\sigma_1^2 & \varrho_2\sigma_2^2 & \varrho_3\sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix} = \mu \cdot \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \frac{1}{\varrho_1} & \frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

geht durch Addition der  $-\sigma_0^2$ -fachen Elemente der letzten Horizontalreihe zu denen der ersten Reihe über in:

$$\Delta = k \cdot \begin{vmatrix} \varrho_2\varrho_3 & \varrho_1\varrho_3 & \varrho_1\varrho_2 \\ \frac{1}{\varrho_1} & \frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

folglich:

$$\Delta \equiv 0$$

d. h. Die Potenzlinie des Um- und Inkreises ist parallel mit der Linie der äusseren Aehnlichkeitspunkte der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise  $\dots \dots \dots (55)$

Bestimmt man auf ähnliche Weise die Gleichung der Potenzlinie für den Umkreis und für einen der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise, indem man setzt:

$$K_M + \lambda K_1 = (A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3) \cdot (A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0$$

so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) für:

$$\alpha = \lambda\varrho_1\sigma_0^2$$

$$\beta = \lambda\varrho_2\sigma_2^2$$

$$\gamma = \lambda\varrho_3\sigma_3^2$$

und somit für die Gleichung jener Potenzlinie:

$$P' = A\varrho_1\sigma_0^2 + B\varrho_2\sigma_2^2 + C\varrho_3\sigma_3^2 = 0$$



Ebenso hat man für die Potenzlinien der Kreise  $K_M$  und  $K_2$ ,  $K_M$  und  $K_3$  die Gleichungen:

$$P'' = A\varrho_1\sigma_3^2 + B\varrho_2\sigma_0^2 + C\varrho_3\sigma_1^2 = 0$$

$$P''' = A\varrho_1\sigma_2^2 + B\varrho_2\sigma_1^2 + C\varrho_3\sigma_0^2 = 0$$

Es ist nun leicht zu zeigen, dass die Gerade  $P'$ , die unendlich ferne Gerade und die Verbindungslinie der auf den Dreiecksseiten  $B$  und  $C$  liegenden Schnittpunkte der Innenwinkelhalbirenden sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Denn, da die Gleichung der letzteren Geraden:

$$-A + B + C = 0$$

ist, und die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varrho_1\sigma_0^2 & \varrho_2\sigma_3^2 & \varrho_3\sigma_2^2 \\ -1 & 1 & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_3^2 & \sigma_2^2 \\ -\frac{1}{\varrho_1} & \frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

durch Subtraction der  $\sigma_0^2$ -fachen Elemente der letzten Horizontalreihe von denen der ersten Reihe übergeht in

$$\Delta = k' \cdot \begin{vmatrix} 0 & (\varrho_1 + \varrho_2)\varrho_3 & (\varrho_1 + \varrho_3)\varrho_2 \\ -\frac{1}{\varrho_1} & \frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

so ergibt sich leicht, dass:

$$\Delta \equiv 0$$

Es ist somit die Potenzlinie  $P'$  parallel mit der Verbindungslinie der auf den Seiten  $B$  und  $C$  liegenden Schnittpunkte der Innenwinkelhalbirenden.

Oder: Die Potenzlinien für den Umkreis und je einen der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise bilden ein Dreieck, das ähnlich und ähnlichliegend ist mit dem Dreiecke, welches von den Schnittpunkten der Innenwinkelhalbirenden und Dreiecksseiten gebildet wird. . . . . (56)

Da aber die Potenzlinie zweier Kreise auf ihrer Centrale senkrecht steht, so ergibt sich zugleich der Satz:

Errichtet man von den Mittelpunkten der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise Senkrechte auf die entsprechenden Verbindungslinien der auf den Dreiecksseiten liegenden Schnittpunkte der Innenwinkelhalbirenden, so treffen sich dieselben in einem und demselben Punkte, dem Mittelpunkte des Umkreises. . . . . (57)

Die Gleichung des Neunpunktkreises ist:

$$K_N = A^2 \varrho_1 \Sigma_{23} + B^2 \varrho_2 \Sigma_{13} + C^2 \varrho_3 \Sigma_{12} + BC \varrho_1 r^2 + AC \varrho_2 r^2 + AB \varrho_3 r^2 = 0$$

Setzt man nun:

$$K_M + \lambda K_N = (A \varrho_1 + B \varrho_2 + C \varrho_3) \cdot (A \alpha + B \beta + C \gamma) = 0$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha = \lambda \Sigma_{23}, \quad \beta = \lambda \Sigma_{13}, \quad \gamma = \lambda \Sigma_{12}$$

so hat man für die Gleichung der Potenzlinie dieser beiden Kreise:

$$A \Sigma_{23} + B \Sigma_{13} + C \Sigma_{12} = 0$$

d. h. Die Potenzlinie des Umkreises und Neunpunktkreises ist die Höhenschnittspolare des Urdreiecks und steht somit senkrecht auf der Centrale beider Kreise. . . . . (58)

Setzt man nun:

$$K_J + \lambda K_N = (A \varrho_1 + B \varrho_2 + C \varrho_3) \cdot (A \alpha + B \beta + C \gamma)$$

woraus:

$$\alpha = \sigma_1^2 \varrho_1 + \lambda \Sigma_{23}$$

$$\beta = \sigma_2^2 \varrho_2 + \lambda \Sigma_{13}$$

$$\gamma = \sigma_3^2 \varrho_3 + \lambda \Sigma_{12}$$

$$\lambda \varrho_3 r^2 = \varrho_1 \beta + \varrho_2 \alpha + 2 \varrho_1 \varrho_2 \sigma_1 \sigma_2$$

so folgt:

$$\lambda = \frac{2 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}{r^2}$$

und somit:

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_3} : \frac{\varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_1} : \frac{\varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_2}$$

so dass also die Gleichung der Potenzlinie für den Inkreis und Neunpunktkreis wird:

$$T = A \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_3} + B \frac{\varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_1} + C \frac{\varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_2} = 0 \quad . . . (59)$$

Verschafft man sich nun zur Geraden  $T$  den Inkreispol  $o$ , indem man die Grössen  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  so bestimmt, dass die Gleichung

$$A \varrho_1 \sigma_1 (-A_0 \varrho_1 \sigma_1 + B_0 \varrho_2 \sigma_2 + C_0 \varrho_3 \sigma_3) + B \varrho_2 \sigma_2 (A_0 \varrho_1 \sigma_1 - B_0 \varrho_2 \sigma_2 + C_0 \varrho_3 \sigma_3) + C \varrho_3 \sigma_3 (A_0 \varrho_1 \sigma_1 + B_0 \varrho_2 \sigma_2 - C_0 \varrho_3 \sigma_3) = 0$$

der Inkreispolaren des Punktes  $o$ , zusammenfällt mit der Gleichung der Geraden  $T$ , so dass also:

$$-A_0 \varrho_1 \sigma_1 + B_0 \varrho_2 \sigma_2 + C_0 \varrho_3 \sigma_3 = \frac{k}{\sigma_1 (\varrho_2 - \varrho_3)}$$

$$A_0 e_1 \sigma_1 - B_0 e_2 \sigma_2 + C_0 e_3 \sigma_3 = \frac{k}{\sigma_2(e_3 - e_1)}$$

$$A_0 e_1 \sigma_1 + B_0 e_2 \sigma_2 - C_0 e_3 \sigma_3 = \frac{k}{\sigma_3(e_1 - e_2)}$$

so erhält man für die Coordinaten des Punktes  $o$  die Beziehung:

$$A_0 : B_0 : C_0 = (e_2 - e_3)^2 \frac{\sigma_1}{e_1} : (e_3 - e_1)^2 \frac{\sigma_2}{e_2} : (e_1 - e_2)^2 \frac{\sigma_3}{e_3}$$

Würde man diese Coordinaten in die Gleichung der Geraden  $T$  einsetzen, so erhielte man nach Unterdrückung eines constanten Factors den Ausdruck:

$$\sigma_1(e_2 - e_3) + \sigma_2(e_3 - e_1) + \sigma_3(e_1 - e_2)$$

Da derselbe aber identisch gleich Null ist, so folgt, dass der Punkt  $o$  der Geraden  $T$  selbst angehört und diese somit Tangente des Inkreises ist. Es ergibt sich also der Satz:

Der Inkreis und Neunpunktkreis berühren sich, und ihre gemeinschaftliche Tangente hat die Gleichung:  $T = 0$ . . . . . (60)

Nun zeigt sich aber, wenn man die Coordinaten des unendlich fernen Punktes der Dreieckspolaren des Punktes  $L$  durch Auflösung der Gleichungen:

$$\begin{aligned} A e_1 \sigma_1 + B e_2 \sigma_2 + C e_3 \sigma_3 &= 0 \\ A e_1 + B e_2 + C e_3 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt, woraus

$$A : B : C = \frac{e_2 - e_3}{e_1} : \frac{e_3 - e_1}{e_2} : \frac{e_1 - e_2}{e_3} \quad . . . . . (60a)$$

folgt, dass die Dreieckspolare dieses Punktes die Gleichung:

$$T = 0 \text{ hat.}$$

d. h. Die gemeinschaftliche Tangente des Inkreises und Neunpunktkreises ist die Dreieckspolare des unendlich fernen Punktes der Dreieckspolaren von  $L$ . . . . . (61)

Nach den Sätzen über Pol und Polare des Dreiecks folgt zugleich noch:

Die gemeinschaftliche Tangente des Inkreises und Neunpunktkreises ist auch Tangente desjenigen Kegelschnittes  $\Phi(s)$ , der die Dreiecksseiten in ihren Mitten berührt und den Schwerpunkt  $S$  des Urdreiecks zum Mittelpunkt hat. . . . . (62)

Durchschneidet man die Seiten eines Dreiecks mit irgend einer Geraden in den Punkten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , so liegen die Mitten der Verbindungslinien  $a\alpha$ ,  $b\beta$ ,  $c\gamma$  auf einer und derselben Geraden, die man die Gauss'sche Gerade nennen kann.

Fasst man die schneidende Gerade als Dreieckspolare eines Punktes  $O$  auf, so hat sie die Gleichung:

$$AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0 = 0$$

Für die Linie  $a\alpha$  hat man somit die identischen Gleichungen:

$$B + \lambda C \equiv kA + \mu(AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0) = 0$$

folglich:

$$1 = \mu A_0C_0, \quad \lambda = \mu A_0B_0, \quad 0 = k + \mu B_0C_0$$

$$\lambda = \frac{B_0}{C_0}$$

und somit ist die Gleichung von  $a\alpha$ :

$$BC_0 + CB_0 = 0$$

Denkt man sich durch den Eckpunkt  $c$  des Urdreiecks eine Parallele zu  $a\alpha$  und hierzu bezüglich der in  $c$  zusammenstossenden Dreiecksseiten die vierte harmonische Gerade gezogen, so schneidet letztere die Verbindungslinie  $a\alpha$  in deren Mitte.

Die durch die Ecke  $c$  gehende Gerade hat aber zunächst die Gleichung:

$$A + \nu B = 0$$

und da sie parallel zu  $a\alpha$  sein soll:

$$\frac{x_1 + \nu x_2}{y_1 + \nu y_2} = \frac{x_2C_0 + x_3B_0}{y_2C_0 + y_3B_0}$$

folglich:

$$\nu = \frac{e_2B_0 - e_3C_0}{e_1B_0}$$

Die durch die Mitte von  $a\alpha$  und Ecke  $c$  gehende Gerade hat somit die Gleichung:

$$A - \nu B = 0$$

oder:

$$Ae_1B_0 + B(e_3C_0 - e_2B_0) = 0$$

Die Verbindungslinie  $b\beta$  hat die Gleichung:

$$AC_0 + CA_0 = 0$$

Zieht man nun durch die Ecke  $a$  eine Gerade parallel zu  $b\beta$  und hierzu bezüglich der in  $a$  zusammenstossenden Dreiecksseiten die

vierte harmonische Gerade, so geht letztere ebenfalls durch die Mitte von  $b\beta$ .

Die durch die Ecke  $a$  gehende Gerade hat aber zunächst die Gleichung

$$B + \varepsilon C = 0$$

und damit sie parallel mit  $b\beta$  sei, muss:

$$\frac{x_2 + \varepsilon x_3}{y_2 + \varepsilon y_3} = \frac{x_1 C_0 + x_3 A_0}{y_1 C_0 + y_3 A_0}$$

folglich:

$$\varepsilon = \frac{e_3 C_0 - e_1 A_0}{e_3 C_0}$$

Die durch die Mitte von  $b\beta$  gehende Gerade hat also die Gleichung:

$$B - \varepsilon C = 0$$

oder:

$$B e_3 C_0 + C(e_1 A_0 - e_3 C_0) = 0$$

Demnach hat man für die Gauss'sche Gerade die Gleichungen:

$$A e_1 B_0 + B(e_3 C_0 - e_2 B_0) + \lambda(B C_0 + C B_0) \equiv \mu(B e_3 C_0 + C(e_1 A_0 - e_3 C_0)) + k(A C_0 + C A_0) = 0$$

Es bestehen also die Beziehungen:

$$e_1 B_0 = k C_0$$

$$e_3 C_0 - e_2 B_0 + \lambda C_0 = \mu e_3 C_0$$

$$\lambda B_0 = \mu(e_1 A_0 - e_3 C_0) + k A_0$$

woraus für  $\lambda$  folgt:

$$\lambda = e_3 \frac{e_1 A_0 + e_2 B_0 - e_3 C_0}{-e_1 A_0 + e_2 B_0 + e_3 C_0}$$

Setzt man diesen Wert für  $\lambda$  in obige Gleichung ein, so erhält man für die Gauss'sche Gerade die Gleichung:

$$A e_1(-e_1 A_0 + e_2 B_0 + e_3 C_0) + B e_2(e_1 A_0 - e_2 B_0 + e_3 C_0) + C e_3(e_1 A_0 + e_2 B_0 - e_3 C_0) = 0 \dots (63)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Gerade kann man nun ebenso gut dem Punkte 0, als wie dessen Dreieckspolare  $P(0)$  entsprechen lassen.

Die Gleichung desjenigen Kegelschnittes  $\Phi(S)$ , der die Seiten des Urdreiecks in ihren Mitten berührt und den Schwerpunkt  $S$  desselben zum Mittelpunkt hat, hat bekanntlich die Gleichung:

$$\Phi(S) = A^2 e_1^2 + B^2 e_2^2 + C^2 e_3^2 - 2AB e_1 e_2 - 2AC e_1 e_3 - 2BC e_2 e_3 = 0$$

Die Polare dieses Kegelschnittes für irgend einen Punkt  $O$  hat nun die Gleichung:

$$x \frac{1}{2} \Phi'(S)_{x_0} + y \frac{1}{2} \Phi'(S)_{y_0} + z \frac{1}{2} \Phi'(S)_{z_0} = 0$$

oder:

$$A e_1 (-e_1 A_0 + e_2 B_0 + e_3 C_0) + B e_2 (e_1 A_0 - e_2 B_0 + e_3 C_0) + C e_3 (e_1 A_0 + e_2 B_0 - e_3 C_0) = 0$$

Es ergibt sich demnach:

Die Gauss'sche Gerade irgend eines Punktes  $O$  fällt mit der Polaren dieses Punktes bezüglich des Kegelschnittes  $\Phi(S)$  zusammen. . . . . (64)

Mit Hilfe der Sätze über Pol und Polare des Dreiecks geht ferner hervor.

Für alle Gauss'schen Geraden, die durch den Schwerpunkt des Urdreiecks gehen, liegen die entsprechenden Punkte im Unendlichen und ihre entsprechenden Geraden sind Tangenten des Kegelschnittes  $\Phi(S)$ . Jedem Punkte des Kegelschnittes  $\Phi(S)$  kommt als Gauss'sche Gerade dessen Tangente in jenem Punkte zu. Jeder Tangente des Kegelschnittes  $\Phi(S)$  entspricht als Gauss'sche Gerade ein Durchmesser dieses Kegelschnittes. Dem Schwerpunkte  $S$  des Urdreiecks entspricht als Gauss'sche Gerade die unendlich ferne Gerade. . (65)

Hieraus gehen ferner die Sätze hervor:

Jede Tangente des Kegelschnittes  $\Phi(S)$  bildet mit dem Urdreiecke ein Vierseit, dessen Diagonalmitten mit dem Schwerpunkte des Urdreiecks auf einer und derselben Geraden liegen.

Die Dreieckspolare irgend eines Punktes  $O$  bildet mit dem Urdreiecke ein Vierseit, dessen Diagonalmitten auf der Polare dieses Punktes bezüglich des Kegelschnittes  $\Phi(S)$  liegen. . . . . (66)

Die Coordinaten des unendlich fernen Punktes der Dreieckspolaren von  $L$  sind nach (60a) bestimmt durch das Verhältniss:

$$A : B : C = \frac{e_2 - e_3}{e_1} : \frac{e_3 - e_1}{e_2} : \frac{e_1 - e_2}{e_3}$$

Die diesem Punkte entsprechende Gauss'sche Gerade hat also die Gleichung:

$$A e_1 (e_2 - e_3) + B e_2 (e_3 - e_1) + C e_3 (e_1 - e_2) = 0$$

Nun ist aber die Gleichung der Verbindungslinie des Schwerpunktes und des Inkreiscentrums:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ e_2 e_3, & e_1 e_3, & e_1 e_2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$Ae_1(e_2 - e_3) + Be_2(e_3 - e_1) + Ce_3(e_1 - e_2) = 0$$

Unter Berücksichtigung von (61) ergibt sich somit:

Die gemeinschaftliche Tangente des Inkreises und Neunpunktkreises bildet mit dem Urdreiecke ein Vierseit, dessen Diagonalmitten auf der Linie der Punkte  $J, S, U, F$  liegen. . . . . (67)

Die dem Inkreiscentrum entsprechende Gauss'sche Gerade hat die Gleichung:

$$Ae_1\sigma_1 + Be_2\sigma_2 + Ce_3\sigma_3 = 0$$

Nach (31) und (64) ergibt sich also:

Die Polare des Inkreiscentrums bezüglich des Kegelschnittes  $\Phi(S)$  fällt zusammen mit der Dreieckspolare des Punktes  $L$ . . . . . (68)

Da ferner die Dreieckspolare des Inkreiscentrums die Gerade der äusseren Aehnlichkeitspunkte der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise ist, so folgt ferner der Satz:

Verlängert man die Aussenwinkelhalbirenden des Urdreiecks bis zu den Schnittpunkten mit den Gegenseiten, so liegen die Mitten der Strecken, die zwischen jenen Schnittpunkten und den Gegenecken des Dreiecks liegen, auf der Dreieckspolare des Punktes  $L$ . . . . . (69)

Dem Grebe'schen Punkte entspricht als Gauss'sche Gerade eine Linie, deren Gleichung ist:

$$Ae_1(-e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + Be_2(e_1^2 - e_2^2 + e_3^2) + Ce_3(e_1^2 + e_2^2 - e_3^2) = 0$$

oder:

$$A\Sigma_{23} + B\Sigma_{13} + C\Sigma_{12} = 0$$

d. h. Die Gauss'sche Gerade des Grebe'schen Punktes fällt zusammen mit der Höhenschnittspolare. . . . . (70)

Die Polare des Grebe'schen Punktes bezüglich des Kegelschnittes  $\Phi(S)$  ist die Höhenschnittspolare. . . . . (71)

Ferner folgt aus den Eigenschaften des Grebe'schen Punktes:

Verlängert man die in den Eckpunkten des Urdreiecks an den Umkreis gezogenen Tangenten bis zu den Schnittpunkten mit den Gegenseiten des Dreiecks, so liegen die Mitten der Strecken dieser Tangenten, die zwischen jenen Schnittpunkten und den Ecken des Dreiecks liegen, auf der Höhenschnittspolare des Dreiecks. . . . (72)

Bezeichnet man mit  $m_1, m_2, m_3$  (Fig. 4.) die Mitten dieser auf den Tangenten des Umkreises liegenden Strecken und beschreibt aus diesen Punkten  $m_1, m_2, m_3$  Kreise, welche diese Strecken zu Durch-

messern haben, so besitzen diese drei Kreise eine und dieselbe gemeinschaftliche Sehne, da ihre Durchmesser die Diagonalen eines vollständigen Vierecks sind.

Diese gemeinschaftliche Sehne steht aber senkrecht auf der Geraden  $m_1 m_2 m_3$ , welche nach (72) die Höhenschnittspolare des Urdreiecks ist. Die Verbindungslinien des Umkreiscentrums mit den Ecken des Urdreiecks sind aber zugleich Tangenten der Kreise  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , die alle von gleicher Länge, nämlich gleich dem Radius des Umkreises, sind. Da nun ferner die Verbindungslinie  $MN$  senkrecht auf der Höhenschnittspolare steht, so folgt nach (58) der Satz:

Die drei Kreise  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , welche die Tangentenlängen zu Durchmessern haben, schneiden sowohl den Umkreis als auch Neunpunkt-kreis rechtwinklig, und haben alle drei zur gemeinschaftlichen Sehne die Linie der Punkte  $M$ ,  $N$ ,  $S$ ,  $H$  und zum Potenzpunkte den Mittelpunkt des Umkreises. . . . . (73)

Sind die Coordinatenverhältnisse zweier Punkte die folgenden:

$$A_0 : B_0 : C_0 = \alpha : \beta : \gamma$$

$$A_1 : B_1 : C_1 = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}$$

so nennt man bekanntlich diese Punkte reciproke Punkte. Die Gleichungen der Verbindungslinien dieser Punkte mit der Ecke  $\alpha$  des Urdreiecks sind aber:

$$B\gamma - C\beta = 0$$

$$B\beta - C\gamma = 0$$

oder in der Normalform:

$$\frac{B\gamma - C\beta}{\sqrt{(x_2\gamma - x_3\beta)^2 + (y_2\gamma - y_3\beta)^2}} = 0$$

$$\frac{B\beta - C\gamma}{\sqrt{(x_2\beta - x_3\gamma)^2 + (y_2\beta - y_3\gamma)^2}} = 0$$

oder:

$$\frac{B\gamma - C\beta}{\sqrt{r^2(\beta^2 + \gamma^2) - 2\beta\gamma\Sigma_{23}}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{B\beta - C\gamma}{\sqrt{r^2(\beta^2 + \gamma^2) - 2\beta\gamma\Sigma_{23}}} = 0$$

Die Abstände des Inkreiscentrums, dessen Coordinaten  $x = 0$ ,  $y = 0$  sind, von diesen beiden Ecktransversalen ergeben sich somit als gleich lang, und man hat demnach:

Die Verbindungslinien zweier reciproker Punkte mit den Ecken



des Urdreiecks schliessen mit den Winkelhalbirenden je zwei gleiche Winkel ein. . . . . (74)

Aus den bisher aufgestellten Coordinatenverhältnissen verschiedener merkwürdiger Punkte folgt nun, dass folgende Punkte reciprok sind:

Der Schwerpunkt und der Grebe'sche Punkt	}	. . . (75)
Das Umkreiscentrum und der Höhenschnittpunkt		
Der Punkt $Q$ und $D$		

Der Polkegelschnitt des Inkreiscentrums besitzt die Gleichung:

$$AB + AC + BC = 0$$

Derselbe hat die Aussenwinkelhalbirenden des Urdreiecks zu Tangenten, also die Innenwinkelhalbirenden zu Normalen; da aber die Brennstrahlen für die Ecken des Urdreiecks mit den Normalen gleiche Winkel bilden und diese das Inkreiscentrum enthalten, so folgt:

Die Brennpunkte des zum Inkreiscentrum gehörigen Polkegelschnittes sind reciproke Punkte. . . . . (76)

Regensburg im Februar 1877.

## XVIII.

## Fortrücken der Bahnscheitel eines Pendels von geringer Elongation. Mit Bezugnahme auf das Foucault'sche Pendel.

Von

R. Hoppe.

Die Richtung der Schwerkraft sei Axe der  $z$ , die Länge eines um einen Punkt frei beweglichen einfachen Pendels  $= c$ ; dann sind die Gleichungen der lebendigen Kraft und der constanten Projection der Flächengeschwindigkeit:

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = 2g(z - h)$$

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{\partial t} = k$$

oder, wenn man

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi \quad (1)$$

setzt:

$$\frac{c^2}{c^2 - z^2} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + (c^2 - z^2) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = 2g(z - h)$$

$$(c^2 - z^2) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = k$$

Eliminirt man einzeln  $\partial \varphi$  und  $\partial t$ , so erhält man:

$$\partial t = \frac{c \partial z}{\sqrt{2g(z - h)(c^2 - z^2) - k^2}} \quad (2)$$

$$\partial \varphi = \frac{ck \partial z}{(c^2 - z^2) \sqrt{2g(z - h)(c^2 - z^2) - k^2}} \quad (3)$$

Seien  $\alpha$  und  $\beta$  das Maximum und Minimum von  $z$ , entsprechend also dem tiefsten und höchsten Punkte, welchen das Pendel erreicht; dann verschwindet die Grösse unter der Wurzel für beide Werte, und man hat:

$$(z - h)(c^2 - z^2) - \frac{k^2}{2g} = (\alpha - z)(z - \beta)(z + \gamma) \quad (4)$$

woraus für  $z = \pm c$ :

$$\frac{k^2}{2g} = (c - \alpha)(c - \beta)(c + \gamma) = (c + \alpha)(c + \beta)(\gamma - c) \quad (5)$$

mithin, wie aus letzterem Werte zu ersehen:

$$\gamma > c$$

Wir betrachten nun  $c - \alpha$  und  $c - \beta$  als unendlich klein 1. Ordnung. Zwischen beiden variiert  $c - z$ . Dann hat man:

$$\frac{c}{c^2 - z^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c - z} + \frac{1}{c + z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c - z} + \frac{1}{2c} + \varepsilon \right) \quad (6)$$

wo  $\varepsilon$  als unendlich klein neben endlichen und unendlich grossen Termen nicht in Rechnung kommen soll. Führt man in (3) die Werte (4) (6), für  $\frac{k}{\sqrt{2g}}$  den ersten Wert (5) ein und setzt zur Abkürzung einstweilen

$$M = \sqrt{\frac{(c - \alpha)(c - \beta)}{(\alpha - z)(z - \beta)}} \quad (7)$$

so kommt:

$$\partial \varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c - z} + \frac{1}{2c} + \varepsilon \right) M \partial z \sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma + z}} \quad (8)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{c - z} \sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma + z}} &= \frac{1}{c - z} + \frac{1}{c - z} \left( \sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma + z}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{c - z} + \frac{1}{c - z} \frac{\frac{\gamma + c}{\gamma + z} - 1}{\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma + z}} + 1} \\ &= \frac{1}{c - z} + \frac{1}{\gamma + z} \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma + c}{\gamma + z}} + 1} \\ &= \frac{1}{c - z} + \frac{1}{\gamma + z} + \varepsilon' \end{aligned}$$

wo der unendlich kleine Rest  $\varepsilon'$  durch Substitution von  $c$  für  $z$  im endlichen Terme entstanden ist. Jetzt geht Gl. (8) über in

$$\partial\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c-z} + \frac{1}{\gamma+c} + \frac{1}{2c} + \varepsilon_1 \right) M \partial z$$

wo auch  $\varepsilon_1$  unendlich klein. Verschwindet nun  $c - \beta$ , so verschwindet nach Gl. (5), auch  $\gamma - c$ , daher differirt  $\frac{1}{\gamma+c}$  unendlich wenig von  $\frac{1}{2c}$  und man erhält:

$$\partial\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c-z} + \frac{3}{4c} + \varepsilon_2 \right) M \partial z$$

Setzt man zur Integration

$$\sqrt{\frac{z-\beta}{\alpha-z}} = \operatorname{tg} \psi \quad (9)$$

so wird

$$\begin{aligned} \alpha - z &= (\alpha - \beta) \cos^2 \psi; & z - \beta &= (\alpha - \beta) \sin^2 \psi \\ c - z &= (c - \beta) \cos^2 \psi + (c - \alpha) \sin^2 \psi \end{aligned} \quad (10)$$

$$M \partial z = 2 \partial \psi \sqrt{(c - \alpha)(c - \beta)} \quad (11)$$

daher

$$\partial\varphi = \left\{ \frac{\partial\psi}{(c-\beta)\cos^2\psi + (c-\alpha)\sin^2\psi} + \left( \frac{3}{4c} + \varepsilon_2 \right) \partial\psi \right\} \sqrt{(c-\alpha)(c-\beta)}$$

Dies integriert giebt:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \psi \sqrt{\frac{c-\alpha}{c-\beta}} \right) + \left( \frac{3}{4c} \psi + \int \varepsilon_2 \partial\psi \right) \sqrt{(c-\alpha)(c-\beta)} \quad (12)$$

Mit Beschränkung auf den ersten Term hat man annähernd:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \psi \sqrt{\frac{c-\alpha}{c-\beta}} = \sqrt{\frac{c-\alpha}{c-\beta}} \sqrt{\frac{z-\beta}{\alpha-z}}$$

woraus:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\alpha(c-\beta)x^2 + \beta(c-\alpha)y^2}{(c-\beta)x^2 + (c-\alpha)y^2} \\ c - z &= \frac{(c-\alpha)(c-\beta)(x^2 + y^2)}{(c-\beta)x^2 + (c-\alpha)y^2} \end{aligned}$$

oder, da  $x^2 + y^2 = (c-z)(c+z)$  ist:

$$\begin{aligned} (c-\beta)x^2 + (c-\alpha)y^2 &= (c-\alpha)(c-\beta)(c+z) \quad \text{oder} \\ \frac{x^2}{2c(c-\alpha)} + \frac{y^2}{2c(c-\beta)} &= 1 - \frac{c-z}{2c} \end{aligned} \quad (13)$$

Lässt man den unendlich kleinen letzten Term rechts weg, so ist die Bahn eine Ellipse, deren Halbaxen

$$a = \sqrt{2c(c-\beta)}; \quad b = \sqrt{2c(c-\alpha)} \quad (14)$$

sind, die grössere in der Richtung der  $y$ .

Nach Gl. (9), in welcher man beim Uebergang von einem Quadranten in den andern das Vorzeichen der Wurzel wechseln lassen muss, erreicht das Pendel zweimal die grösste Höhe ( $z = \alpha$ ) und Tiefe ( $z = \beta$ ), wenn  $\psi$  vier Quadranten durchläuft. Variirt  $\varphi$  durch 4 Quadranten, so trifft nach Gl. (1) das Pendel am Ende in dem Meridian ein, von dem es ausgegangen ist. Vernachlässigt man nun in Gl. (12) den zweiten Teil der Rechten, so vollenden  $\varphi$  und  $\psi$  ihre Quadranten gleichzeitig, die (nahezu elliptische) Bahn ist also unveränderlich. Bei Berücksichtigung des Restes, welcher genau periodisch in  $\psi$  ist, weil  $\varepsilon_2$  allein von  $z$  abhängt, bleibt sich die Bahn, gerechnet von  $\psi = 4kR$  bis  $4(k+1)R$ , noch immer congruent, rotirt aber mit unendlich kleiner Geschwindigkeit um die Verticale. Nach Vollendung der so begrenzten Bahn wird das horizontale Vorrücken derselben gemessen durch den Wert von  $\varphi - \psi$  für  $\psi = 4R$ , das ist mit Vernachlässigung von  $\varepsilon_2$

$$\Phi - 4R = \frac{3}{4c} 4R \sqrt{(c - \alpha)(c - \beta)}$$

oder nach (14)

$$\Phi - 4R = \frac{3}{4c^2} 2Rab = \frac{3}{4c^2} E \quad (15)$$

wo  $E$  den Flächeninhalt der umlaufenen Ellipse ausdrückt.

Diese Grösse ist positiv, daher bewegen sich die Bahnscheitel im Sinne des Umlaufs. Sie ist ferner unabhängig von der Schwerkraft und von der Linieneinheit.

Ist die kleine Halbaxe  $b$  sehr klein gegen  $a$ , so gewährt das Pendel zufolge unseres Ergebnisses eine Erscheinung, die offenbar mit dem Einfluss der Rotation der Erde concurrirt. Letztere bewirkt bei einem in verticaler Ebene schwingenden Pendel eine Rotation der Ebene, die in 24 Stunden höchstens  $4R$  beträgt. Nehmen wir dieses Maximum, das nur am Pole stattfindet, an, lassen das Pendel hin und zurück in 2 Secunden schwingen, setzen  $\alpha = \frac{c}{10}$ , und fragen: Wie gross muss  $b$  sein, damit die Bahn ohne Erdrotation ebenso schnell rotirt? Gl. (15) ergibt:

$$\frac{2 \cdot 4R}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{3}{4} 4R \frac{1}{10} \frac{b}{c}$$

woraus:

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{3240}$$

Da ein solches Pendel nahezu 1 Meter lang ist, so brauchte es nur um  $\frac{1}{3}$  Millimeter aus der Ebene abzuweichen, um die ganze Wirkung

der Erdrotation zu neutralisieren, bzw. zu verdoppeln. Hieraus ist ersichtlich, dass der Foucault'sche Pendelversuch sich nicht mit rohen Mitteln anstellen lässt ohne beträchtlichen Täuschungen ausgesetzt zu sein, und dass bei Versuchen, welche die Rotationsgeschwindigkeit genauer constatiren sollen, die grösste Sorgfalt auf Herstellung ebener Bewegung verwandt werden muss.

Von der Formel (2) ist bis jetzt kein Gebrauch gemacht. Führt man den Wert (4) ein, so kommt, mit Anwendung von (7) (11)

$$\begin{aligned}\partial t &= \frac{cM\partial z}{\sqrt{2g(c-\alpha)(c-\beta)(\gamma+z)}} = \frac{2c\partial\psi}{\sqrt{2g(\gamma+z)}} \\ &= \frac{2c\partial\psi}{\sqrt{2g(\gamma+c)}} \left(1 - \frac{c-z}{\gamma+c}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{c\partial\psi}{\sqrt{2g(\gamma+c)}} \left(2 + \frac{c-z}{\gamma+c} + \varepsilon_3\right)\end{aligned}$$

oder, da

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma+c}} = \frac{1}{\sqrt{2c}} \left(1 + \frac{\gamma-c}{2c}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2c}} \left(1 - \frac{\gamma-c}{4c} + \varepsilon_4\right)$$

ist:

$$\partial t = \frac{\partial\psi}{2} \sqrt{\frac{c}{g}} \left(2 - \frac{\gamma-c}{2c} + \frac{c-z}{2c} + \varepsilon_5\right)$$

wo die verschiedenen  $\varepsilon$  Unendlichkleine höherer Ordnung als der nächst vorhergehende Term sind. Nach (5) ist aber die Grösse

$$\gamma - c = (\gamma + c) \frac{c - \alpha}{c + \alpha} \frac{c - \beta}{c + \beta}$$

gleichfalls unendlich klein höherer Ordnung, verschmilzt also mit  $\varepsilon_5$ . Jetzt wird nach (10)

$$\partial t = \partial\psi \sqrt{\frac{c}{g}} \left\{ 1 + \frac{(c-\beta)\cos^2\psi + (c-\alpha)\sin^2\psi}{4c} + \varepsilon_6 \right\}$$

und nach (14)

$$\partial t = \partial\psi \sqrt{\frac{c}{g}} \left( 1 + \frac{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}{8c^2} + \varepsilon_6 \right)$$

Integriert man von  $\psi = 0$  bis  $\psi = 4R$ , so erhält man mit Vernachlässigung von  $\varepsilon_6$ :

$$T = 4R \sqrt{\frac{c}{g}} \left( 1 + \frac{a^2 + b^2}{16c^2} \right)$$

als Ausdruck der Dauer einer vollen Schwingung.

Zur Berechnung der Länge der Bahn hat man aus der Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\partial s = \partial t \sqrt{2g(z-h)}$$

und zwar ist, wie sich aus (4) für  $z=0$  mit Anwendung von (5) ergibt,

$$hc^2 = \alpha\beta\gamma - (c-\alpha)(c-\beta)(\gamma+c)$$

mithin  $c$  Hauptwert von  $h$ , und  $z-h$  unendlich klein. Daher ist  $\sqrt{z-h}$  keiner Reihenentwicklung mit steigender Ordnung der Unendlichkleinen und rationalen Termen fähig. Eine Behandlung des Integrals nach andrer Methode aber würde an dieser Stelle kein Interesse haben.



## XIX.

Erste Sätze von den bestimmten Integralen  
unabhängig vom Differentialbegriff entwickelt.

Von

R. Hoppe.

Besonders in Hinsicht auf das Fourier'sche Theorem ist eine Grundlegung der Theorie der bestimmten Integrale unabhängig vom Differentialbegriff wichtig. Eine Bearbeitung der Principien in diesem Sinne hat J. Thomae in der Separatschrift: „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale“ — geliefert. Motive denselben Gegenstand auf's neue zu behandeln sind mir die folgenden. Erstens führt seine Darstellung des Integrals als Grenzwert der Summé überflüssige Elemente in die Rechnung ein und ist daher nicht die einfachst mögliche. Zweitens wird mitten in der Reihe seiner Sätze der Differentialbegriff unnötigerweise zugezogen und verdunkelt den logischen Connex. Manche andre Abweichungen, die ich vornehme, sind secundärer Natur.

Gegenstand des Gegenwärtigen werden ausschliesslich einfache, reelle Integrale sein. Differentiale werden erst da eintreten, wo die Differentiation selbst in Frage steht, und bei der Frage der Convergenz.

§. 1. Interpolation loser Reihen. Einmalige Interpolation einer losen, d. h. nicht gesetzmässigen, Reihe reeller Grössen

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$



wollen wir nennen die Einschaltung eines neuen Gliedes  $> x_{k-1}$  und  $< x_k$  zwischen 2 beliebige successive Glieder  $x_{k-1}$ ,  $x_k$ . Unter Interpolation schlechthin verstehen wir dann eine bestimmte Succession mehrerer einmaligen Interpolationen nach beliebigen Gliedern.

Zur Bezeichnung ist es notwendig die Anzahl der Glieder anzugeben; wir schreiben darum die Reihe:

$$x_0^{''} < x_1^{''} < \dots x_n^{''} \quad (1)$$

denn nach einmaliger Interpolation wachsen die Ordnungszahlen des hintern Theils der Reihe, und man hat:

$$\begin{aligned} x_h^{n+1} &= x_h^{''} \quad (h < k) \\ x_h^{n+1} &= x_{h-1}^{''} \quad (h > k) \end{aligned}$$

Eine leichte Betrachtung ergibt, dass durch geeignete Interpolation, z. B. wenn man alle  $n$  Differenzen, dann alle  $2n$ , dann alle  $4n$ , etc. Differenzen der successiven Glieder durch die Einschaltungen nach gleichem Zahlenverhältniss teilt, unendlich klein gemacht werden können (was offenbar nicht bei jeder in's unendliche fortgesetzten Interpolation der Fall ist).

Das Anfangs- und Endglied der Reihe bleibt von aller Interpolation unberührt. Sei demnach bei Variation von  $n$  constant

$$x_0^{''} = a; \quad x_n^{''} = b.$$

§. 2. Grenzwert der Summe von Producten der successiven Differenzen einer interpolirten Reihe multiplicirt mit den den Gliedern entsprechenden Werten einer Function. Die Reihe (1) werde in solcher Weise unendlichmal interpolirt, dass die Differenzen der successiven Glieder unendlich klein werden. Sei  $\varphi x$  eine mit  $x$  beständig wachsende, eindeutige Function. Dann lässt sich beweisen, dass

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \varphi x_k^{''} (x_k^{''} - x_{k-1}^{''}) \quad (2)$$

für  $n = \infty$  einen Grenzwert hat, der von der möglichen Verschiedenheit der Interpolation unabhängig ist.

Betrachten wir neben obiger Summe auch die folgende

$$T_n = \sum_{k=1}^{k=n} \varphi x_{k-1}^{''} (x_k^{''} - x_{k-1}^{''})$$

und lassen, durch Einschaltung vor  $x_k$ ,  $n$  um 1 wachsen; dann bleiben alle Glieder beider Reihensummen unverändert bis auf eins, welches in 2 Glieder übergeht, und man erhält nach Subtraction:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \overset{n+1}{\varphi} \overset{n+1}{x_k} (\overset{n+1}{x_k} - \overset{n+1}{x_{k-1}}) + \overset{n+1}{\varphi} \overset{n+1}{x_{k+1}} (\overset{n+1}{x_{k+1}} - \overset{n+1}{x_k}) \\ &\quad - \overset{n}{\varphi} \overset{n}{x_k} (\overset{n}{x_k} - \overset{n}{x_{k-1}}) \\ T_{n+1} - T_n &= \overset{n+1}{\varphi} \overset{n+1}{x_{k-1}} (\overset{n+1}{x_k} - \overset{n+1}{x_{k-1}}) + \overset{n+1}{\varphi} \overset{n+1}{x_k} (\overset{n+1}{x_{k+1}} - \overset{n+1}{x_k}) \\ &\quad - \overset{n}{\varphi} \overset{n}{x_{k-1}} (\overset{n}{x_k} - \overset{n}{x_{k-1}}) \end{aligned}$$

oder, weil

$$\overset{n}{x_k} = \overset{n+1}{x_{k+1}}; \quad \overset{n}{x_{k-1}} = \overset{n+1}{x_k}$$

ist:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= -(\overset{n+1}{\varphi} \overset{n+1}{x_{k+1}} - \overset{n+1}{\varphi} \overset{n+1}{x_k}) (\overset{n+1}{x_k} - \overset{n+1}{x_{k-1}}) < 0 \\ T_{n+1} - T_n &= (\overset{n+1}{\varphi} \overset{n+1}{x_k} - \overset{n+1}{\varphi} \overset{n+1}{x_{k-1}}) (\overset{n+1}{x_{k+1}} - \overset{n+1}{x_k}) > 0 \end{aligned}$$

folglich nimmt, bei wachsendem  $n$ ,  $S_n$  ab,  $T_n$  zu. Ausserdem ist

$$S_n - T_n = \sum_{k=1}^{k=n} (\overset{n}{\varphi} \overset{n}{x_k} - \overset{n}{\varphi} \overset{n}{x_{k-1}}) (\overset{n}{x_k} - \overset{n}{x_{k-1}}) > 0$$

und man erhält:

$$T_1 < T_2 < \dots < T_n < S_n < S_{n-1} < \dots < S_1 \quad (3)$$

d. h.  $S_n$  bleibt bei beständigem Abnehmen stets  $> T_1$ , und  $T_n$  bei beständigem Wachsen stets  $< S_1$ ; beide haben also Grenzwerte für  $n = \infty$ , welche zunächst nur für bestimmte Interpolationsfolge bestimmt sind, und zwar ist

$$\lim S_n > \text{jedes } T_n, \quad \text{und} \quad \lim T_n < \text{jedes } S_n. \quad (4)$$

Bezeichnet ferner  $\Delta$  die grösste der Differenzen  $\overset{n}{x_k} - \overset{n}{x_{k-1}}$  in Gl. (2), so ist, da alle Terme jener Summe positiv sind,

$$S_n - T_n < \Delta \sum_{k=1}^{k=n} (\overset{n}{\varphi} \overset{n}{x_k} - \overset{n}{\varphi} \overset{n}{x_{k-1}}) = \Delta (\overset{n}{\varphi} \overset{n}{x_n} - \overset{n}{\varphi} \overset{n}{x_0}) = \Delta (\overset{n}{\varphi} b - \overset{n}{\varphi} a)$$

und, da nach Voraussetzung  $\lim \Delta = 0$  ist, auch

$$\lim (S_n - T_n) = 0 \quad (5)$$

folglich jene 2 Grenzwerte von  $S_n$  und  $T_n$  einander gleich.

Es bleibt zu beweisen, dass bei jeder Interpolation dieselben Grenzwerte resultiren. Nehmen wir ausser der Reihe (1) die Reihe

$$a = x_0' < x_1' < \dots < x_m' = b \quad (6)$$

an und interpoliren sie auf beliebige andere Weise, so dass die Differenzen unendlich klein werden. Sei

$$S_m' = \sum_{k=1}^{k=m} \varphi x_k' (x_k' - x_{k-1}')$$

$$T_m' = \sum_{k=1}^{k=m} \varphi x_{k-1}' (x_k' - x_{k-1}')$$

$$\lim S_n = \lim T_n = S; \quad \lim S_m' = \lim T_m' = S'$$

Durch Vereinigung beider Reihen entsteht eine dritte Reihe

$$a = x_0'' < x_1'' < \dots < x_{m+n}' = b \quad (7)$$

welche die Glieder der einen und andern zugleich enthält, daher durch Interpolation aus jeder von beiden hervorgehen kann. Sei analog

$$S_{m+n}'' = \sum_{k=m+1}^{k=m+n} \varphi x_k'' (x_k'' - x_{k-1}'')$$

$$T_{m+n}'' = \sum_{k=m+1}^{k=m+n} \varphi x_{k-1}'' (x_k'' - x_{k-1}'')$$

$$\lim S_{m+n}'' = \lim T_{m+n}'' = S''$$

Dann ist zunächst nach (4) bei jeder Interpositionsfolge und für jeden Wert von  $m+n$

$$S_{m+n} > S' > T_{m+n} \quad (8)$$

Unerwiesen ist aber noch, ob  $S'$  dieselbe Grösse sein kann, wenn die Reihe (7) einmal aus (1), das andermal aus (6) durch Interpolation hervorgeht. Dies erhellt folgendermassen. Sei  $A, B, C, \dots$  eine in's unendliche steigende Reihe; wir fixiren successive Werte von  $m+n > A, > B, > C, \dots$  und interpoliren die Reihe (7) in solcher Folge, dass sie für jeden fixirten Wert alle Glieder von (1) und (6) enthält, was durch blosse Hinzufügung der neuen Glieder stets möglich ist. Dann geht, für beliebig grosse  $m+n$ ,  $S_{m+n}''$  durch Interpolation aus  $S_n$  und aus  $S_m'$  hervor, folglich differiren die 2 Werte der Constanten  $S''$  unendlich wenig von der einen Variablen  $S_{m+n}''$ , sind also einander gleich. Dann aber ist nach (3)

$$S_n > S_{m+n}''; \quad T_{m+n}'' > T_n$$

$$S_m' > S_{m+n}''; \quad T_{m+n}'' > T_m'$$

und man hat nun zufolge (4) und (8):

$$\begin{aligned} T_n < S < S_n; \quad T_m' < S' < S_m' \\ S_n > S' > T_n; \quad S_m' > S' > T_m' \end{aligned}$$

woraus nach Subtraction der übereinanderstehenden Scalen:

$$\begin{aligned} T_n - S_n < S - S' < S_n - T_n \\ T_m' - S_m' < S' - S' < S_m' - T_m' \end{aligned}$$

und dann nach Addition:

$$T_n - S_n + T_m' - S_m' < S - S' < S_n - T_n + S_m' - T_m'$$

Die äussern Glieder verschwinden nach (5) für unendlich grosse  $n$  und  $m$ , folglich ist das Mittelglied null, und man hat:

$$S = S'$$

was zu beweisen war.

§. 3. Erweiterungen. Der Satz von §. 2. war an die Bedingung geknüpft, dass  $\varphi x$  mit  $x$  wächst. Wenn statt dessen  $\varphi x$  bei wachsendem  $x$  abnimmt, so wächst  $-\varphi x$  mit  $x$ . Wendet man dann den Satz auf  $-\varphi x$  an, so ergibt sich leicht, dass er auch von  $\varphi x$  gilt.

Die Reihe (1) enthielt bisher stets die feststehenden Glieder  $x_0, x_n$ . Uebergeht man diese, so fallen in der Reihensumme  $S_n$  der erste und letzte Term weg. Da alle Terme unendlich klein sind, so bleibt der Grenzwert  $S$  ungeändert. Giebt es nun eine Reihe von Grössen

$$a < a_1 < a_2 < \dots < b$$

derart, dass  $\varphi x$  von  $x = a$  bis  $a_1$ , von da bis  $a_2$ , etc. entweder beständig wächst oder beständig abnimmt, sei es mit Einschluss oder Ausschluss der Grenzen, und man wendet den Satz von §. 2. auf jedes dieser Teilintervalle einzeln an, so erhält man, nach Addition der entsprechenden Summen  $S_n$ , wieder die ursprüngliche Summe  $S_n$ , und deren Grenzwert ist dann die Summe der einzelnen Grenzwerte  $S$ . Folglich gilt der Satz auch von einer Function  $\varphi x$ , die nur in lauter Intervallen von einem Werte zum andern beständig wächst oder abnimmt.

Auch die Bedingung, dass die Reihe der  $x$  beständig wächst, lässt sich beseitigen. Kehrt man die Reihe (1) um, so geht  $S_n$  in  $-T_n$ ,  $T_n$  in  $-S_n$  über. Bei beständig abnehmenden  $x$  hat also  $S_n$  gleichfalls einen Grenzwert. Wenn jetzt die  $x$  bald zu-, bald abnehmen, so kann man wie oben das Intervall von  $a$  bis  $b$  in Teilintervalle zerlegen, in deren jedem die  $x$  nur in einem Sinne variiren. Demnach gilt der Satz noch für eine beliebige Reihe der  $x$ , wenn sie nur auf durchgehend unendlich kleine Differenzen interpolirt wird.

Da jeder Term der Summe (2) unendlich klein ist, so hat eine Aenderung einer endlichen Anzahl von Functionswerten  $\varphi x$  keinen Einfluss auf den Grenzwert  $S$ . Eine Aenderung unendlich vieler Functionswerte hingegen kann den Wert von  $S$  ändern. Unter allen Umständen steht es uns aber frei, wenn die  $x$  bekannt sind, denen die abzuändernden  $\varphi x$  entsprechen, so zu interpoliren, dass kein solches  $x$  in der Reihe vorkommt, kurz alle jene  $x$  zu vermeiden, da zwischen ihnen, auch wenn sie einander unendlich nahe kommen, immer noch Reihenglieder angenommen werden können. Hier zeigt es sich, dass es Fälle geben kann, wo aus verschiedener Interpolation verschiedener Grenzwert resultirt, sofern bei Aufnahme jener  $x$  in die Reihe sich  $S$  mit gewissen Functionswerten ändert, bei Vermeidung derselben nicht.

Erfüllt also die Function  $\varphi x$  die Bedingung des Satzes nicht, differirt sie aber von einer Function  $\varphi_1 x$ , die der Bedingung genügt, nur in einzelnen Werten, seien es auch unendlich viele, so gilt der Satz noch für jede Interpolation, welche die entsprechenden einzelnen  $x$  meidet.

Derselbe Fall findet z. B. statt, wenn  $\varphi x$  für rationale  $x$  einen andern Lauf hat als für irrationale. Die rationalen  $x$  sind unendlich viele Einzelwerte, die irrationalen nicht. Man hat dann bei Interpolation nur irrationale Glieder einzuschalten und die Ausnahmsbestimmung von  $\varphi x$  für rationale  $x$  zu ignoriren \*).

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so haben wir 2 Sätze:

I. Satz. Die Summe

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\varphi x_k (x_k - x_{k-1})) \quad (9)$$

in welcher  $\varphi x$  eine eindeutige Function ist, welche in lauter Intervallen von einem Werte von  $x$  zum andern, sei es mit Einschluss oder Ausschluss dieser Grenzen, beständig wächst oder beständig ab-

---

\*) Thomae hat den im Vorstehenden erklärten Umstand ganz unberücksichtigt gelassen. Seine Darstellung kennt den Unterschied zwischen Intervall und Einzelwert und das Verhalten der letztern zum Integral gar nicht; vielmehr giebt sich darin die irrthümliche Anschauung kund, als ob das Intervall aus unendlich vielen Einzelwerten bestünde, unendlich viele Punkte eine Linie ausmachten. Demgemäss ist auch seine Erörterung der Irrationalzahlen unrichtig, indem sie sich mit den Rationalzahlen bei ihm in das Intervall teilen. Infolge davon erscheint das Resultat seiner Behandlung von Beispielen der letzt genannten Art als wunderbare Eigenschaft der betreffenden Functionen, wobei er es bewenden lässt.

nimmt, hat, wenn durch fortgesetzte Interpolation die sämtlichen Differenzen  $\overset{n}{x} - \overset{n}{x}_{k-1}$  unendlich klein werden, einen Grenzwert, der von der möglichen Verschiedenheit der Interpolation unabhängig ist.

II. Satz. Erfüllt die Function  $\varphi x$  obige Bedingung zwar nicht, differirt sie aber von einer Function  $\varphi_1 x$ , welche der Bedingung genügt, nur in einzelnen Werten von  $x$ , seien es auch unendlich viele, so hat die Summe (9.) denselben Grenzwert wie

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi_1(x_k(x_k - x_{k-1}))$$

wenn in der Reihe der  $x_k$  diejenigen  $x$  nicht vorkommen, für welche  $\varphi x > \varphi_1 x$  ist.

Im Falle des letztern Satzes ist also die Unabhängigkeit des Grenzwerts von der Interpolation eine beschränkte.

§. 4. Definition des bestimmten Integrals. Die in §. 2. formulirte Grösse  $S$  heisst das Integral von  $\varphi x \partial x$  im Intervall von  $a$  bis  $b$  und wird geschrieben:

$$\int_a^b \varphi x \partial x = \lim_{k=n} \sum_{k=1}^k \varphi x_k (\overset{n}{x}_k - \overset{n}{x}_{k-1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{n}{x}_n = b \\ \overset{n}{x}_0 = a \end{array} \right. \quad (10)$$

Diese Gleichung definirt den links stehenden Ausdruck, und die Definition ist gültig für alle Functionen  $\varphi x$ , welche den Bedingungen des I. oder II. Satzes genügen, die Summe und deren Variation mit  $n$  im Sinne dieser Sätze verstanden.

§. 5. Form der Abhängigkeit des Integrals von seinen Grenzen. Da die rechte Seite der Gl. (10) unabhängig von der Reihe der  $x$  ausgenommen deren Anfangs- und Endglied ist, so kann das Integral nur Function von  $a$  und  $b$  sein. Sei also

$$\int_a^b \varphi x \partial x = F(a, b)$$

Eine leichte Betrachtung ergibt, dass gemäss der Definition

$$\int_a^b \varphi x \partial x + \int_b^c \varphi x \partial x = \int_a^c \varphi x \partial x \quad (11)$$

ist, indem die zweite Reihensumme bloss Fortsetzung der ersten ist. Daher hat man:

$$F(a, b) + F(b, c) = F(a, c)$$

Betrachtet man  $c$ , von dem  $F(a, b)$  nicht abhängt, als constant und setzt

$$F(a, c) = -f(a)$$

so wird

$$F(a, b) = f(b) - f(a) \quad (12)$$

und man hat:

III. Satz. Jedes Integral im Intervall von  $a$  bis  $b$  ist die Differenz zweier Werte derselben Function entsprechend den Argumenten  $a$  und  $b$ .

Diese Function  $f(x)$  möge die Integralfunction von  $\varphi x \partial x$  heissen. Addirt man eine Constante zu ihr, so bleibt die Grösse (12) un-  
geändert, folglich enthält jede Integralfunction eine willkürliche Constante als Addenden.

Aus der Gleichung

$$\int_a^b \varphi x \partial x = f(b) - f(a) \quad (13)$$

folgt nun leicht erstlich Gl. (11), ferner insbesondere:

$$\begin{aligned} \int_a^a \varphi x \partial x &= 0 \\ \int_a^b \varphi x \partial x &= - \int_b^a \varphi x \partial x \end{aligned}$$

§. 6. Mittelwertsatz. Sei  $A$  der kleinste,  $B$  der grösste Wert der Function  $\varphi x$  zwischen  $x = a$  und  $x = b$ , und  $a < b$ . Wir interpoliren die Reihe (1) so, dass die Differenzen  $x_k - x_{k-1}$  sämmtlich positiv werden. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} (\varphi x_k - A) (x_k - x_{k-1}) &> 0 \\ \sum_{k=1}^{k=n} (\varphi x_k - B) (x_k - x_{k-1}) &< 0 \end{aligned}$$

woraus:

$$A \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{k=n} \varphi x_k (x_k - x_{k-1}) < B \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1})$$

Nun ist

$$\sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

folglich, indem man zum Grenzwert übergeht,

$$A(b-a) \leq \int_a^b \varphi x \, dx \leq B(b-a)$$

Bezeichnet  $M\varphi x$  einen Mittelwert der Function, d. h. eine Grösse zwischen  $A$  und  $B$ , so kann man das Resultat schreiben:

$$\int_a^b \varphi x \, dx = (b-a) M\varphi x \quad (14)$$

§. 7. Stetigkeit der Integralfunction. Das Integral (10) ist stetige Function der obern Grenze  $b$ , wenn

$$\Delta = \int_a^{b+\varepsilon} \varphi x \, dx - \int_a^b \varphi x \, dx \quad (15)$$

zugleich mit  $\varepsilon$  unendlich klein ist. Nach (11), dann nach (14) ist

$$\Delta = \int_b^{b+\varepsilon} \varphi x \, dx = \varepsilon M\varphi x \quad (16)$$

Da nun  $M\varphi x$  zwischen bestimmten Grenzen enthalten ist, so ist die Bedingung der Stetigkeit erfüllt. Führt man für das Integral den Ausdruck  $f(b) - f(a)$  ein, und schreibt  $x$  statt  $b$ , so ergibt sich, dass  $f(x)$  stetige Function von  $x$ , und hieraus wieder, dass das Integral stetige Function von  $a$  und  $b$  ist.

IV. Satz. Das in §. 4. definirte bestimmte Integral ist stetige Function beider Grenzen.

§. 8. Differentiation der Integrale. Setzt man in (15)  $\partial b$  für  $\varepsilon$ , so stellt  $\Delta$  das Differential des Integrals partiell nach  $b$  dar, und man hat nach (16):

$$\partial b \cdot \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b \varphi x \, dx = \partial b M\varphi x$$

und zwar bezeichnet  $M\varphi x$  einen Mittelwert der Function zwischen  $x = b$  und  $x = b + \partial b$ . Ist nun  $\varphi x$  stetig bei  $x = b$ , so haben alle solche Mittelwerte den Grenzwert  $\varphi b$ ; folglich ist

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_a^b \varphi x \, dx = \varphi b$$



Führt man den Ausdruck (13) ein, und schreibt  $x$  statt  $b$ , so kommt:

$$\frac{\partial(f(x) - f(a))}{\partial x} = \varphi x$$

oder, wenn  $a$  constant:

$$f'(x) = \varphi x \text{ (wenn } \varphi x \text{ stetig)} \quad (17)$$

Demnach ist die Function unter dem Integralzeichen, wofern sie stetig, immer die Derivation der Integralfunction, und man hat allgemein:

$$\int_a^b f'(x) \partial x = f(b) - f(a) \quad (18)$$

Variiren jetzt  $a$  und  $b$  gleichzeitig, so ist

$$\partial \int_a^b f'(x) \partial x = f'(b) \partial b - f'(a) \partial a \text{ oder}$$

$$\partial \int_a^b \varphi x \partial x = \varphi b \partial b - \varphi a \partial a$$

Variirt  $\varphi x$  mit einer Grösse  $u$ , und man setzt

$$\frac{\partial \varphi x}{\partial u} = \varphi_1 x; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial u} = f_1(x)$$

so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_a^b \varphi x \partial x &= \frac{\partial(fb - fa)}{\partial u} = f_1(b) - f_1(a) \\ &= \int_a^b f_1'(x) \partial x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x)}{\partial u} \partial x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \partial x \\ &= \int_a^b \frac{\partial f'(x)}{\partial u} \partial x = \int_a^b \frac{\partial \varphi x}{\partial u} \partial x \end{aligned}$$

Variiren  $a$ ,  $b$  und beliebige in  $\varphi x$  enthaltene Grössen  $u$ ,  $v$ , ..., so ist schliesslich

$$\partial \int_a^b \varphi x \partial x = \varphi b \partial b - \varphi a \partial a + \int_a^b \left( \frac{\partial \varphi x}{\partial u} \partial u + \frac{\partial \varphi x}{\partial v} \partial v + \dots \right) \partial x$$

§. 9. Erweiterter Mittelwertsatz. Sei

$$x = \psi(u)$$

und  $\psi(u)$  eine Function, die einen Differentialquotienten  $\psi'(u)$  hat. In der Bezeichnung eines bestimmten Integrals (10) bedeuten nun stets die Integralgrenzen  $a, b$  den Anfangs- und Endwert derjenigen Variablen, hier  $x$ , welche hinter dem Differentialzeichen  $\partial$  steht. Schreibt man also für  $\partial x$  sein Aequivalent  $\psi'(u)\partial u$ , so müssen an die Stelle von  $a, b$  der Anfangs- und Endwert von  $u$  treten. Variirt  $u$  von  $\alpha$  bis  $\beta$ , so variirt  $x$  von  $\psi(\alpha)$  bis  $\psi(\beta)$ . Man hat daher zu setzen:

$$a = \psi(\alpha); \quad b = \psi(\beta)$$

dann wird

$$\int_a^b \varphi x \partial x = \int_\alpha^\beta \varphi \psi(u) \psi'(u) \partial u$$

Nach (18) ist

$$\int_\alpha^\beta \psi'(u) \partial u = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = b - a$$

daher nach (14)

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi x \partial x &= M \varphi x \int_\alpha^\beta \psi'(u) \partial u \quad \text{oder} \\ \int_\alpha^\beta \varphi \psi(u) \psi'(u) \partial u &= M \varphi \psi u \int_\alpha^\beta \psi'(u) \partial u \end{aligned} \quad (19)$$

Jetzt wollen wir statt der Zeichen  $u, \alpha, \beta, \psi', \varphi \psi$  schreiben  $x, a, b, \chi, \varphi$ ; dann lautet die Formel:

$$\int_a^b \varphi(x) \chi(x) \partial x = M \varphi(x) \int_a^b \chi(x) \partial x \quad (20)$$

Die Bedingung, dass  $\psi(u)$  einen Differentialquotienten hat, ist nach (17) erfüllt, wenn  $\chi(u)$  stetig ist. In (19) bedeutet  $M \varphi \psi u$  ein Mittel zwischen dem kleinsten und grössten Werte von  $\varphi \psi u$ , wenn  $\psi u$  von  $\psi \alpha$  bis  $\psi \beta$  variirt. Wegen Stetigkeit von  $\psi u$  werden diese 2 äussersten Werte auch stets erreicht, wenn  $u$  von  $\alpha$  bis  $\beta$  variirt. Daher ist  $M \varphi \psi u$  auch Mittelwert für letztere Variation. Einen Grund zu besonderer Vorsicht bietet dagegen die Setzung einer beliebigen Function  $\varphi(u)$  für  $\varphi \psi u$ . Wenn nämlich  $\psi u$  für verschiedene  $u$  denselben Wert hat, so entspricht denselben auch gleicher Wert von  $\varphi \psi u$ , nicht aber von  $\varphi(u)$ , wodurch sich die Substitution verbietet. Um diesen Fehler zu meiden, stellen wir für die Function  $\psi u$  die zwar nicht als notwendig erwiesene, aber zureichende Bedingung, dass sie durchgängig in einem Sinne variirt, so dass jedem  $\psi u$  nur ein  $u$  entspricht; diese ist gleichbedeutend mit der, dass  $\chi(u)$  sein Vorzeichen nicht

wechselt. Jetzt lautet die Bedingung der Gültigkeit des erweiterten Mittelwertsatzes (20):

$$\chi(x) \text{ stetig und von unveränderlichem Vorzeichen.} \quad (21)$$

§. 10. Convergenz der Integrale bei unendlich grossen Functionswerten. Sei  $\varphi(a+\varepsilon) = \infty$  für verschwindendes  $\varepsilon$ . Hat alsdann das Integral

$$S_\varepsilon = \int_{a+\varepsilon}^b \varphi x \, dx$$

einen Grenzwert, so heisst es convergent, und der Grenzwert wird geschrieben:

$$\lim S_\varepsilon = \int_a^b \varphi x \, dx$$

andernfalls heisst es divergent und kann nur als Function von  $\varepsilon$  Gegenstand der Rechnung sein.

Um die Bedingungen der Convergenz aufzustellen, setzen wir:

$$l_0 x = \frac{1}{x}; \quad l_1 x = \log l_0 x; \quad l_2 x = \log l_1 x; \quad \dots \quad l_n x = \log l_{n-1} x$$

$$Lx = -\frac{1}{\alpha} (l_n x)^{-\alpha}$$

wo  $l_0, l_1, \dots, l_n, L$  Functionszeichen,  $\alpha$  eine positive Constante bedeutet. Eine Differentiation ergibt:

$$L'x = \frac{l_0 x}{l_1 x l_2 x \dots l_n x (l_n x)^\alpha}$$

$$l_{n+1}'x = \frac{l_0 x}{l_1 x l_2 x \dots l_n x}$$

Beide Functionen verharren positiv, solange das positive  $x$  klein genug bleibt, dass eine  $n$ malige Logarithmirung von  $\frac{1}{x}$  noch ein positives Resultat giebt. Die Grösse  $b-a$  habe diese geforderte Kleinheit.

Wir setzen nun in Gl. (20) einzeln

$$\chi(x) = L'(x-a); \quad \chi(x) = l_{n+1}'(x-a)$$

dann ist beidemal  $\chi(x)$  positiv von  $x = a+\varepsilon$  bis  $x = b$ , und man hat nach (18) bzw.:

$$\int_{a+\varepsilon}^b \chi(x) \, dx = \begin{cases} L(b-a) - L\varepsilon \\ l_{n+1}(b-a) - l_{n+1}\varepsilon \end{cases}$$

Zerlegt man also  $\varphi x$  folgendermassen:

$$\varphi x = \frac{\varphi(x)}{\chi(x)} \cdot \chi(x)$$

so erhält man nach Gl. (20), deren Bedingung (21) erfüllt ist, bzw.:

$$\int_{a+\varepsilon}^b \varphi x \partial x = M \frac{\varphi x}{L'(x-a)} \{L(b-a) - L\varepsilon\}$$

$$\int_{a+\varepsilon}^b \varphi x \partial x = M \frac{\varphi x}{l_{n+1}'(x-a)} \{l_{n+1}(b-a) - l_{n+1}\varepsilon\}$$

Hier sind die Subtrahenden  $L\varepsilon$  unendlich klein,  $l_{n+1}\varepsilon$  unendlich gross, die Minuenden constant, folglich das Integral endlich, wenn

$$M \frac{\varphi x}{L'(x-a)} \quad (22)$$

endlich ist, dagegen unendlich gross, wenn

$$M \frac{\varphi x}{l_{n+1}'(x-a)} \quad (23)$$

nicht unendlich klein ist.

Nimmt man nun an, dass  $\varphi(a+\varepsilon)$  bei verschwindendem  $\varepsilon$  von irgend einem  $\varepsilon$  an sein Vorzeichen nicht wechselt, so wächst der absolute Wert des Integrals beständig bei abnehmendem  $\varepsilon$ , hat also einen Grenzwert, wenn er endlich ist. Im erstgedachten Falle convergirt demnach das Integral.

Die Mittelwerte (22) (23) sind endlich, wenn die betreffenden Functionen für  $x = a+\varepsilon$  endlich sind oder mit  $\varepsilon$  verschwinden, unendlich gross, wenn es die Functionswerte sind.

Folglich convergirt das Integral, wenn

$$\frac{\varphi(a+\varepsilon)}{L'\varepsilon} = \frac{\varphi(a+\varepsilon)}{l_0\varepsilon} l_1\varepsilon l_2\varepsilon \dots l_n\varepsilon (l_n\varepsilon)^\alpha \quad (24)$$

für irgend ein  $n$  und irgend ein positives  $\alpha$  mit  $\varepsilon$  verschwindet, und  $\varphi(a+\varepsilon)$  bei verschwindendem  $\varepsilon$  sein Vorzeichen nicht wechselt; es divergirt, wenn

$$\frac{\varphi(a+\varepsilon)}{l_{n+1}'\varepsilon} = \frac{\varphi(a+\varepsilon)}{l_0\varepsilon} l_1\varepsilon l_2\varepsilon \dots l_n\varepsilon \quad (25)$$

bei verschwindendem  $\varepsilon$  nicht verschwindet.

Der Fall, wo erstere Grösse endlich ist, braucht nicht erwähnt zu werden, weil sie dann für ein kleineres positives  $\alpha$  immer verschwindet.

Es war vorausgesetzt, dass  $b$  genügend klein sei. Dass die Grösse von  $b$  keinen Einfluss auf die Convergenz hat, erkennt man jedoch leicht durch Zerlegung des Intervalls nach (11).

Die entscheidenden Grössen (24) (25) werden

$$\text{für } n = 0: \quad \varphi(a+\varepsilon)\varepsilon^{1-\alpha}, \quad \varphi(a+\varepsilon)\varepsilon$$

$$\text{für } n = 1: \quad \varphi(a+\varepsilon)\varepsilon\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1+\alpha}, \quad \varphi(a+\varepsilon)\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}$$

Ergibt das kleinere  $n$  keine Entscheidung, so schreitet man zum nächst grössern.

Das Kriterium der Convergenz für unendlich grosse Functionswerte an der obern Grenze ist leicht durch Substitution von  $b-x$  auf das vorige zurückzuführen. Es tritt bloss  $\varphi(b-\varepsilon)$  an die Stelle von  $\varphi(a+\varepsilon)$ .

Wird  $\varphi x = \infty$  für  $x = c \pm \varepsilon$ , wo  $a < c < b$ , so hat man das Intervall  $a$  bis  $b$  zu zerlegen in die Intervalle  $a$  bis  $c$  und  $c$  bis  $b$ . In (24) und (25) ist dann  $\varphi(c \pm \varepsilon)$  für  $\varphi(a \pm \varepsilon)$  zu setzen.

§. 11. Convergenz der Integrale für unendlich grosses Intervall. Das Intervall kann unendlich gross sein, wenn  $b = \infty$ , wenn  $a = -\infty$  ist und wenn beides zugleich stattfindet. Den 2. Fall kann man auf den ersten zurückführen durch Substitution  $-x$  für  $x$ , den 3. Fall auf die beiden ersten durch Zerlegung des Intervalls. Es handelt sich also allein um den ersten.

Hat das Integral (10) für  $b = \infty$  einen Grenzwert, so heisst es convergent, und der Grenzwert wird geschrieben:

$$\int_0^{\infty} \varphi x \partial x$$

Sei  $x = \log \frac{1}{\xi}$ , also  $\xi = e^{-x}$ , und  $\varepsilon$  positiv unendlich klein; dann wird

$$\int_a^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \varphi x \partial x = - \int_{e^{-a}}^{\varepsilon} \varphi \left( \log \frac{1}{\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\xi} = \int_{\varepsilon}^{e^{-a}} \varphi \left( \log \frac{1}{\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\xi}$$

Nach §. 10. convergirt letzteres Integral, wenn

$$\frac{\varphi\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon l_0 \varepsilon} l_1 \varepsilon l_2 \varepsilon \dots l_n \varepsilon (l_n \varepsilon)^\alpha$$

oder, da  $\varepsilon l_0 \varepsilon = 1$ , wenn

$$\varphi\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) l_1 \varepsilon l_2 \varepsilon \dots l_n \varepsilon (l_n \varepsilon)^\alpha$$

unendlich klein ist, und  $\varphi\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$  bei verschwindendem  $\varepsilon$  sein Vorzeichen nicht wechselt. Substituiert man für  $\varepsilon$  die positive Unendlich-kleine  $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ , so geht  $l_k \varepsilon$  in  $l_{k-1} \varepsilon$  über. Schreibt man zugleich  $n+1$  für  $n$ , so lautet die entscheidende Grösse (24) für Convergenz:

$$\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) l_0 \varepsilon l_1 \varepsilon \dots l_n \varepsilon (l_n \varepsilon)^\alpha \quad (26)$$

Hieraus geht die andere für  $\alpha = 0$  hervor

$$\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) l_0 \varepsilon l_1 \varepsilon \dots l_n \varepsilon \quad (27)$$

welche die Divergenz beweist, wenn sie nicht verschwindet.

12. Quadratur. Seien  $a = x_0, x_1, x_2, \dots x_n = b$  die Abscissen,  $\varphi x_0, \varphi x_1, \varphi x_2, \dots \varphi x_n$  die Ordinaten von Punkten  $P_0, P_1, P_2, \dots P_n$  einer ebenen Curve  $AB$ , ( $A$  mit  $P_0$ ,  $B$  mit  $P_n$  identisch),  $N_0, N_1, N_2, \dots N_n$  deren Projectionen auf die  $x$  Axe. Indem man zwischen den consecutiven Punkten immer neue auf der Curve annimmt, lassen sich die Bogen zwischen diesen unendlich klein machen. Jedem Maximum und Minimum der Ordinate entspreche ein Punkt  $P$ . Ergänzt man nun die Rechtecke

$$P_k N_k N_{k-1} M_{k-1} = \varphi x_k (x_k - x_{k-1}) \quad (28)$$

$$P_{k-1} N_{k-1} N_k L_k = \varphi x_{k-1} (x_k - x_{k-1}) \quad (29)$$

so liegt der Bogen  $P_k P_{k-1}$  stets innerhalb des Rechtecks  $P_k L_k P_{k-1} M_{k-1}$ , um welches beide Rechtecke von einander differiren; daher differirt der Streifen

$$P_k N_k N_{k-1} P_{k-1} \quad (30)$$

von jedem der beiden Rechtecke um weniger als beide Rechtecke unter sich. Nimmt man nun die Summe der Differenzen der Rechtecke (28) und (29), jede positiv gerechnet, so ist diese bis zu jedem Maximum oder Minimum nach Gl. (5) unendlich klein, folglich, wenn die Anzahl der Maxima und Minima endlich ist, von Anfang bis Ende

unendlich klein. Die Summe der Differenzen von (28) und (30), auch positiv gerechnet, ist kleiner, also auch unendlich klein. Der absolute Wert der Differenz der Summen von (28) und (30) ist nie grösser, also auch unendlich klein. Die Summe der (28) ist  $S_n$  (Gl. (2)), die Summe der (30) das Flächenstück

$$F = AP_1P_2 \dots PN_nN_0$$

folglich ist  $S_n - F$  unendlich klein. Da hiernach die Variable  $S_n$  unendlich wenig von den Constanten  $S = \lim S_n$  und  $F$  differirt, so ist

$$F = S = \int_a^b \varphi x \, dx$$

Das bestimmte Integral stellt das ebene Flächenstück zwischen dem Curvenbogen, den Ordinaten seiner Endpunkte und der Abscissenaxe dar, wenn  $\varphi x$  die Ordinate,  $x$  die Abscisse des laufenden Punktes,  $a$  deren Anfangs-,  $b$  deren Endwert ist.



## XX.

## Zur Theorie der magnetischen Induction.

Von

Herrn Dr. L. Weber,

Assistenten am physikalischen Institut in Kiel.

Die allgemeine Theorie der magnetischen Induction, wie sie zuerst von Poisson (Mém. de l'Inst. d. Fr. Tome V et VI) gegeben ist, geht von folgender Vorstellung über das Wesen des Magnetismus aus. Nach der Coulomb'schen Hypothese hat man sich den magnetischen Zustand eines Idiomagneten sowol wie eines inducirt magnetischen Körpers vorzustellen als bestehend in einer räumlichen Trennung zweier imponderabler Fluida, eines nördlich und eines südlich magnetischen Fluidums. Wenn man in Bezug auf die Wirkungsweise derselben auch dieselben allgemeinen Gesetze anzunehmen hat wie sie für die analogen elektrischen Fluida gültig sind, so ist den magnetischen Fluidis doch die charakteristische Eigenschaft zu vindiciren, gebunden zu sein an sehr kleine Körperteilchen, die von Poisson als magnetische Elemente bezeichnet werden.

Es wird nämlich angenommen, dass die beiden in einem magnetischen Element in jederzeit gleichen Mengen vorhandenen Fluida bei ihrer Trennung doch innerhalb des Elementes bleiben und sich in unendlich dünnen Schichten über die Oberfläche desselben verbreiten. Ausserdem geht Poisson von der Ansicht aus, dass innerhalb eines magnetischen Elementes die Trennung der beiden Fluida entsprechend der Stärke der inducirenden Kräfte bis zu unbegrenzten Mengen möglich sei. Ein magnetischer Körper hat demnach dieselben Eigenschaften wie ein Conglomerat unendlich kleiner, unter einander



isolirter elektrischer Conductoren. Poisson bezeichnet das Verhältniss des von den magnetischen Elementen eingenommenen Raumes zu dem Volumen des ganzen Körpers durch die Grösse  $k$  und nimmt an, dass die verschiedene Magnetisirbarkeit verschiedener Substanzen in einer Variabilität dieser Grösse  $k$  ihren Ausdruck finde.

Denkt man sich nun einen magnetisirbaren Körper der Einwirkung gegebener äusserer magnetischer Massen ausgesetzt, so führt die Vorstellung der unbegrenzten Menge der in einem magnetischen Element vorhandenen Fluida sofort zu der Bemerkung, dass nach stattgehabter Induction ein Gleichgewicht derjenigen Kräfte stattfinden muss, welche auf einen Punkt im Innern eines magnetischen Elementes ausgeübt werden 1) von den äusseren inducirenden magnetischen Massen, 2) von dem in den übrigen Elementen inducirten Magnetismus, 3) von den getrennten magnetischen Theilen des Elementes selbst. Als Bedingungsgleichungen für das genannte Gleichgewicht findet Poisson (Mém. Tome V. S. 291.)

$$\frac{\partial V}{\partial x} + X + \frac{4\pi}{3}\alpha = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + Y + \frac{4\pi}{3}\beta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + Z + \frac{4\pi}{3}\gamma = 0,$$

in welchen die Glieder  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z}$  die Componenten der äusseren Kräfte;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Componenten der von den übrigen magnetischen Elementen ausgeübten Kräfte und  $\frac{4\pi}{3}\alpha$ ,  $\frac{4\pi}{3}\beta$ ,  $\frac{4\pi}{3}\gamma$  die Componenten der von dem freien Magnetismus des betrachteten Elementes ausgeübten Kräfte bedeuten. Durch die Einführung einer Function  $Q$ , welche das inducirte Potential des ganzen Körpers darstellt, wird aus den vorigen Gleichungen (s. a. a. O. S. 299.)

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{4\pi\alpha(1-k)}{3} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{4\pi\beta(1-k)}{3} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{4\pi\gamma(1-k)}{3} = 0.$$

Indem sich nun durch weitere Betrachtungen auf Grund der Theorie der elektrischen Induction die Werte der 3 Functionen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,

$\gamma$  ergeben, übersieht man, dass die Aufstellung der obigen Gleichgewichtsbedingungen in der That ein Mittel gibt, den Wert des inducirten Potentials  $Q$  auszudrücken durch das gegebene  $V$ . Auf S. 294. ergibt sich der Wert für  $Q$

$$Q = \iiint \left\{ \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x_1} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y_1} \beta + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z_1} \gamma \right\} k dx_1 dy_1 dz_1$$

in welchem die Integration über den ganzen inducirten Körper zu erstrecken ist;  $\varrho$  die Entfernung des Volumelementes  $(dx_1 dy_1 dz_1)$  von demjenigen Punkt  $(xyz)$  bedeutet, auf welchen sich das Potential bezieht, und  $\alpha, \beta, \gamma$  als die Differentialquotienten einer Function  $\varphi$  zu betrachten sind, welche wiederum aus dem gegebenen  $V$  durch Reihenentwicklung nach den sinus und cosinus gewisser Winkel gebildet wird. Eine bemerkenswerte Umgestaltung erfährt der Ausdruck für  $Q$  auf S. 303., indem das dreifache Integral der obigen Gleichung auf folgendes Oberflächenintegral reducirt wird

$$Q = k \int \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos l' + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \cos m' + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \cos n' \right\} \frac{d\omega}{\varrho}$$

in welchem  $l, m, n$  die Richtungswinkel der Oberflächennormale des inducirten Körpers bedeuten. Man erfährt durch diese Form, dass die Wirkung des inducirten Magnetismus sich immer ersetzen lässt durch diejenige einer gewissen fingirten einfachen Oberflächenbelegung des Körpers.

Die weitere Behandlung der in dem Ausdrucke für  $Q$  auftretenden Grössen  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$  ist weder von Poisson noch von Green, welcher in seinem Essay on the application of mathematical analysis to the theories of Electricity and Magnetism (Crelle Journal Bd. 39. 44. 47.) dasselbe Problem in ähnlicher Weise darlegt, in besonders übersichtlichen Formen gegeben.

Nach einer erheblich abweichenden Methode ist nun in neuerer Zeit die Formel für das inducirte Potential entwickelt worden von Beer in seiner „Einleitung in die Elektrostatik etc.“. Gewisse Unvollkommenheiten, welche sich in dieser Beer'schen Abhandlung befinden, werden es gerechtfertigt erscheinen lassen, auf's Neue eine Darstellung dieser Methode zu geben.

Dieser Zweck wird von der vorliegenden Arbeit zu erreichen versucht. Der § 1. enthält eine Darstellung der Methode der successiven Induction, welche sich sehr eng an die Beer'sche Methode anschliesst. Die Richtigkeit des gewonnenen Resultates ergibt sich im § 2. durch Vergleichung mit einem Resultate von C. Neumann, der in seinem

jüngst erschienenen Werke „Untersuchungen über das Newton'sche und logarithmische Potential“ auf Grund der Poisson'schen Ergebnisse eine sehr elegante und vollständige Lösung des vorliegenden Problems gegeben hat. Der § 3. soll die Abweichungen der Beer'schen Darstellung von derjenigen des § 1. aufdecken und begründen und hat daher den weiteren Zweck das Verständniss der ziemlich schwierigen Beer'schen Darstellung zu erleichtern. Im § 4. endlich soll eine Methode der successiven Induction zur Darstellung kommen, auf welche ich durch Herrn Professor Dr. C. Neumann aufmerksam gemacht bin.

### § 1.

1. Definitionen. Steht ein magnetisirbarer Körper  $\mathfrak{A}$  unter dem Einfluss von unveränderlichen äusseren Kräften, so wird derselbe einen magnetischen Zustand annehmen, welcher rücksichtlich seiner Wirkung defnirt ist durch das Potential von  $\mathfrak{A}$  auf einen variablen Punkt  $xyz$ . Man bezeichnet dies Potential als das inducirte Potential des Körpers  $\mathfrak{A}$ . Der mathematische Ausdruck desselben ist in seiner allgemeinsten Form

$$U_{(xyz)} = \sum \frac{\varepsilon \mu}{r},$$

wenn man unter  $\mu$  die Menge des an einem Punkte vorhandenen freien magnetischen Fluidums; unter  $r$  die Entfernung dieses Punktes von dem variablen Punkt  $(xyz)$  und unter  $\varepsilon$  den Wert  $\mp 1$  versteht. Es wird nun immer möglich sein, den obigen Ausdruck auf die Form zu bringen

$$U_{(xyz)} = \int_{\mathfrak{A}} W dx_1 dy_1 dz_1$$

in welchem die Integration über den ganzen Raum des Körpers  $\mathfrak{A}$  zu erstrecken ist;  $dx_1 dy_1 dz_1$  ein unendlich kleines Volumenelement bedeutet; und worin  $W$  als ein dem Punkte  $x_1 y_1 z_1$  zukommender Functionswert erscheint. Die dabei zu Grunde zu legende Vorstellung hat ihr Analogon bei der Betrachtung der ponderablen Materie. In ähnlicher Weise nämlich, wie man sich die Verteilung der in Wirklichkeit discontinuirlichen Materie eines Körpers, als continuirlich vorstellen kann, sobald es sich um die Aufstellung gewisser Integrale handelt, wird man auch für die nach der Poisson'schen Hypothese als in Wirklichkeit discontinuirlich verteilten magnetischen Fluida immer eine fingirte continuirliche magnetische Durchtränkung eines Körpers substituiren können. Die bei dieser Vorstellung zu überwindende Schwierigkeit, in jedem kleinsten Theilchen die gleichen Mengen nördlichen und südlichen Fluidums zu denken,

und doch zugleich eine Verschiedenheit von dem sogenannten neutralen magnetischen Zustand zu statuiren, ist von derselben Natur wie die analoge bei den sogenannten Doppelbelegungen auftretende.

Die Function  $W$  wird nun im Allgemeinen abhängig sein von der Lage des Punktes  $xyz$ , dem inducirenden Potentiale, der Beschaffenheit und den Dimensionen des magnetisirten Körpers. Lassen wir Alles bis auf die Dimensionen des Körpers ungeändert, so ist klar, dass bei abnehmender Grösse desselben sich die Function  $W$  im Allgemeinen ändern und sich jedenfalls einer bestimmten endlichen Grösse  $w$  nähern muss, wenn man die Dimensionen des magnetisirten Körpers bis zu endlicher Kleinheit abnehmen lässt. Alsdann wird zu setzen sein

$$U_{(xyz)} = u_{(xyz)} = w dx_1 dy_1 dz_1$$

Diesen Wert  $u$  bezeichnen wir als das inducirte Potential eines für sich allein gedachten Körperelementes oder zur Abkürzung als das *direct inducirte Potential* eines Körperelementes. Analog würde

$$U' = \int_{\mathfrak{A}} u = \int_{\mathfrak{A}} w dx_1 dy_1 dz_1$$

zu bezeichnen sein als das *direct inducirte Potential* des Körpers  $\mathfrak{A}$ .

**Zusatz.** Die obige Definition des *direct inducirten Potentials* ist unabhängig von der in der Einleitung scizzirten Vorstellungsweise Poisson's und verträglich mit der Ampère'schen Hypothese über das Wesen des Magnetismus.

2. Es handelt sich zunächst darum, einen analytischen Ausdruck für das *direct inducirte Potential* eines Körperelementes zu finden. Zu dem Zweck haben wir folgende Voraussetzungen zu machen. Wir nehmen erstens an, dass dasselbe in Bezug auf Punkte in endlicher Entfernung von derselben Form sei wie das Potential eines permanenten Magneten in Bezug auf  $\infty$  ferne Punkte. Zweitens setzen wir das nach irgend einer Richtung genommene magnetische Moment eines unendlich kleinen Körperelementes proportional der nach derselben Richtung genommenen Componente der inducirenden Kräfte und im Uebrigen nur abhängig von der Beschaffenheit des inducirten Körpers.

3. Das Potential eines permanenten Magneten in Bezug auf einen unendlich fernen Punkt ( $xyz$ ) ist bekanntlich

$$\frac{M \cdot \cos \delta}{R^2}$$

wenn  $M$  das magnetische Moment,  $R$  die Entfernung des Punktes ( $xyz$ ) von dem Magneten und  $\delta$  den Winkel zwischen  $R$  und der magnetischen Axe des Magneten bedeutet. Bezeichnet man einen beliebigen Punkt des Magneten mit  $x_1y_1z_1$ , so kann man vorstehenden Ausdruck auch schreiben

$$\frac{A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1)}{R^3}$$

worin nun die 3 Grössen  $A, B, C$  die magnetischen Momente des Magneten in Bezug auf die drei Coordinatenachsen bedeuten.

4. Bezeichnen wir einen beliebigen Punkt eines sehr kleinen inducirt magnetischen Körpers mit  $(x_1y_1z_1)$ , so wird der ersten Voraussetzung (2) zufolge sein Potential auf einen in endlicher Entfernung liegenden Punkt  $xyz$  von der Form sein

$$u = \frac{a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1)}{r^3}$$

worin  $r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$  ist und  $a, b, c$  die magnetischen Momente des kleinen Körpers in Bezug auf die drei Coordinatenachsen bedeuten. Wir wollen nun die zweite in (2) gemachte Voraussetzung in Anwendung bringen und die drei Momente  $a, b, c$  proportional setzen den nach den entsprechenden Richtungen genommenen Componenten der inducirenden Kräfte. Nennen wir zu dem Zwecke  $V$  das Potential des inducirenden Idiomagneticums, so sind

$$-\frac{\partial V}{\partial x_1}; \quad -\frac{\partial V}{\partial y_1}; \quad -\frac{\partial V}{\partial z_1}$$

die von demselben auf den Punkt  $x_1y_1z_1$  ausgeübten Kräfte und wir haben demnach zu setzen

$$a = -a' \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$b = -b' \frac{\partial V}{\partial y_1}$$

$$c = -c' \frac{\partial V}{\partial z_1}$$

wenn wir unter  $a', b', c'$  die Grössen verstehen, welche von der Beschaffenheit des inducirten Körpers in Hinsicht auf die Richtungen der Coordinatenachsen und ausserdem noch von den Dimensionen des betrachteten kleinen Körpers abhängen. Stellen wir uns fernerhin vor, dass der betrachtete kleine Körper bis zu unendlicher Kleinheit abnehme, so gehen  $a', b', c'$  über in

$$K_1 dx_1 dy_1 dz_1; \quad K_2 dx_1 dy_1 dz_1; \quad K_3 dx_1 dy_1 dz_1$$

wo nun die 3 Grössen  $K$  lediglich von der Beschaffenheit des Körpers abhängen. Da sich die folgenden Betrachtungen nur auf isotrope Körper beziehen, in denen also keine Richtung vor der andern bevorzugt ist, so können wir die drei Constanten  $K$  einander gleich setzen. Dadurch wird dann der obige Ausdruck für  $u$

$$u = -K \left\{ \frac{x-x_1}{r^3} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{y-y_1}{r^3} \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{z-z_1}{r^3} \frac{\partial V}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

Beachtet man endlich die bekannten Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-x_1}{r^3} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{y-y_1}{r^3} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} = \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{z-z_1}{r^3} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} = \frac{\partial T}{\partial z_1} \end{aligned} \right\} \text{ wo } T = \frac{1}{r} \text{ ges. ist.}$$

so vereinfacht sich der Ausdruck für  $u$  in

$$u = -K \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1} \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1} \frac{\partial V}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [a]$$

5. Bemerkung. Die vorstehende Entwicklung ist unter der stillschweigenden Voraussetzung gemacht, dass die gegebene Function  $V$  im Bereiche des Körperelementes  $dx_1 dy_1 dz_1$  sammt ihren ersten Ableitungen endliche und stetige Werte aufweise, eine Voraussetzung übrigens, die eo ipso dadurch realisirt ist, dass  $V$  das Potential äusserer magnetischer Massen ist.

6. Aus der Formel [a] folgt sofort, dass der Wert des in einem Körper  $\mathfrak{A}$  direct inducirten Potentials ist

$$U' = -K \iiint \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1} \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1} \frac{\partial V}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [b]$$

7. Der vorstehende Wert von  $U'$  ist wiederum unter der Voraussetzung gültig, dass  $V$  sammt seinen ersten Ableitungen im Bereiche des Körpers  $\mathfrak{A}$  endliche und stetige Werte aufweise.

8. Aus der in 4. gegebenen Entwicklung folgt ohne Weiteres: Vermehrt man das gegebene Potential  $V$  um die Potentiale  $V_1, V_2 \dots$

welche innerhalb  $\mathfrak{A}$  dieselben Eigenschaften wie  $V$  besitzen sollen, so wird das direct inducirte Potential zu vermehren sein um resp.

$$U_1' = -K \iiint \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1} \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1} \frac{\partial V_1}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$U_2' = -K \iiint \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1} \frac{\partial V_2}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1} \frac{\partial V_2}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

.....

9. Setzt man einen magnetisirbaren Körper  $\mathfrak{A}$  dem Einflusse gegebener unveränderlicher magnetischer Kräfte aus, so wird das inducirte Potential in Folge der gegenseitigen Einwirkung der Theile von  $\mathfrak{A}$  natürlich einen durchaus andern Wert bekommen als wir für den bisher betrachteten Hilfsbegriff des *direct inducirten Potentials* gefunden haben. Trotzdem werden die voraufgehenden Formeln einen bequemen Weg bieten, zur Aufstellung jenes endgültigen inducirten Potentials zu gelangen. Wir denken uns zu dem Zwecke den endgültigen magnetischen Zustand in folgender Weise entstanden. Das gegebene Idiomagneticum, dessen Potential  $V = V_{(xyz)}$  sei, inducire zunächst in jedem Körperelemente von  $\mathfrak{A}$  in der Weise Magnetismus, als ob keine Einwirkung der Theile des Körpers  $\mathfrak{A}$  unter einander stattfände; oder, präciser ausgedrückt, es werde zunächst in solcher Weise Magnetismus inducirt, dass das Potential desselben dem oben definirten *direct inducirten Potentials* gleichkommt. Diesen Vorgang bezeichnen wir als den ersten Inductionsact. Das durch diesen ersten Act inducirte Potential bezeichnen wir, je nachdem der Punkt, auf welchen sich dasselbe bezieht, ein äusserer oder innerer ist, durch  $S_1$  und  $V_1$ . Die Werte für  $S_1$  und  $V_1$  ergeben sich unmittelbar aus [b]. Es wird

$$S_1 = -K \iiint_{\mathfrak{A}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T_a}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T_a}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T_a}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [c]$$

sein. Dabei soll der dem  $T$  hinzugefügte Index  $a$  andeuten, dass die Punkte  $(xyz)$ , welche als die Centren der  $r$  zu betrachten sind, ausserhalb  $\mathfrak{A}$  liegen. Es wird ferner sein

$$V_1 = -K \iiint_{\mathfrak{A}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [d]$$

worin der dem  $T$  hinzugefügte Index  $i$  andeuten soll, dass die  $T$  sich auf innere Punkte als Centren der  $r$  beziehen.

10. Bevor wir zum 2ten Inductionsact übergehen, wollen wir die für  $S_1$  und  $V_1$  gewonnenen Ausdrücke noch einer Umgestaltung

unterwerfen und dabei zugleich die Eigenschaften der Function  $V_1$  etwas näher betrachten. Wir gehen dabei von einem bekannten Green'schen Satze aus, der z. B. von Beer in seiner „Einleitung in die Elektrostat. etc.“ S. 15. bewiesen wird. Derselbe lautet: Sind  $G$  und  $H$  zwei Functionen der rechtwinkligen Coordinaten  $xyz$ , welche innerhalb eines Körpers  $\mathfrak{A}$  endliche und stetige Werte aufweisen, so ist jederzeit

$$\iiint G \Delta^2 H dx dy dz = - \int G \frac{\partial H}{\partial \nu} d\sigma - \iiint \left\{ \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial z} \right\} dx dy dz$$

worin das erste Integral rechter Hand über die Oberfläche von  $\mathfrak{A}$ , die beiden andern Integrale über den ganzen Raum von  $\mathfrak{A}$  zu erstrecken sind; worin ferner  $\Delta^2 H$  die übliche Bedeutung  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$

hat;  $d\sigma$  ein Flächenelement und  $\frac{\partial \dots}{\partial \nu}$  eine Differentiation nach der innern Normale der Oberfläche bedeutet. Die von uns betrachteten Functionen  $V$  und  $T_a$  besitzen nun im Innern von  $\mathfrak{A}$  die Eigenschaften der Stetigkeit und Endlichkeit. Wir können demnach auf diese beiden Functionen den angezogenen Green'schen Satz sofort anwenden, indem wir  $G = T_a$  und  $H = V$  setzen. Ersetzen wir noch die laufenden Coordinaten von  $\mathfrak{A}$  durch  $x_1 y_1 z_1$  und multipliciren alle drei Glieder des Green'schen Satzes mit  $K$ , so ist

$$K \iiint T_a \Delta^2 V dx_1 dy_1 dz_1 = - K \int T_a \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma - K \iiint \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T_a}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T_a}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T_a}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

oder

$$K \iiint T_a \Delta^2 V dx_1 dy_1 dz_1 = - K \int T_a \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma + S_1$$

Beachten wir ferner, dass nach bekanntem Satze  $\Delta^2 V$  innerhalb  $\mathfrak{A}$  gleich Null ist, so wird

$$S_1 = K \int T_a \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma \quad [e]$$

11. Aus dieser Formel für  $S$  ersehen wir nebenbei, dass der durch den ersten Inductionsact hervorgerufene Magnetismus in seiner Wirkung auf äussere Punkte ersetzt werden kann durch eine gewisse fingirte Oberflächenbelegung des Körpers, deren Dichtigkeit  $\eta_1$  sofort anzugeben ist als



$$\eta_1 = K \frac{\partial V}{\partial v} \quad [f]$$

Würde beispielsweise der Körper  $\mathfrak{A}$  ein prismatischer Stab sein, dessen Axe normal zu den Flächen constanten Potentials eines unendlich weit entfernten Idiomagneticums läge, so ist leicht zu übersehen, dass in diesem Falle der durch den ersten Inductionsact inducirte Magnetismus sich ersetzen lassen würde durch eine Belegung der beiden Endflächen.

12. Eine ähnliche Umformung des in 9. gewonnenen Ausdrucks für  $V_1$  ist nicht ohne Weiteres auszuführen, da die Function  $T_i$  im Innern von  $\mathfrak{A}$  unendlich gross wird. Wir benutzen daher folgendes bekannte Hilfsmittel. Um einen inneren Punkt  $(xyz)$ , für welchen wir den Wert von  $V_1$  ermitteln wollen, legen wir eine Kugel  $\mathfrak{R}$  von sehr kleinem Radius, und bezeichnen das übrige Stück von  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{B}$ , so dass

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{R}$$

ist. Alsdann wird

$$V_1 = (\mathfrak{B}) + (\mathfrak{R}) \quad [g]$$

sein, wenn man

$$(\mathfrak{B}) = -K \int_{\mathfrak{B}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

und

$$(\mathfrak{R}) = -K \int_{\mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

setzt, wo die Integrationen über die Räume  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{R}$  zu erstrecken sind. Was zunächst den Ausdruck für  $(\mathfrak{B})$  betrifft, so übersehen wir dass  $\mathcal{A}^2(\mathfrak{B}) = 0$  sein muss, da  $(\mathfrak{B})$  für den im Innern der Kugel  $\mathfrak{R}$  gelegenen Punkt  $xyz$  als ein Potential äusserer Massen zu betrachten ist. Aus demselben Grunde ist auch  $(\mathfrak{B})$  sammt seinen ersten Ableitungen innerhalb  $\mathfrak{R}$  endlich und stetig. Ausserdem sind in dem Ausdrucke für  $(\mathfrak{B})$   $V$  und  $T_i$  zwei Functionen, welche innerhalb  $\mathfrak{B}$  endliche und stetige Werte besitzen. Wir können auf  $(\mathfrak{B})$  daher den obigen Green'schen Satz (10) anwenden und erhalten

$$(\mathfrak{B}) = K \int_{\mathfrak{B}} T_i \frac{\partial V}{\partial v} d\sigma$$

Die Oberfläche von  $\mathfrak{B}$  besteht aus den beiden Oberflächen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{R}$ . Wenn wir demnach eine Differentiation nach der äusseren Normale der Kugel  $\mathfrak{R}$  durch  $\frac{\partial \dots}{\partial N}$  bezeichnen, so wird

$$(\mathfrak{B}) = K \int_{\mathfrak{A}} T_i \frac{\partial V}{\partial v} d\sigma + K \int_{\mathfrak{R}} T_i \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma \quad [h]$$

Rücksichtlich des Ausdruckes für  $(\mathfrak{R})$  können wir bei sehr klein gedachtem Radius der Kugel ohne erheblichen Fehler die Werte  $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y_1}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z_1}$  als constant betrachten und vor das Integrationszeichen setzen, so dass

$$(\mathfrak{R}) = -K \frac{\partial V}{\partial x_1} \int \frac{\partial T_i}{\partial x_1} dx_1 dy_1 dz_1 - K \frac{\partial V}{\partial y_1} \int \frac{\partial T_i}{\partial y_1} dx_1 dy_1 dz_1 - K \frac{\partial V}{\partial z_1} \int \frac{\partial T_i}{\partial z_1} dx_1 dy_1 dz_1$$

Nach einem bekannten Satze über das Potential einer homogenen Kugel auf innere Punkte ist nun

$$\int \frac{\partial T_i}{\partial x_1} dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{4\pi}{3} (x-a)$$

$$\int \frac{\partial T_i}{\partial y_1} dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{4\pi}{3} (y-b)$$

$$\int \frac{\partial T_i}{\partial z_1} dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{4\pi}{3} (z-c)$$

wenn  $a, b, c$  die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel bedenten. Substituiren wir diese Werte in den letzten Ausdruck für  $(\mathfrak{R})$  und vertauschen gleichzeitig  $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y_1}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z_1}$  mit  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z}$ , was offenbar für die Ausdehnung der kleinen Kugel erlaubt ist, so wird

$$(\mathfrak{R}) = -K \frac{4\pi}{3} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} (x-a) + \frac{\partial V}{\partial y} (y-b) + \frac{\partial V}{\partial z} (z-c) \right\}$$

Der rechter Hand stehende Ausdruck in Klammern ist aber bei äusserst klein gedachtem Radius der Kugel nichts Anderes als das vollständige Differential von  $V$ . Daher kann man die vorige Gleichung auch schreiben

$$(\mathfrak{R}) = -K \frac{4\pi}{3} (V_{xyz} - V_{abc}) \quad [1]$$

Hieraus folgern wir zunächst, dass  $\mathcal{A}^2(\mathfrak{R}) = 0$  ist, denn es ist  $\mathcal{A}^2 V = 0$ ; ferner sehen wir, dass  $(\mathfrak{R})$  und seine ersten Ableitungen endliche Werte haben müssen.

Lassen wir nun den Radius der kleinen Kugel  $\mathfrak{R}$  bis zum vollständigen Verschwinden abnehmen, so erhält in dem obigen Ausdrucke für  $(\mathfrak{R})$  das Integral  $\int_{\mathfrak{R}} T_i \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma$  den Wert Null und in dem

Ausdrücke für  $(\mathfrak{R})$  fällt der Punkt  $(xyz)$  mit  $(abc)$  zusammen, so dass  $(\mathfrak{R}) = 0$  wird. Demnach wird

$$V_1 = (\mathfrak{S}) + (\mathfrak{R}) = K \int_{\mathfrak{A}} T_i \frac{\partial V}{\partial v} d\sigma \quad [\text{k}]$$

13. Die letzte Gleichung lässt sich mit Hilfe eines bekannten Green'schen Satzes noch anders ausdrücken. Ist nämlich  $\Phi$  eine Function, welche sammt ihren ersten Ableitungen innerhalb eines Körpers  $\mathfrak{A}$  endlich und stetig bleibt, und ausserdem der Bedingung Genüge leistet  $\Delta^2 \Phi = 0$ , so besagt jener Satz, dass für einen im Innern von  $\mathfrak{A}$  gelegenen Punkt  $i$  jederzeit

$$\int \left\{ \Phi \frac{\partial T_i}{\partial v} - T_i \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\} d\sigma = 4\pi \Phi_i$$

ist, wenn man unter  $T_i$  die reciproke Entfernung des innern Punktes  $i$  von dem Oberflächenelement  $d\sigma$  versteht. Die Anwendung dieses Satzes auf den obigen Ausdruck für  $V_1$  ergibt

$$V_1 = K \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma - 4\pi K V \quad [\text{l}]$$

14. In 12. sahen wir, dass die beiden Teile von  $V_1$   $(\mathfrak{S})$  und  $(\mathfrak{R})$  innerhalb  $\mathfrak{A}$  sammt ihren ersten Ableitungen endlich und stetig waren und der Gleichung  $\Delta^2 = 0$  genügten. Dasselbe gilt daher von  $V_1$ .

15. Das bisherige Ergebniss lautet demnach zusammengefasst: Steht ein magnetisirbarer Körper  $\mathfrak{A}$  unter dem Einfluss äusserer unveränderlicher Kräfte, so ist das durch den ersten Inductionsact inducirte, oder anders ausgedrückt das *direct inducirte Potential* (s. 2.) auf äussere Punkte

$$S_1 = K \int T_a \frac{\partial V}{\partial v} d\sigma \quad [\text{m}]$$

und dasjenige auf innere Punkte

$$V_1 = K \int T_i \frac{\partial V}{\partial v} d\sigma = K \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma = 4\pi K V \quad [\text{n}]$$

Dem Potentiale  $V_1$  kommen innerhalb  $\mathfrak{A}$  dieselben Haupteigenschaften zu, wie dem ursprünglichen Potentiale  $V$ .

16. Wir gehen nun zu einem weiteren Stadium der Magnetisirung des Körpers  $\mathfrak{A}$  über. Durch den ersten Inductionsact ist in demselben ein gewisses Quantum Magnetismus inducirt worden, das rücksichtlich seiner Wirkung auf innere Punkte vollständig definirt ist durch das Potential  $V_1$ . Diese hinzugekommenen magnetischen Kräfte werden nun eine neue inducirende Wirkung auf den Körper  $\mathfrak{A}$  üben und wir

stellen uns vor, dass diese neue Induction wieder in der Weise vor sich ginge, als ob dabei keine weitere Einwirkung der einzelnen Teile von  $\mathfrak{A}$  untereinander stattfände; oder, mit andern Worten, es mögen diejenigen magnetischen Kräfte, deren Potential  $V_1$  ist, in der Weise Magnetismus induciren, dass das Potential desselben dem durch  $V_1$  *direct inducirten Potentiale* gleichkommt. Diesen Vorgang nennen wir den 2ten Inductionsact.

17. Da wir gesehen haben, dass  $V_1$  innerhalb  $\mathfrak{A}$  dieselben allgemeinen Eigenschaften besitzt, welche für  $V$  erforderlich waren, um die Aufstellung der Ausdrücke für  $S_1$  und  $V_1$  zu ermöglichen, so können wir nun unmittelbar das Resultat in 15. benutzen, um dasjenige *direct inducirte Potentiale* aufzustellen, welches durch die inducirenden magnetischen Kräfte mit dem Potentiale  $V_1$  hervorgerufen wird. Dasselbe wird für äussere Punkte

$$S_2 = K \int T_a \frac{\partial V_1}{\partial v} d\sigma \quad [o]$$

und für innere Punkte

$$V_2 = K \int T_i \frac{\partial V_1}{\partial v} d\sigma \quad [p]$$

oder

$$V_2 = K \int V_1 \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma - 4\pi K V_1$$

18. Durch dieselbe Beweisführung wie sie in 12. und 14. gegeben ist, sehen wir, dass dem Potentiale  $V_2$  innerhalb  $\mathfrak{A}$  dieselben allgemeinen Eigenschaften zukommen müssen, wie dem  $V_1$  und  $V$ .

19. Nach vollendetem 2ten Inductionsacte besitzt der Körper  $\mathfrak{A}$  Magnetismus, dessen Gesamtpotential auf äussere Punkte

$$S_1 + S_2$$

und auf innere Punkte

$$V_1 + V_2 \text{ ist.}$$

20. Die nun folgenden weiteren Inductionsacte lassen wir in gleicher Weise darin bestehen, dass die durch den jedesmal vorausgegangenen Inductionsact neu inducirten Magnetismen ihrerseits auf's Neue Magnetismus induciren, was immer in der Weise zu denken ist, als ob während eines Inductionsactes keine Einwirkung der einzelnen Teile von  $\mathfrak{A}$  unter einander stattfände. Der 3te, 4te, 5te etc. Inductionsact besteht also darin, dass in Folge der Potentiale resp.  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$  etc. die *direct inducirten Potentiale* resp.  $V_3$ ,  $V_4$ ,  $V_5$  etc. hervorgerufen werden.

21. Nach  $n$  Inductionsacten wird somit der Körper  $\mathfrak{A}$  ein Potential  $Q_n$  auf äussere Punkte besitzen, dessen Wert

$$Q_a^{(n)} = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n \quad [q]$$

ist; und es wird der Körper  $\mathfrak{A}$  auf innere Punkte ein Potential  $Q_i$  besitzen, dessen Wert

$$Q_i^{(n)} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \quad [r]$$

ist. Hierin ist

$$V_1 = K \int T_i \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma = K \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma - 4\pi K V$$

und allgemein

$$V_k = K \int T_i \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \nu} d\sigma = K \int V_{k-1} \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma - 4\pi K V_{k-1} \quad [s]$$

ferner

$$S_1 = K \int T_a \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma$$

und allgemein

$$S_k = K \int T_a \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \nu} d\sigma \quad [t]$$

Den Ausdruck für  $Q_a^{(n)}$  können wir unter Berücksichtigung von [t] auch schreiben

$$Q_a^{(n)} = K \int T_a \frac{\partial (V + V_1 + V_2 + \dots + V_n)}{\partial \nu} d\sigma$$

woraus mit Rücksicht auf [r]

$$Q_a^{(n)} = K \int T_a \frac{\partial (V + Q_i^{(n)})}{\partial \nu} d\sigma \quad [u]$$

wird. Desgleichen kann der Ausdruck für  $Q_i^{(n)}$  geschrieben werden

$$Q_i^{(n)} = K \int T_i \frac{\partial (V + V_1 + V_2 + \dots + V_n)}{\partial \nu} d\sigma$$

oder

$$Q_i^{(n)} = K \int T_i \frac{\partial (V + Q_a^{(n)})}{\partial \nu} d\sigma \quad [v]$$

22. Indem wir nun mit Beer die Annahme machen, dass für  $n = \infty$  (oder nach unendlich vielen Inductionsacten) der im Körper  $\mathfrak{A}$  nach unserm fingirten Verfahren hervorgerufene magnetische Zustand mit demjenigen identisch wird, welcher in Wirklichkeit eintritt, und indem wir die dem wirklichen Zustände entsprechenden inducirten Potentiale resp. auf einen äusseren und inneren Punkt mit  $Q_a$  und  $Q_i$  bezeichnen, erhalten wir:

$$Q_i = V_1 + V_2 + \dots \text{ in inf.}$$

$$Q_a = S_1 + S_2 + \dots \text{ in inf.}$$

$$Q_a = K \int T_a \frac{\partial(V + V_1 + V_2 + \dots \text{ in inf.})}{\partial v} d\sigma$$

oder

$$Q_a = K \int T_a \frac{\partial(V + Q_i)}{\partial v} d\sigma \quad [w]$$

und ferner:

$$Q_i = K \int T_i \frac{\partial(V + V_1 + V_2 + \dots \text{ in inf.})}{\partial v} d\sigma$$

oder

$$Q_i = K \int T_i \frac{\partial(V + Q_i)}{\partial v} d\sigma. \quad [x]$$

Hierin sind die Functionen  $V$  nach dem recurrenten Gesetz (21. [s]) zu ermitteln.

23. Obwol das Problem des inducirten Magnetismus durch die Formeln [w] und [x] gelöst ist, nehmen wir doch noch eine Umgestaltung derselben vor, um eine bessere Vergleichung derselben mit den von Beer, Neumann und Poisson gefundenen Resultaten anstellen zu können. Zu diesem Zwecke setzen wir in dem Ausdrucke  $V + Q_i = V + V_1 + V_2 + \dots$  diejenigen Werte wirklich ein, welche sich aus [s] ergeben. Es war

$$V_1 = K \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma - 4\pi K V$$

Setzen wir zur Abkürzung  $\lambda = 4\pi K$ , so wird

$$V_1 = \lambda \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma - \lambda V$$

oder auch

$$V_1 = -\lambda V + \lambda \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma$$

Ebenso wird

$$V_2 = -\lambda V_1 + \lambda \frac{1}{4\pi} \int V_1 \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma \quad [y]$$

$$V_3 = -\lambda V_2 + \lambda \frac{1}{4\pi} \int V_2 \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma$$

.....

Ausserdem wollen wir eine Reihenfolge neuer Functionen bilden durch die Abkürzungen

$$F_1 = \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi} \int F_1 \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma \quad [z]$$

$$F_3 = \frac{1}{4\pi} \int F_2 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$

.....

in welchen sämtliche Functionswerte sich auf innere resp. an der innern Seite der Oberfläche von  $\mathfrak{A}$  gelegene Punkte beziehen. Durch Einführung dieser Functionen  $F$  in die Gleichungen [y] wird zunächst

$$V_1 = -\lambda V + \lambda F_1$$

Indem wir diesen Ausdruck substituiren in die Gleichung [y] für  $V_2$ , wird

$$V_2 = -\lambda(-\lambda V + \lambda F_1) - \lambda^2 \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma + \lambda^2 \frac{1}{4\pi} \int F_1 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$

oder

$$V_2 = \lambda^2 V - 2\lambda^2 F_1 + \lambda^2 F_2$$

Die Substitution dieses Wertes in die Gleichung für  $V_3$  ergibt

$$V_3 = -\lambda(\lambda^2 V - 2\lambda^2 F_1 + \lambda^2 F_2) + \lambda^3 \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma \\ - 2\lambda^3 \frac{1}{4\pi} \int F_1 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma + \lambda^3 \frac{1}{4\pi} \int F_2 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$

oder

$$V_3 = -\lambda^3 V + 3\lambda^3 F_1 - 3\lambda^3 F_2 + \lambda^3 F_3$$

Wir übersehen bereits das Gesetz, nach welchem die Bildung dieser Formeln fortschreitet, und erhalten

$$\begin{aligned} V &= V \\ V_1 &= -\lambda V + \lambda F_1 \\ V_2 &= \lambda^2 V - 2\lambda^2 F_1 + \lambda^2 F_2 \\ V_3 &= -\lambda^3 V + 3\lambda^3 F_1 - 3\lambda^3 F_2 + \lambda^3 F_3 \\ V_4 &= \lambda^4 V - 4\lambda^4 F_1 + 6\lambda^4 F_2 - 4\lambda^4 F_3 + \lambda^4 F_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Durch Addition der Verticalcolumnen ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} V + Q_i &= V(1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \dots) \\ &\quad + F_1(1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \dots)\lambda \\ &\quad + F_2(1 - 3\lambda + 6\lambda^2 - \dots)\lambda^2 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Beachten wir, dass

$$1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \dots = \frac{1}{1 + \lambda}$$

$$1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \dots = \frac{1}{(1+\lambda)^3}$$

$$1 - 3\lambda + 6\lambda^2 - \dots = \frac{1}{(1+\lambda)^3}$$

.....

und setzen wir gleichzeitig

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} = \kappa; \quad \lambda = \frac{\kappa}{1-\kappa}$$

so wird

$$V + Q_i = (1-\kappa) \{V + \kappa F_1 + \kappa^2 F_2 + \kappa^3 F_3 + \dots \text{ in inf.} \} \quad [\text{aa}]$$

24. Durch Substituierung dieser Gleichung [aa] werden die Gleichungen [w] und [x], indem wir berücksichtigen, dass

$$K = \frac{1}{4\pi} \lambda = \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa}{1-\kappa} \quad [\text{bb}]$$

$$Q_a = \frac{\kappa}{4\pi} \int T_a \frac{\partial(V + \kappa F_1 + \kappa^2 F_2 + \dots \text{ in inf.})}{\partial \nu} d\sigma \quad [\text{cc}]$$

$$Q_i = \frac{\kappa}{4\pi} \int T_i \frac{\partial(V + \kappa F_1 + \kappa^2 F_2 + \dots \text{ in inf.})}{\partial \nu} d\sigma \quad [\text{dd}]$$

25. Das gewonnene Resultat sprechen wir so aus:

I. Steht ein magnetisirbarer Körper  $\mathfrak{A}$  unter dem Einfluss unveränderlicher äusserer Kräfte, deren Potential  $V$  ist, so ist das inducirte Potential bezogen auf einen beliebigen Punkt  $(xyz)$

$$Q_{(xyz)} = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathfrak{A}} T_{(xyz)} \frac{\partial(V + \kappa F_1 + \kappa^2 F_2 + \dots \text{ in inf.})}{\partial \nu} d\sigma \quad [\text{ee}]$$

worin die Integration über die Oberfläche des Körpers  $\mathfrak{A}$  zu erstrecken ist;  $T$  die reciproke Entfernung des Flächenelementes  $d\sigma$  von dem Punkte  $(xyz)$  bedeutet; unter  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  eine Differentiation nach der innern Normale von  $\mathfrak{A}$  verstanden ist; und worin die Functionen  $F$  nach dem recurrenten Gesetze [z] aus dem gegebenen  $V$  abzuleiten sind.

II. Die Wirkung des inducirten Magnetismus auf einen äusseren oder inneren Punkt kann ersetzt werden durch die Wirkung einer fingirten einfachen Oberflächenbelegung, für deren Dichtigkeit die Formel gilt

$$H = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\partial(V + \kappa F_1 + \kappa^2 F_2 + \dots \text{ in inf.})}{\partial \nu} \quad [\text{ff}]$$



## § 2.

Vergleichung des im vorigen § gefundenen Resultates mit demjenigen von C. Neumann.

1. In dem jüngst erschienenen Werke von C. Neumann „Untersuchungen über das Newton'sche und logarithmische Potential“ heisst es S. 247. u. ff.:

„Wirken auf einen magnetisirbaren Körper (der z. B. aus weichem Eisen bestehen kann) von Aussen her unveränderliche magnetische Kräfte ein, deren Potential  $F$  gegeben ist, so kann das sogenannte „inducirte Potential  $Q$  stets angesehen werden als das Potential einer gewissen fingirten einfachen Belegung der Oberfläche des Körpers, deren Dichtigkeit den Wert hat

$$K \frac{\partial(Q+F)}{\partial \nu}$$

„so dass also für sämtliche Punkte  $i$  und  $a$  die Formeln gelten:

$$Q_i = K \int T_i \frac{\partial(Q+F)}{\partial \nu} d\sigma$$

$$Q_a = K \int T_a \frac{\partial(Q+F)}{\partial \nu} d\sigma$$

„Von diesen beiden Formeln ist bereits die erstere ausreichend, um „das Potential  $Q$  und die Dichtigkeit  $K \frac{\partial(Q+F)}{\partial \nu}$  eindeutig zu bestimmen.“

Neumann findet sodann auf S. 250. die Werte:

$$Q_i = (1 - \kappa) \{F_i + \kappa F'_i + \kappa^2 F''_i + \dots\} - F_i \quad [a]$$

$$K \frac{\partial(Q+F)}{\partial \nu} = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\partial(F + \kappa F' + \kappa^2 F'' + \dots)}{\partial \nu} \quad [b]$$

worin durch  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  eine Differentiation nach der innern Normale von  $\mathfrak{A}$  verstanden ist;  $d\sigma$  ein Flächenelement bedeutet; zwischen den Constanten  $\kappa$  und  $K$  die Beziehung stattfindet

$$K = \frac{\kappa}{4\pi(1 - \kappa)} \quad [c]$$

und worin die Functionen  $F'_i$ ,  $F''_i$ , ... nach folgendem Gesetze zu ermitteln sind

$$\begin{aligned}
 F_i &= F \\
 F_i' &= \frac{1}{4\pi} \int F \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma \\
 F_i'' &= \frac{1}{4\pi} \int F' \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{d}$$

2. Wie sofort zu übersehen ist, befinden sich die Neumann'schen Formeln in vollständiger Uebereinstimmung mit denjenigen des vorigen §, sobald wir die frühere Bezeichnungswaise

$$\begin{aligned}
 &V; \quad F_1; \quad F_2; \dots \\
 \text{resp. ändern in} \quad &F; \quad F'; \quad F''; \dots
 \end{aligned}$$

3. Eine Vergleichung dieser Resultate mit den von Poisson gegebenen Gleichungen findet sich in dem genannten Neumann'schen Werke auf S. 261. und 262. Daraus ergibt sich, dass die von Poisson (Mém. de l'Acad. S. 294. 302. 303.) aufgestellten Formeln

$$Q = \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\rho} (k\alpha) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho} (k\beta) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{\rho} (k\gamma) \right) \right\} d\xi d\eta d\zeta \tag{e}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\
 \beta &= \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\
 \gamma &= \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}
 \end{aligned} \right\} \tag{f}$$

$$V + Q + \frac{4\pi(1-k)}{3} \varphi = 0 \tag{g}$$

$$Q = -k \int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{d\sigma}{\rho} \tag{h}$$

sich in vollständiger Uebereinstimmung mit denjenigen Formeln befinden, von welchen Neumann bei seiner Entwicklung ausgegangen ist. Es zeigt sich, dass die ursprüngliche Neumann'sche Constante  $K$  zur Poisson'schen  $k$  in der Beziehung steht

$$K = \frac{3k}{4\pi(1-k)} \tag{i}$$

oder dass zwischen dem Neumann'schen  $\kappa$  und dem Poisson'schen  $k$  zufolge der Gleichung

$$K = \frac{\kappa}{4\pi(1-\kappa)}$$

die Beziehung besteht

$$\kappa = \frac{3k}{1+2k} \quad [k]$$

4. Da nun die Constanten  $\kappa$  und  $K$  des vorigen § sich als identisch mit denselben von Neumann gebrauchten Constanten erwiesen haben, so gelten mithin für unsere beiden Constanten  $\kappa$  und  $K$  dieselben Beziehungen zum Poisson'schen  $k$ .

5. Diese Beziehungen zwischen den Constanten können wir zu einer teilweisen Prüfung der Richtigkeit unserer Entwicklung resp. unserer Voraussetzungen benutzen. Es ist nämlich klar, dass wir zu denselben Beziehungen gelangen müssen, wenn wir unsere Ausgangsformel (§ 1. [a]) direct mit den Poisson'schen Gleichungen vergleichen. Aus der Poisson'schen Formel [e] folgt, wenn wir die Bezeichnung  $\frac{1}{\rho}$  mit  $T$  und  $\xi\eta\zeta$  mit  $x_1y_1z_1$  vertauschen, für das inducirte Potential eines Körperelementes

$$q = \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1}(k\alpha) + \frac{\partial T}{\partial y_1}(k\beta) + \frac{\partial T}{\partial z_1}(k\gamma) \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [l]$$

Diese Formel muss identisch werden mit unserer Formel (§ 1. [a])

$$u = -K \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1} \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1} \frac{\partial V}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [m]$$

sobald wir annehmen, dass sich der Ausdruck für  $q$  auf ein für sich allein gedachtes Körperelement bezieht oder mit andern Worten, wenn wir den Fall fingiren, dass von Seiten des ganzen Körpers  $\mathfrak{A}$  keine Einwirkung auf das betrachtete Körperelement stattfindet. Unter dieser Voraussetzung geht dann offenbar die Poisson'sche Gleichung [g] über in

$$V + \frac{4\pi(1-k)}{3} \varphi = 0 \quad [n]$$

woraus

$$\varphi = -\frac{3}{4\pi(1-k)} V \quad [o]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \alpha = -\frac{3}{4\pi(1-k)} \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \beta = -\frac{3}{4\pi(1-k)} \frac{\partial V}{\partial y_1} \quad [p]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \gamma = -\frac{3}{4\pi(1-k)} \frac{\partial V}{\partial z_1}$$

folgt. Durch Substitution dieser Werte in [1] wird

$$q = -\frac{3k}{4\pi(1-k)} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

Dieser Ausdruck ist sonach identisch mit unserer Formel [m] und es ergibt sich zwischen den Constanten  $K$  und  $k$  wieder die frühere Beziehung

$$K = -\frac{3k}{4\pi(1-k)}$$

### § 3.

#### Vergleichung der im § 1. gegebenen Entwicklung mit derjenigen Beer's.

1. In seinem Werke „Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik“ entwickelt Beer auf S. 151. und 152. eine Formel für das inducirte Potential eines einzelnen Körperelementes. Er geht dabei von derselben in § 1. 2. gemachten ersten Voraussetzung aus, dass das Potential eines Körperelementes für Punkte in endlicher Entfernung von derselben Form sei, wie dasjenige eines permanenten Magneten in Bezug auf Punkte in unendlich grosser Entfernung. Anstatt der zweiten in § 1. 2. gemachten Voraussetzung nimmt Beer an, dass das fragliche Potential proportional sei der Menge des inducirenden Idiomagneticums. Er gelangt mit Hilfe dieser Voraussetzungen in ähnlicher Weise wie Green (Crelle Journ. Bd. 47. S. 196.) zu dem Ausdruck (s. S. 156.)

$$-\frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} dk \quad [a]$$

Die Herleitung dieses Ausdruckes ist unabhängig von der Vorstellung der Poisson'schen magnetischen Elemente gemacht; und steht der Ausdruck mit unserer Formel (§ 1. [a]) der Form nach in vollständiger Uebereinstimmung, wenn man statt der Beer'schen Constanten  $\frac{1}{\alpha^2}$  unsere Constante  $K$  setzt und noch die Schreibweise  $dk$  durch die ausführlichere  $dx_1 dy_1 dz_1$  ersetzt. Bei der weiteren Entwicklung kommt nun aber die Vorstellung der magnetischen Elemente wieder zum Vorschein\*). Beer denkt sich nämlich die Induction

\*) Die Abwechselung der Ausdrücke Körperelement, Volumenelement, Element, Molecül ist bei Beer nicht als zufällig zu betrachten. Es bedeuten die drei ersten Ausdrücke allerdings dasselbe, was wir bisher als Körperelement  $dx dy dz$  bezeichnet haben. Dagegen ist unter dem Molecül ein Poisson'sches „magnetisches Element“ zu verstehen.

des Körpers  $\mathfrak{A}$  durch äussere Massen mit dem Potentiale  $V$  in folgender Weise entstanden. Es werde zunächst in der Weise Magnetismus inducirt, als ob keine gegenseitige Einwirkung der magnetischen Elemente unter einander stattfände. Diesen Vorgang bezeichnet Beer als den ersten Inductionsact. Die Möglichkeit der gegenseitigen Einwirkung der einzelnen Teile eines und desselben magnetischen Elementes bleibt hierbei vorhanden. Ohne sich indessen über diese Vorstellungsweise genauer auszudrücken, nimmt Beer den obigen Ausdruck,  $[a]$  als das Potential eines Körperelementes nach vollendetem 1ten Inductionsact an. Unmittelbar folgt daraus das Potential des im ersten Inductionsact in  $\mathfrak{A}$  erzeugten Magnetismus bezogen auf äussere Punkte

$$S = -\frac{1}{\alpha^2} \int \left\{ \frac{\partial V}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} dk \quad [b]$$

Nunmehr geht Beer zum 2ten Inductionsact über. Derselbe besteht darin, dass in jedem einzelnen magnetischen Elemente ein weiteres Quantum Magnetismus dadurch erzeugt wird, dass die übrigen magnetischen Elemente eine inducirende Wirkung auf dasselbe ausüben in Folge des ihnen durch den ersten Inductionsact verliehenen Magnetismus. Um diese Wirkung analytisch ausdrücken zu können, ermittelt Beer (s. S. 158.) eine gewisse Function  $V_1$ , welche er gleichsetzt dem auf die Punkte eines magnetischen Elementes bezogenen Potentiale der übrigen magnetischen Elemente; wobei dies Potential als zugehörig betrachtet wird dem durch den ersten Inductionsact erzeugten Magnetismus. Indem Beer nun dieser Function  $V_1$  während des 2ten Inductionsactes genau dieselbe Rolle zuweist wie dem Potentiale  $V$  beim ersten Act, gewinnt er für dasjenige Potential eines Körperelementes, welches in Folge des 2ten Actes dem schon früher vorhandenen hinzuzufügen ist, den analogen Ausdruck

$$-\frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V_1}{\partial y'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V_1}{\partial z'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} dk$$

Hieraus folgt dann wieder unmittelbar, dass das Potential des Körpers  $\mathfrak{A}$  auf äussere Punkte in Folge des 2ten Inductionsactes zu vermehren ist um

$$S_1 = -\frac{1}{\alpha^2} \int \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V_1}{\partial y'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V_1}{\partial z'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} dk$$

Sodann wird wiederum eine Function  $V_2$  ermittelt, welche, bezogen auf die Punkte eines magnetischen Elementes, gleich gesetzt werden kann demjenigen Potentiale der übrigen magnetischen Elemente,

welches ihnen zukommt durch den beim 2ten Inductionsact in ihnen hervorgerufenen Magnetismus. Der 3te, 4te, 5te Inductionsact besteht in analoger Weise darin, dass in jedem magnetischen Element auf's Neue ein Quantum Magnetismus erzeugt wird und zwar durch diejenigen magnetischen Quanta, welche in den übrigen magnetischen Elementen während des vorausgehenden resp. 2ten, 3ten, 4ten etc. Inductionsactes hervorgerufen waren. Durch eine unendliche Anzahl aufeinanderfolgender Inductionsacte wird das Potential des Körpers  $\mathcal{V}$  auf äussere Punkte successive vermehrt um  $S_2, S_3, \dots$ . Das inducirte Potential wird mithin

$$T = S + S_1 + S_2 + \dots \text{ in inf.} \quad [c]$$

Ausserdem sieht man, dass der endgültige magnetische Zustand der einzelnen magnetischen Elemente als eine Ueberlagerung aller derjenigen Magnetismen angesehen werden kann, welche successive durch die Potentiale  $V, V_1, V_2, \dots$  in ihnen erzeugt waren. Diese letztere Bemerkung drückt Beer so aus (S. 158.): „In dem durch das Potential „ $V$ “ influencirten Körper tritt ein magnetischer Zustand ein, wie er „auch einträte, wenn eine gegenseitige Einwirkung der Moleculs nicht „stattfände und das einzelne Element dem folgenden Potentiale ausgesetzt würde

$$U = V + V_1 + V_2 + \dots + C. \quad [d]$$

Die Beer'schen Functionen  $T$  und  $U$  laufen, wie man sofort bemerken wird, parallel den Functionen  $Q_a$  und  $(Q_i + V)$  des § 1.

2. In ähnlicher Weise wie in § 1. unterwirft Beer den Ausdruck für  $U$  einer Umgestaltung und findet auf S. 162

$$U = \frac{3-2\kappa}{3} (V + \kappa V' + \kappa^2 V'' + \dots) + C \quad [e]$$

worin die Constante  $\kappa$  zu seiner ursprünglichen Constanten  $\frac{1}{\alpha^2}$  in der Beziehung

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{3\kappa}{3-2\kappa} \quad [f]$$

steht; worin  $C$  eine willkürliche Constante ist; und worin die unsern früheren Functionen  $F_1, F_2, \dots$  parallel laufenden Functionen  $V', V'', \dots$  nach dem recurrenten Gesetz zu ermitteln sind

$$V = V$$

$$V' = -\frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds = V - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{r} ds$$

$$V'' = -\frac{1}{4\pi} \int V' \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds = V' - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V'}{\partial n} \frac{1}{r} ds$$

.....

[g]

Hierzu ist noch zu bemerken, dass unter  $\frac{\partial}{\partial n}$  die Differentiation nach der äusseren Normale der Oberfläche von  $\mathfrak{A}$  und unter  $ds$  ein Oberflächenelement von  $\mathfrak{A}$  verstanden ist.

Für die Function  $T$  findet Beer die Formeln (s. S. 162)

$$T = -\frac{3\kappa}{4\pi(3-2\kappa)} \int \frac{\partial U}{\partial n} \frac{1}{r} ds \quad [h]$$

oder

$$T = -\frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\partial(V + \kappa V' + \kappa^2 V'' + \dots)}{\partial n} \frac{1}{r} ds$$

Hieraus folgt ähnlich wie in § 1. 25., dass die Wirkung des inducirten Magnetismus auf äussere Punkte ersetzt werden kann durch eine gewisse fingirte einfache Oberflächenbelegung, als deren Dichtigkeit sich ergibt:

$$\varrho = -\frac{3\kappa}{4\pi(3-2\kappa)} \frac{\partial U}{\partial n} \quad [i]$$

oder

$$\varrho = -\frac{\kappa}{4\pi} \frac{\partial(V + \kappa V' + \kappa^2 V'' + \dots)}{\partial n}$$

3. Vergleichen wir nun zunächst die Formeln [h] und [i] mit den entsprechenden [cc] und [ff] des § 1., so bemerken wir, dass dieselben nicht ohne Weiteres übereinstimmen; denn es sind die Differentiationen bei Beer nach der äusseren Normale zu bilden. Es lässt sich mit den Beer'schen Formeln aber eine Umgestaltung vornehmen, durch welche dieselben mit denen des § 1. völlig zusammenstimmend werden. Obwol die Functionen  $V'$ ,  $V''$ , ... einer Differentiation nach der äusseren Normale unterzogen werden, so geht doch aus der von Beer auf S. 161. gegebenen Entwicklung hervor, dass dieselben sich auf innere Punkte beziehen. Daher können wir die Formeln [g] unter Anwendung unserer früheren Bezeichnungsweise  $\frac{1}{r} = T$ , und unter Berücksichtigung, dass  $\frac{\partial T_i}{\partial n} = -\frac{\partial T_i}{\partial \nu}$  ist, auch so schreiben

$$\begin{aligned} V &= V \\ V' &= \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma \\ V'' &= \frac{1}{4\pi} \int V' \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad [k]$$

In dieser Form erkennt man, dass  $V'$   $V''$  ... als die Potentiale einer

auf der Oberfläche von  $\mathfrak{A}$  ausgebreiteten Doppelbelegung angesehen werden können. Daher ist es erlaubt zu setzen

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial n} &= -\frac{\partial V}{\partial \nu} \\ \frac{\partial V'}{\partial n} &= -\frac{\partial V'}{\partial \nu} \\ \frac{\partial V''}{\partial n} &= -\frac{\partial V''}{\partial \nu} \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\quad [l]$$

Unter Berücksichtigung der vorstehenden Gleichungen [l] werden die Formeln [h] und [i], wenn wir noch das Beer'sche  $T$  mit dem früheren  $Q_a$  vertauschen:

$$\begin{aligned}Q_a &= \frac{\kappa}{4\pi} \int T_a \frac{\partial(V + \kappa V' + \kappa^2 V'' + \dots)}{\partial \nu} d\sigma \\ \varrho &= \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\partial(V + \kappa V' + \kappa^2 V'' + \dots)}{\partial \nu}\end{aligned}\quad [m]$$

und zwar haben zufolge der Gleichungen [k] die hier auftretenden Functionen  $V' V'' \dots$  genau dieselbe Bedeutung wie die Functionen  $F_1 F_2 \dots$  des § 1.

Die Beer'schen Formeln [h] und [i] stehen demnach in vollständiger Uebereinstimmung mit den Formeln [cc] und [ff] des § 1. Eine der Formel [dd] entsprechende Gleichung lässt sich indessen aus den Beer'schen Resultaten nicht direct ableiten.

4. Zusatz. Da sich aus 3. zugleich die Identität des Beer'schen  $\kappa$  mit dem unsrigen ergibt, so wird dadurch unter Berücksichtigung von § 2. [k] die von Beer auf S. 169. angegebene Beziehung seiner Constanten  $\kappa$  zur Poisson'schen  $k$ , nämlich

$$\kappa = \frac{3k}{1+2k}\quad [n]$$

verificirt.

5. Vergleichen wir nun ferner die Fundamentalformeln § 1. [a] und § 3. [a]

$$\begin{aligned}& -K \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \\ & - \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'} \frac{\partial T}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z'} \frac{\partial T}{\partial z'} \right\} dk\end{aligned}\quad [o]$$



so stimmen dieselben der Form nach zwar ebenfalls überein; sie zeigen indessen eine Abweichung in Bezug auf ihre Constanten. Denn während unsere Constante  $K$  zu dem  $\alpha$  des Endresultates in der Beziehung steht:

$$K = \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

steht die Beer'sche Constante  $\frac{1}{\alpha^2}$  zu demselben  $\alpha$  in der Beziehung:

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{3\alpha}{3-2\alpha} \quad [p]$$

Würden wir annehmen, dass die beiden Formeln [o] genau dieselbe Bedeutung hätten, so würde jene Abweichung zwischen den Constanten ihre Erklärung nur in einem entweder von uns oder von Beer gemachten analytischen Fehler finden können. Wie sich indessen zeigen wird, haben jene beiden Formeln [o] in der Tat eine verschiedene Bedeutung.

6. Die Beer'sche Entwicklung des inducirten Potentials stützt sich wie wir gesehen haben fortdauernd auf die Vorstellung der magnetischen Elemente, während die Darstellung des § 1. durch die Definition des *direct inducirten Potentials* eines Körperelementes für die weitere mathematische Analyse jene Vorstellung beseitigte. Es mag hier zugegeben werden, dass die ursprüngliche Vorstellung über den inducirten magnetischen Zustand bei Beer eine leichter aufzufassende ist, als die unserer Definition zu Grunde liegende. Wenn wir es trotzdem vorzogen, von der letzteren auszugehen, so lag der Grund zum Teil freilich darin, dass wir durch unsere Darstellung eine möglichst vollständige Unabhängigkeit von der specifischen Vorstellung der magnetischen Elemente zu erzielen suchten; zum Teil aber auch darin, dass die Schwierigkeiten und Unsicherheiten, welche bei der Beer'schen Grundanschauung die weitere mathematische Entwicklung ziemlich stark afficiren, bei unserer Darstellung viel mehr vermieden werden konnten.

7. Der Einfluss, welchen die beständige Rücksichtnahme auf die Existenz der magnetischen Elemente bei Beer auf seine Rechnung ausübt, zeigt sich zuerst bei der Entwicklung der Formel für die oben (s. 1.) genannte Function  $V_1$ . Auf Seite 157. seines genannten Werkes stellt Beer die Formel auf für dasjenige Potential, welches in Bezug auf die Punkte eines magnetischen Elementes den übrigen magnetischen Elementen nach dem ersten Inductionsact zukommt. Er findet, dass dasselbe gleich

$$(\mathfrak{A}) - (\mathfrak{B})$$

ist, wenn nämlich  $(\mathfrak{A})$  und  $(\mathfrak{B})$  die Bedeutung haben:

$$(\mathfrak{A}) = -\frac{1}{\alpha^2} \int_{\mathfrak{A}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} dk$$

und

$$(\mathfrak{R}) = -\frac{1}{\alpha^2} \int_{\mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} dk.$$

Dabei ist die erste Integration über den ganzen Raum von  $\mathfrak{A}$  zu erstrecken und die zweite über den Raum einer kleinen Kugel  $\mathfrak{R}$ , welche um einen Punkt des betrachteten magnetischen Elementes beschrieben ist. In etwas übersichtlicherer Weise als es bei Beer (8. 157.) geschieht, ergibt sich durch eine buchstäblich gleiche Entwicklung wie wir sie oben (§ 1. 12.) gaben,

$$(\mathfrak{R}) = -\frac{4\pi}{3\alpha^2} (V_{xyz} - V_{abc})$$

wo unter  $abc$  wieder die Coordinaten des Mittelpunktes der sehr klein gedachten Kugel und unter  $xyz$  diejenigen eines variablen Punktes im Innern des betrachteten magnetischen Elementes verstanden sind. Wäre es Beer nun, wie bei unserer Darstellung im § 1., darauf angekommen, das Potential des ganzen Körpers  $\mathfrak{A}$  auf einen innern Punkt  $(xyz)$  zu ermitteln, so hätte er bei verschwindendem Radius der Kugel  $\mathfrak{R}$  in aller Strenge  $V_{xyz} = V_{abc}$  setzen müssen, woraus  $(\mathfrak{R}) = 0$  gefolgt wäre. Beer setzt dagegen

$$(\mathfrak{R}) = -\frac{4\pi}{3\alpha^2} V_{xyz}$$

und

$$(\mathfrak{A}) - (\mathfrak{R}) = (\mathfrak{A}) + \frac{4\pi}{3\alpha^2} V$$

Indem er also die für das Bereich des betrachteten magnetischen Elementes freilich als constant zu betrachtende Grösse  $\frac{4\pi}{3\alpha^2} V_{abc}$  fortlässt, substituirt er für den in Wirklichkeit unendlich kleinen Wert  $(\mathfrak{R})$  einen solchen von endlicher Grösse  $\frac{4\pi}{3\alpha^2} V$ . Dies Verfahren findet seine Begründung durch die Bemerkung Beer's, „dass man für die „Wirkung im Innern des Moleküles (magnetischen Elementes) das „Potential des ausserhalb befindlichen magnetischen Fluidums ersetzen „könne durch die Function

$$V_1 = (\mathfrak{A}) + \frac{4\pi}{3\alpha^2} V.$$

Da nämlich  $V_1$  bei der weiteren Bildung der Functionen  $V_2, V_3 \dots$  nur insofern in Betracht kommt, als es sich um seine Differentialquotienten handelt, so ist es allerdings erlaubt eine willkürliche Constante fortzulassen. Wir haben die Function  $V_1$  daher nicht geradezu als das Potential des ausserhalb des magnetischen Elementes befindlichen Fluidums zu betrachten, sondern als dieses Potential, vermindert um eine im Bereiche des magnetischen Elementes als constant zu betrachtende Grösse. Dieselben Bemerkungen sind in Bezug auf  $V_2, V_3 \dots$  und die Summe derselben  $U$  zu machen. Macht es nun schon einige Mühe, sich in diese von Beer nur flüchtig skizzirte Auffassung seiner Functionen  $V_1, V_2 \dots U$  und der dabei auftretenden eigenthümlichen Constanten hineinzudenken, so kommt doch noch ein weiterer erschwerender Umstand hinzu. Die Functionen  $V_1, V_2 \dots$  sind nämlich gebildet unter Zugrundelegung eines in der Vorstellung fixirten magnetischen Elementes und sind zunächst nur gültig im Bereiche eines solchen. Denn würde man für einen Punkt  $\xi\eta\zeta$ , der zwischen den magnetischen Elementen läge, das Potential des ausserhalb befindlichen magnetischen Fluidums bilden, so würde dieses den Wert  $(\mathfrak{A})$  anstatt wie früher für den unmittelbar benachbarten Punkt  $(xyz)$  den Wert

$$(\mathfrak{A}) + \frac{4\pi}{3a^2}V$$

haben. Die Functionen  $V_1, V_2 \dots$  erscheinen daher nicht ohne Weiteres als Functionen eines variablen Punktes  $(xyz)$ . Da sie aber als solche für die Begründung der späterhin mit ihnen vorgenommenen Umgestaltungen offenbar betrachtet werden müssen, so ist noch eine besondere Anschauungsweise erforderlich, welche allerdings durch folgende Abstraction gewonnen werden kann. Fassen wir die magnetischen Elemente als unendlich klein gegen die Dimensionen eines Körperelementes auf und dieses wieder als unendlich klein gegen den Körper  $\mathfrak{A}$ , so ist ersichtlich, dass man unter den dem Punkte  $xyz$  oder dem Körperelemente  $dx dy dz$  zukommenden Werten  $V_1, V_2 \dots$  nur die Mittelwerte der in den magnetischen Elementen des betreffenden Körperelementes vorhandenen Werte von  $V_1, V_2 \dots$  zu verstehen braucht, um  $V_1, V_2 \dots$  als Functionen der Stelle  $xyz$  auffassen zu können. Die hierin liegende Schwierigkeit ist übrigens von derselben Natur wie diejenige, welche bei der in § 1. gegebenen Definition des *direct inducirten Potentials* auftritt, und scheint von der Theorie der magnetischen Induction untrennbar zu sein \*).

---

\*) Anm. Es möge hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass Green in seinem Essay of the theor. S. 199. auf diese etwas diffilen Vorstellungen Rücksicht nimmt, indem er unterscheidet zwischen der von dem ganzen Körper

Dass nun der auf den ersten Blick sehr wesentlich erscheinende Unterschied zwischen der Beer'schen Formel [q] und unserer Formel § 1. [k] in der That nur von untergeordneter Bedeutung ist, erkennt man, wenn man die beiderseitigen Umformungen für  $V_1$  vergleicht. Beer findet nämlich auf S. 160.

$$V_1 = -\frac{8\pi}{3a^3} V - \frac{1}{a^2} \int V \frac{\partial}{\partial n} ds$$

wofür wir nach unserer Bezeichnungsweise auch schreiben können

$$V_1 = -\frac{8\pi}{3a^2} V + \frac{1}{a^2} \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma;$$

und es lautete die Formel § 1. [e]

$$V_1 = -4\pi KV + K \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$

In dieser Form erkennt man sofort, dass der Unterschied zwischen den beiden Functionen  $V_1$  sich auf eine Verschiedenheit der darin auftretenden Constanten reducirt.

8. Die im Vorigen aufgedeckte Verschiedenheit in der Behandlungsweise bei Beer und im § 1. lässt sich in Kürze etwa so ausdrücken: Beer erteilt bei seinen einzelnen Inductionsacten den magnetischen Elementen eine gewisse Rolle zu, indem er eine Einwirkung der einzelnen Teile eines und desselben magnetischen Elementes auf einander in Rechnung zieht, und erst nach vollendeter Induction von der Existenz der magnetischen Elemente abstrahirt; wogegen bei der Darstellung des § 1. die Vorstellung der magnetischen Elemente durch den an die Spitze gestellten Begriff der directen Induction beseitigt wird. Der so ausgesprochene Unterschied in der Behandlungsweise übt die Wirkung auf die aufzustellenden Formeln, dass die parallel stehenden Formeln für  $V_1$  sich so unterscheiden

$$\begin{aligned} \text{(Beer)} \quad V_1 &= + \frac{1}{a^2} \int T \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma + \frac{4\pi}{3a^2} V \\ \text{(\S 1.)} \quad V_1 &= + K \int T \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma \end{aligned} \quad [r]$$

---

¶ und der von den ausserhalb eines Molecüles gelegenen Teile auf einen innern Punkt ausgeübten Kraft, und diese Unterscheidung mathematisch dadurch definirt, dass er eine gewisse Function  $\psi$  das erste Mal differentiirt nach dem Verschwinden der kleinen Hälfskugel und das zweite Mal vorher.

Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die Verschiedenheit dieser beiden Ausdrücke sich auf eine Verschiedenheit der Constanten reducirt, wenn man die Ausdrücke in folgender Form schreibt

$$\begin{aligned} (\text{Beer}) \quad V_1 &= -\frac{8\pi}{3\alpha^3} V + \frac{1}{\alpha^3} \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma \\ (\S 1.) \quad V_1 &= -4\varphi KV + K \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma \end{aligned} \quad [\text{s}]$$

9. Hierdurch erkennen wir nun auch, warum sich zwischen den Beer'schen Constanten  $\kappa$  und  $\alpha$  einerseits und unsern Constanten  $\kappa$  und  $K$  andererseits nicht die nämlichen Beziehungen ergeben konnten; und wir erkennen, freilich nur a posteriori, dass der Beer'schen Fundamentalformel [a] in der Tat eine etwas andere Bedeutung beizulegen ist als unserer analogen Formel (§ 1. [a]), dass aber diese Verschiedenheit sich auf die Bedeutung der Constanten beschränken mnss.

10. Dieser Umstand wird vollständig klar, wenn wir die Beer'sche Formel [a] direct mit der von Poisson gegebenen (§ 2. [e])

$$q = \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1} (k\alpha) + \frac{\partial T}{\partial y_1} (k\beta) + \frac{\partial T}{\partial z_1} (k\gamma) \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

vergleichen und hierin der Beer'schen Grundanschauung entsprechend die Bestimmung der Grössen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  vornehmen vermittelt der in der Einleitung angeführten Poisson'schen Gleichgewichtsgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + X + \frac{4\pi}{3} \alpha = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} + Y + \frac{4\pi}{3} \beta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} + Z + \frac{4\pi}{3} \gamma = 0$$

Diese Gleichungen werden offenbar, wenn es sich um ein einziges magnetisches Element handelt:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{4\pi}{3} \alpha = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{4\pi}{3} \beta = 0 \quad [\text{t}]$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} + \frac{4\pi}{3} \gamma = 0$$

Woraus

$$\alpha = -\frac{3}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$\beta = -\frac{3}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y_1}$$

$$\gamma = -\frac{3}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial z_1}$$

folgt. Setzt man diese Werte in den Ausdruck für  $q$  ein, so wird derselbe

$$q = -\frac{3k}{4\pi} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1} \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1} \frac{\partial V}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1. \quad [u]$$

Die Beer'sche Formel [a] lautete:

$$-\frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1} \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1} \frac{\partial V}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [v]$$

wenn wir nämlich die gleichbedeutenden  $x'y'z'$  mit  $x_1 y_1 z_1$  vertauschen und ebenso  $\frac{1}{r} = T$  setzen. Aus der Vergleichung von [u] und [v] folgt nun

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{3k}{4\pi}$$

Führen wir noch hierin die von Beer angegebene Beziehung zwischen seinem  $\alpha$  und  $\kappa$  ein, nämlich

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{4}{4\pi} \frac{3\kappa}{3-2\kappa},$$

so folgt

$$k = \frac{\kappa}{3-2\kappa}$$

oder

$$\kappa = \frac{3k}{1+2k}.$$

Dies ist aber dieselbe Beziehung, welche wir oben Gleichung [n] fanden.

#### § 4.

In diesem § soll eine Methode der successiven Induction in Anwendung gebracht werden, auf welche ich durch eine freundliche Mitteilung des Herrn Professor Dr. C. Neumann aufmerksam gemacht bin, und welche sich den Poisson'schen Gleichungen unmittelbar anschliesst.

1. Poisson gibt für das inducirte Potential (Mem. de l'Acad. S. 294.) die Formel, welche wir unter Beibehaltung unserer früheren Beziehungsweise  $T = \frac{1}{r}$ ;  $\frac{3k}{4\pi(1-k)} = K$  und  $\xi, \eta, \zeta$  mit  $x_1, y_1, z_1$  vertauschend, schreiben können:

$$Q_a = \iiint \left\{ A \frac{\partial T_a}{\partial x_1} + B \frac{\partial T_a}{\partial y_1} + \Gamma \frac{\partial T_a}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [a]$$

$$Q_i = \iiint \left\{ A \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + B \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \Gamma \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [b]$$

worin die drei (früher durch  $k\beta, k\beta, k\gamma$  bezeichneten) Grössen  $A, B, \Gamma$  die Bedeutung haben (vergl. Mém. S. 299. (c))

$$A = -K \frac{\partial(V + Q_i)}{\partial x_1}$$

$$B = -K \frac{\partial(V + Q_i)}{\partial y_1}$$

$$\Gamma = -K \frac{\partial(V + Q_i)}{\partial z_1}$$

In diesen Formeln ist ausser der als gegeben zu betrachtenden Constanten  $K$  nur das  $V$  bekannt und es handelt sich darum,  $Q$  auszudrücken durch  $V$ .

2. Das letztere werden wir dadurch erreichen, dass wir für  $Q$  eine Reihe von Ausdrücken

$$Q', Q'', Q''' \dots Q^{(n)} \dots Q^{(\infty)}$$

bilden, die, mit einem ersten Näherungswert  $Q'$  beginnend, sich successive dem wahren Werte von  $Q$  mehr und mehr nähern und von denen der Ausdruck  $Q^{(\infty)}$  in aller Strenge mit dem wahren  $Q$  zusammenfällt.

Den ersten Näherungswert  $Q'$  müssen wir nun offenbar erhalten, wenn wir uns vorstellen, dass die Induction zunächst in jedem Körperelement  $dx_1 dy_1 dz_1$  so vor sich ginge, als ob dabei keine Einwirkung der übrigen Teile von dem Körper  $\mathfrak{U}$  auf dasselbe stattfände; oder mit andern Worten, indem wir das durch die Kräfte mit dem Potential  $V$  direct inducirte Potential (vergl. § 1. 1.) bilden. Dieses wird:

$$Q_a' = \iiint \left\{ A' \frac{\partial T_a}{\partial x_1} + B' \frac{\partial T_a}{\partial y_1} + \Gamma' \frac{\partial T_a}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [d]$$

$$Q_i' = \iiint \left\{ A' \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + B' \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \Gamma' \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [e]$$

worin nun die Grössen  $A'$ ,  $B'$ ,  $I'$  aus den Gleichungen [c] sich ergeben, indem man in den letzteren  $Q_i = 0$  setzt. Es wird also

$$\begin{aligned} A' &= -K \cdot \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ B' &= -K \cdot \frac{\partial V}{\partial y_1} \\ I' &= -K \cdot \frac{\partial V}{\partial z_1} \end{aligned} \quad [f]$$

Durch Substitution dieser Gleichungen in [d] und [e] wird

$$\begin{aligned} Q_a' &= -K \iiint \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T_a}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T_a}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T_a}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \\ Q_i' &= -K \iiint \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \end{aligned}$$

oder mit Hülfe derselben Green'schen Sätze, welche in § 1. auf die buchstäblich gleichen Ausdrücke [c] und [d] angewandt wurden,

$$Q_a' = K \int T_a \frac{\partial V}{\partial v} d\sigma \quad [g]$$

$$Q_i' = K \int T_i \frac{\partial V}{\partial v} d\sigma \quad [h]$$

Den letzteren Ausdruck, welcher mit dem für  $V_1$  in § 1. gefundenen vollständig identisch ist, können wir wieder in derselben Weise umformen wie dort, und erhalten unter Benutzung derselben Abkürzungen [z]

$$Q_i' = -4\pi KV + 4\pi KF_1 \quad [i]$$

3. Aus der Identität von  $V_1$  und  $Q_i'$  folgt, wie wir besonders hervorheben, dass  $Q_i'$  innerhalb  $\mathfrak{A}$  dieselben Haupteigenschaften wie  $V$  besitzt, und dass daher auch der Function  $(V + Q_i')$  die nämlichen Eigenschaften zukommen werden.

4. Einen zweiten Näherungswert erhalten wir dadurch, dass in den Gleichungen [c] das noch unbekannte  $Q_i$  ersetzt wird durch den in 2. gefundenen Wert  $Q_i'$  und diese Gleichungen sodann substituiert werden in die ursprünglichen [a] und [b]. Diese werden

$$\begin{aligned} Q_a'' &= \iiint \left\{ \frac{\partial(V + Q_i')}{\partial x_1} \frac{\partial T_a}{\partial x_1} + \frac{\partial(V + Q_i')}{\partial y_1} \frac{\partial T_a}{\partial y_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial(V + Q_i')}{\partial z_1} \frac{\partial T_a}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [k] \end{aligned}$$



$$Q_i'' = \iiint \left\{ \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial x_1} \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial y_1} \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial z_1} \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \quad [l]$$

Zufolge der Bemerkung 3. sind diese beiden Ausdrücke der nämlichen Umgestaltung zu unterwerfen wie vorher die Ausdrücke für  $Q_a'$  und  $Q_i'$ . Es wird demnach

$$Q_a'' = K \int T_a \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial v} d\sigma \quad [m]$$

$$Q_i'' = K \int T_i \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial v} d\sigma \quad [n]$$

Der letzte Ausdruck  $Q_i''$  ist nun in ähnlicher Weise zu behandeln wie der obige für  $Q_i'$ . Es wird nämlich zunächst, wenn man den Satz (§ 1. 13.) anwendet auf die Function  $(V+Q_i')$ ,

$$Q_i'' = K \int (Q_i + Q_i') \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma - 4\pi K(V+Q_i')$$

oder, wenn wir die Abkürzung

$$\lambda = 4\pi K,$$

einführen und für  $Q_i'$  seinen Wert [i] setzen,

$$Q_i'' = \lambda \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma - \lambda^2 \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma + \lambda^2 \frac{1}{4\pi} \int F_1 \frac{\partial T_i}{\partial v} d\sigma - \lambda V + \lambda^2 V - \lambda^2 F_1$$

oder anders geschrieben

$$Q_i'' = (-\lambda + \lambda^2) V + (\lambda - 2\lambda^2) F_1 + \lambda^2 F_2 \quad [o]$$

5. Für die Function  $Q_i''$  ist dieselbe Bemerkung zu machen wie in 3. für  $Q_i'$ . Es ist nämlich ohne Weiteres klar, dass der Ausdruck [i] derselben Discussion unterworfen werden kann wie sie in § 1. 12 angestellt. Daraus ist denn auch zu schliessen, dass die Function  $(V+Q_i'')$  wiederum dieselben Haupteigenschaften innerhalb  $\mathfrak{A}$  wie  $V$ ,  $Q_i'$ ,  $Q_i''$  besitzen wird. Noch sei bemerkt, dass  $Q_i''$  identisch ist mit  $(V_1 + V_2)$  des § 1.

6. Das nun weiter einzuschlagende Verfahren ist durch 4. und 5. bereits vollständig angegeben. Wir erhalten den 3ten, 4ten, 5ten etc. Näherungswert von  $Q$ , indem wir die successive gewonnenen



XXI.

Miscellen.

1.

Ueber die geometrische Darstellung elliptischer Functionen.

Es sind schon mehrmals die Mittel untersucht worden, welche zur geometrischen Darstellung der elliptischen Integrale und Functionen geeignet sind; einen kleinen Beitrag zu demselben Zwecke sollen auch folgende Zeilen liefern.

1. Betrachtet man die Curve  $r = f(\varphi)$  und ihre Inverse (durch reciproke radii vectores transformirte)  $r = \frac{a^2}{f(\varphi)}$ , so wird der Inhalt

des Sectors der ersten durch das Integral  $S = \frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2 d\varphi$ , und der

zweiten durch  $S' = \frac{1}{2} a^4 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{r^2}$  ausgedrückt. Die Curve

$$r = a \sqrt[4]{1 - m^2 \sin^2 \varphi} \dots \dots \dots (1)$$

hat zur Inversen die Curve

$$r = \frac{a}{\sqrt[4]{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} \dots \dots \dots (2)$$

und es wird dann

$$S = \frac{a^2}{2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad S' = \frac{a^2}{2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} \dots \dots (3)$$

oder, wenn wir  $a = \sqrt{2}$  wählen und die bekannte Legendre'sche Bezeichnung anwenden,

$$S = E(m, \varphi), \quad S' = F(m, \varphi) \dots \dots \dots (4)$$

Wir wollen die betreffenden Curven kurz  $E$  und  $F$  nennen. Die Gleichung der  $E$ -Curve in Descartesischen Coordinaten lautet

$$(x^2 + y^2)^3 - a^4 x^2 - a^4 (1 - m^2) y^2 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

es ist also eine Curve 6ter Ordnung, welche im Anfangspunkte einen Doppelpunkt besitzt und die imaginären Kreispunkte zu dreifachen Punkten hat. Ebenso erkennt man aus der Gleichung der  $F$ -Curve

$$(x^2 + y^2)^2 - m^2 y^2 (x^2 + y^2) - a^4 = 0 \dots \dots \dots (6)$$

dass es eine Curve 4ter Ordnung ist, mit den Kreispunkten als Doppelpunkten. Beide Curven, welche für  $m^2 < 1$  eine elliptische Form besitzen, können einfach nach ihren Polargleichungen construirt werden; man kann auch die eine — vielleicht die  $E$  — nach der Gleichung darstellen und aus ihr die  $F$  nach der Methode der Inversion ableiten.

2. Für jeden Wert des Modulus  $m$ , welcher bekanntlich der Bedingung  $0 < m < 1$  unterworfen ist, erhalten wir eine  $E$ - und eine  $F$ -Curve. Es kann aber sehr leicht gezeigt werden, dass man alle diese Curven als Schnitte zweier inversen Flächen  $H$  und  $\Phi$  mit den Ebenen eines bestimmten Büschels erzeugen kann. Man braucht zu diesem Zwecke nur in den Polargleichungen der Curven  $m = \sin \omega$  setzen und die Grössen  $r, \varphi, \omega$  als räumliche Polarcoordinaten betrachten, welche mit den parallelen Coordinaten durch die Gleichungen  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \cos \omega, z = r \sin \varphi \sin \omega$  verbunden sind. Es ist dann

$$r = a \sqrt[4]{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \omega} \dots \dots \dots (7)$$

die Gleichung der Fläche  $H$  und

$$r = \frac{a}{\sqrt[4]{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \omega}} \dots \dots \dots (8)$$

die Gleichung der Fläche  $\Phi$ , oder, in Parallelcoordinaten ausgedrückt:

(9)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 - a^4 (x^2 + y^2) = 0 \quad \text{und} \quad (x^2 + y^2 + z^2) (x^2 + y^2) - a^4 = 0$$

Wie hieraus zu ersehen, ist die Fläche  $H$  eine Rotationsfläche 6ter und  $\Phi$  eine Rotationsfläche 4ter Ordnung; die  $Z$ -Axe ist ihre gemeinschaftliche Rotationsaxe. Die Gleichungen der Meridiancurven

erscheinen in einer äusserst einfachen Gestalt, nämlich  $r = a\sqrt{\cos \varphi}$  und  $r = \frac{a}{\sqrt{\cos \varphi}}$ . Jede durch die  $X$ - oder  $Y$ -Axe gelegte Ebene schneidet die Fläche  $H$  in einer  $E$ -Curve und die Fläche  $\Phi$  in der entsprechenden  $F$ -Curve. — Endlich sei noch die Bemerkung beigefügt, dass sich die Fläche  $\Phi$  zur geometrischen Darstellung der elliptischen Functionen eignet. Legen wir nämlich durch den Punkt  $(x, y, z)$  dieser Fläche und durch die  $X$ -Axe eine Ebene, so schneidet diese die Fläche in einer  $F$ -Curve, deren in den Grenzen  $0, \varphi$  enthaltener Sector durch die Gleichung  $S' = F(m, \varphi)$  bestimmt ist, und es ist dann

$$\frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r} = \sin am S', \quad \frac{x}{r} = \cos am S', \quad r^2 = \Delta am S' \quad \dots (10)$$

Königgrätz, den 29. April 1877.

A. Strnad.

## 2.

### Ueßer Bezeichnungen.

Unter den in der Mathematik gebräuchlichen Zeichen lassen sich nach der einen Seite hin unterscheiden disponibele und feste, nach der andern Zeichen für Grössen, für Functionen, für Operationen und für Anordnungen. In Betreff der disponibelen Zeichen, welchen der Autor erst im vorkommenden Falle ihre Bedeutung beilegt, möchte wol kaum ein Punkt zu erörtern sein; nur ist die Bemerkung nicht unwichtig, dass die geläufige Reihenfolge der Buchstaben im Alphabet und das Entsprechen der Buchstaben in verschiedenen Alphabeten uns vielfach zu statten kommt. Es sind daher Festsetzungen, welche diesem Gebrauche hindernd in den Weg treten, nicht zu empfehlen, und wo sie bestehen, als baldigst zu beseitigende Uebelstände zu vermerken, wovon später.

Die festen oder eingeführten Zeichen hingegen, welche ohne Erklärung gebraucht werden, geben vielfachen Grund zur Besprechung. Abänderungsvorschläge im einzelnen, welche schon manchmal zutage getreten sind, gehen meist aus einseitigen Erwägungen hervor; sie begegnen darum oft unmotivirter Missbilligung, weil sie die ihnen entgegenstehenden Interessen nicht zum Bewusstsein und zur Klarheit bringen. Damit Abänderungen einen definitiven Fortschritt der Praxis verbürgen können, muss beim einzelnen Punkte die Gesamtheit ins Auge gefasst und auf alle in Betracht kommenden Gesichtspunkte Rücksicht genommen sein. Letztere in grösst möglicher Vollständig-

keit und bester Ordnung zusammenzustellen ist der Zweck des Folgenden. Doch empfiehlt es sich in praktischen Fragen, dieselben nicht in abstracten Principien, sondern an den wirklich vorliegenden Gegenständen darzulegen. Ich folge daher der oben aufgestellten Einteilung.

I. Zeichen für Grössen. Gewöhnlich ohne Erklärung gebraucht werden die Buchstaben  $\pi$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $g$ .

1. Periode der Kreisfunctionen. Wenn ursprünglich  $\pi$  den Kreisumfang für den Durchmesser 1 ausdrücken sollte, so hat diese Bedeutung jetzt keine Geltung mehr, wo immer der Radius zur Einheit genommen wird. Hiernach würde für  $2\pi$  ein Zeichen zu setzen sein. Doch handelt es sich nicht allein um Ausdruck des Kreisumfangs; eine weit überwiegende Rolle kommt dem  $2\pi$  als Periodenlänge zu. Die Praxis hat sich bei allen symmetrisch periodischen Functionen dafür entschieden nicht die ganze, sondern die Viertelperiode zu bezeichnen, weil diese das gesammte Intervall der Zahlenwerte der Function umfasst, was sich zunächst bei Tafeln geltend macht, aber auch auf die Rechnung vielfachen Einfluss übt (Compleментарfunctionen, Teilung der Intervalle von Integralen u. a. m.).

Hier zeigt sich die Schreibung  $\frac{\pi}{2}$  äusserst unbequem, so dass es Viele vorziehen dafür  $90^\circ$  zu schreiben. Sind wir aber erst dazu gelangt die Nonagesimal- und Sexagesimalteilung zu beseitigen, so wird ein Zeichen für den Quadranten unentbehrlich, da es immer als Benennung zur decimal dargestellten Zahl hinzutritt. Hierzu bedarf es nun keiner neuen Einführung. Im Unterricht lernt der Schüler das Zeichen  $R$  für den rechten Winkel, ehe er von  $\pi$  etwas hört; es ist nur nötig bei diesem Zeichen stehen zu bleiben, also nachher bei der Kreisberechnung, wo der Bogen für den Radius 1 als Mass des Centriwinkels betrachtet wird, nur den Bogen nach dem Winkel, statt umgekehrt, zu bezeichnen, mithin  $4R$  als Wert des Kreisumfangs anzugeben. Dass dies gewöhnlich nicht geschieht, scheint in einer Täuschung seinen Grund zu haben. Man denkt sich, am Zeichen  $R$  hafte die Vorstellung einer Winkelfigur. Hat man einmal die Winkelgrösse mit der Zahl identificirt, wie es ja factisch der Fall ist, so macht es doch gewiss keinen Unterschied, ob man  $2R = \pi$  oder  $\pi = 2R$  setzt. Durch den müssigen Uebergang vom Zeichen  $R$  zu einem neuen Zeichen  $\pi$  die Illusion zu begünstigen, als handle es sich um heterogene Dinge, ist jedenfalls nicht ratsam.

Lässt sich indes auf diese Art unser nächster Zweck leicht erreichen, so stellt uns ein zweiter Gesichtspunkt, der schon oben angedeutet ist, eine weitere Forderung. Es ist ein Uebelstand, dass Buchstaben mitten aus dem Alphabet heraus für eine exclusive feste

Bezeichnung in Beschlag genommen und dem freien Gebrauche entzogen werden. Sehr oft haben wir Anlass eine Reihe auf einander folgender Buchstaben des Alphabets der Uebersichtlichkeit wegen zu wählen, und finden uns daran durch einen einzigen der Reihe gehindert, weil er Zweideutigkeit verursacht. Für eine so unveränderliche und in allen Gebieten der Mathematik vorkommende Grösse können wir ein besonderes Zeichen haben. Es würde sicher verbürgt sein, dass die Typen nie entwertet würden. Den Weg zur Formirung zeigt uns die bei den Operationszeichen, namentlich dem Differential-, Integral- und Wurzelzeichen befolgte Praxis, welche den anfänglich dafür gebrauchten Buchstaben  $d$ ,  $s$ ,  $r$  derart modificirt hat, dass die veränderte Form noch immer den gewohnten Eindruck macht und doch kenntlich unterschieden ist. Ebenso könnte man das  $R$  etwa links oben abrunden und zugleich verkleinern; letzteres und die gerade Stellung würde schon bei den vorhandenen Lettern ausgeführt werden können und zur Unterscheidung hinreichen. Auf Grössenzeichen hat jenes Verfahren bis jetzt noch keine Anwendung gefunden, doch sind sie hinsichtlich der Unterscheidungsbedürftigkeit in gleichem Falle mit den Operationszeichen; es ist daher wol nur zufällig, dass es noch nicht geschehen ist.

2. Grundzahl der natürlichen Logarithmen. Von dem Vorstehenden findet nur das zweite Abänderungsmotiv, aber dieses in noch höherem Grade auf das Zeichen  $e$  Anwendung. Die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist eine ebenso unveränderliche und in der ganzen Analysis eine wichtige Rolle spielende Grösse, und verdiente daher ebenso ein besonderes Zeichen. Dass man dieses aus dem kleinen lateinischen Alphabet entnommen hat, beeengt den freien Gebrauch noch empfindlicher als die Vorwegnahme des  $\pi$ , weil uns dasselbe ohne die verursachte Lücke das bequemste von allen Alphabeten sein würde. Auch hier liesse sich durch Modification der Buchstabenform abhelfen; in Ermangelung der Typen könnte man einstweilen das selten gebrauchte  $e$  dafür setzen. Am meisten fehlt uns ein kurzes Wort, dass die Bedeutung ausdrückt, wie das Wort „Rechter“ im vorigen Falle dem Bedürfniss vollkommen genügte.

3. Quadratwurzel aus  $-1$ . Das Zeichen  $i$  vertritt nicht wie  $\pi$  und  $e$  einen Begriff von unveränderlicher Auffassung. Die Theorie der Imaginären ist noch so stark in der Entwicklung begriffen, dass wir alle Festsetzungen als interimistische betrachten müssen. Es kann insbesondere ein Zweifel erhoben werden, ob  $i$  als Grösse, oder  $+i$ ,  $-i$  als Vorzeichen wie  $+$  und  $-$  aufzufassen sind. Hier scheint daher eine Abänderung besser für spätere Zeiten vorbehalten zu werden.

4. Gewicht der Masseneinheit. Das Zeichen  $g$  ist in anderem Falle als  $\pi$ ,  $e$  und  $i$ , insofern es in keiner allgemeinen Theorie Bedeutung hat, und nur in der angewandten Mechanik vorkommen kann. Wenn es daher ohne Erklärung gebraucht wird, so lässt es sich als ein disponibiles Zeichen ansehen, dessen Bedeutung aus dem Zusammenhange erhellt. Eine Beeinträchtigung des freien Gebrauchs führt dasselbe nicht mit sich. Nur sollte man nicht, wie dies missbräuchlich in manchen Lehrbüchern der Fall ist, das  $g$  in Formeln finden, die mit der Erddanziehung nichts zu tun haben, z. B. in dem Ausdruck für die Centrifugalkraft.

Nun gibt es noch manche stehende Bezeichnungen, namentlich für variable Grössen, z. B.  $t$  für die Zeit. Diese lassen sich jedoch wenn sie auch bisweilen ohne Erklärung gebraucht werden, als disponibele betrachten, und haben nie aufgehört als solche zu dienen.

II. Zeichen für Functionen. Bei den stehenden Functionsbezeichnungen mit Angabe des Arguments ist die schädliche Vorwegnahme einzelner Buchstaben grösstenteils dadurch vermieden, dass sie mit mehreren Buchstaben, welche eine Abkürzung des Namens darstellen, geschrieben werden; denn ein freier Gebrauch von solchen Combinationen pflegt nicht stattzufinden. Hierhin gehören die Zeichen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cot}$ ,  $\log$ . Zu diesen sind nur wenige Bemerkungen zu machen. Dass neben der ganz unzweideutigen Abkürzung  $\operatorname{tg}$  noch einige weniger kurze bestehen, ist offenbar überflüssig. Das Zeichen  $\log$  ist für briggsische und natürliche Logarithmen in Gebrauch, doch kommt man nicht in den Fall über die Deutung in Zweifel zu sein. Dieselbe kenntlich zu machen ist leicht, daher braucht keine Unterscheidung eingeführt zu werden. Zu verwerfen ist die in Vorschlag gekommene Einführung eines Zeichens für  $\log x$  Grundzahl  $a$ . Denn diese Function ist nicht transcendent in 2 Argumenten, sondern rational in 2 Werten einer Function eines Arguments  $\log x: \log a$ ; es würde das Einfachere complicirter machen.

1. Inverse elliptische Functionen 1. Gattung. Die Bezeichnung der elliptischen Functionen ist unter 2 verschiedenen Auffassungsweisen entstanden. Legendre stellte dieselben als Functionen der Amplitude dar. Seine hierauf berechneten Bezeichnungen sind auf die neue Gestaltung der Theorie, in der das Integral 1. Gattung unabhängige Variable ist, übertragen worden. Hier ist die Amplitude eine Mittelfunction von geringer Bedeutung, nur zur Erleichterung einiger wenigen Deductionen dienlich. Nach Inversion treten 3 coordinirte gleichberechtigte Functionen auf, welche von da an unentbehrliche Elemente der Rechnung sind, und als solche einzeln Zeichen beanspruchen. Jacobi hat diese Zeichen nicht einführen



wollen und statt dessen nur die Amplitude bezeichnet aus dem Grunde, weil die definitive Bezeichnung erst dann bestimmt werden könne, wenn die Theorie zu einem Abschluss gediehen sei; bis dahin seien nur die notwendigsten Einführungen vorzunehmen um nicht der späteren Gestaltung in den Weg zu treten. Hiermit hat er die getroffene Auskunft für eine interimistische erklärt. Wenn nun heutzutage noch das Festhalten an der vermittelten Bezeichnung von manchen Seiten gefordert wird, so ist jedenfalls die Berufung auf Jacobi's Ausspruch nicht stichhaltig. Denn erstens betrachten diejenigen, welche die Zeichen  $\sin am u$ ,  $\cos am u$ ,  $\Delta am u$  gebrauchen, dieselben als Ausdrücke directer Functionen von  $u$ , nicht von  $am u$ , mithin sind dieselben gegenüber den Zeichen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\Delta$  in Wirklichkeit 3 neue Einführungen, zweitens sieht niemand diese Einführungen als interimistisch an; denn niemand denkt jetzt, nachdem die Auffassung der 3 Functionen länger als 20 Jahre dieselbe geblieben, daran, dass in diesem Punkte die Theorie eine Umgestaltung erfahren könnte. Da wir nun neben dieser Bezeichnung die hinreichend bekannte Gudermann'sche  $sn u$ ,  $cn u$ ,  $dn u$  besitzen, so kann es sich nur darum handeln, welche von beiden zweckmässiger ist, die ungleichmässige mit 5 und 4 oder die gleichmässige mit 2 Buchstaben. Alle, die sich überhaupt über letztere ausgesprochen haben, finden sie gut gewählt und praktisch; Einwände dagegen sind nicht an den Tag getreten. Was also die erstere bevorzugen lässt, ist nichts als Täuschung. Diese zu enthüllen war reichlich Grund, da sie dem Fortschritt zu einer befriedigenden Praxis solange entgegen gewirkt hat.

2. Elliptische Functionen 2. und 3. Gattung. Gegen die Legendre'sche Bezeichnung  $E$  und  $\Pi$  ist erstlich geltend zu machen, dass sie 2 Buchstaben dem freien Gebrauch entzieht; namentlich wird  $\Pi$  gern in andern Bedeutungen gebraucht. Ausserdem ist jetzt  $E$  das gewöhnliche Zeichen für den Quadranten 2. Gattung, bei Legendre  $E_1$ . Hierzu kommt, dass wir jetzt directe Functionen von  $u$ , nicht mehr von  $am u$  zu bezeichnen haben; endlich in Betreff der 3. Gattung, dass sie, stark abweichend von Legendre, jetzt in derjenigen Form definiert wird, welche unmittelbar in Logarithmen der Jacobi'schen Functionen übergeht. Die Gudermann'sche Bezeichnung der 2. Gattung  $el u$  kann sehr wol befriedigen und empfiehlt sich besonders durch den Hinweis auf die geometrische Deutung. Die der 3. Gattung,  $D$  mit 4 Indices, welche sich der heutigen Definition anschliesst, hat nur das gegen sich, dass sie einen Buchstaben in Beschlag nimmt. Es wäre sowol zur Vermeidung dieses Umstandes als auch um der Gleichmässigkeit willen eine Combination von 2 kleinen lateinischen Buchstaben vorzuziehen.

Die Zeichen  $\Theta$ ,  $H$  für die Jacobi'schen Functionen werden noch

verschieden in Anwendung gebracht, die  $K$  und  $E$  für die ell. Quadranten nicht als Functionsbuchstaben betrachtet; daher können wir sie zu den disponibelen, wenn auch vorzugsweise gewählten Zeichen rechnen.

3. Das Euler'sche Integral und die Gauss'sche Function. Von den Functionszeichen  $\Gamma$  und  $F$  gilt nur der allgemeine Einwand. Es würde sich empfehlen zu schreiben:  $\Gamma_e$  (Gamma Euleri) und  $F_g$  (Functio Gaussiana).

III. Zeichen für Operationen. Nicht alle Operationszeichen drücken Functionen aus, und auch unter denjenigen, welche dies thun, giebt es solche, die nicht nach Art der allgemeinen Functionszeichen vor die Argumente geschrieben werden. Beide Arten können wir also den eigentlichen Functionszeichen entgegensetzen. Alle dahin gehörigen Operationszeichen, soweit sie für eingeführte gelten, haben bereits ihre befriedigenden, ausser dem Alphabet liegenden Formen. Manche wollen zwar die Unterscheidung des vollständigen Differentials und partiellen Differentialquotienten durch  $d$  und  $\partial$  für eine eingeführte ausgeben. Diese ist aber nur für gewisse einfachere Abhängigkeitsfälle, die freilich die häufigsten sind, haltbar, und muss daher der Natur der Sache zufolge stets eine disponibele, vom Schriftsteller zu erklärende bleiben. Meistens ist sie überhaupt überflüssig.

IV. Die Anordnungszeichen (Klammern, Trennungszeichen u. s. w.) geben keinen Anlass zur Besprechung.

Das Vorstehende hat sich nicht mit der Aufgabe beschäftigt über die vorgefundenen, in Gebrauch befindlichen Bezeichnungen hinaus erfinderisch vorzugehen. Sollte die Nennung der vorhandenen Mängel den Anlass bieten, dass es von anderer Seite geschähe, so würden mir dahin gehende Vorschläge willkommen sein. Es ist ein kurzes Wort für Grundzahl der natürlichen Logarithmen und ein dem  $e$  ähnliches Zeichen, ferner ein aus 2 kleinen lateinischen Buchstaben bestehendes Zeichen für die elliptischen Functionen 3. Gattung mit Unterscheidung der 4 Formen zu erfinden. Mein ausschliessliches Ziel war es, gegen oft gehörte täuschende Bestimmungsgründe Kritik zu üben und dadurch das Haupthinderniss einer befriedigenden Praxis zu entfernen.

R. Hoppe.

## 3.

**Bestimmung der Flächeninhalte jener Curven, die durch die Gleichung**

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1 \quad (1)$$

**gegeben sind, in welcher  $m$  eine ganze positive Zahl bezeichnet.**

Es ist leicht einzusehen, dass die Fläche der durch die Gleichung:  
(1) gegebenen Curven bestimmt wird durch nachstehendes Integrale

$$F = 4 \int_0^a y \, dx \quad (2)$$

Setzt man

$$\begin{aligned} x &= a \cdot u^{\frac{1}{2m}} \\ y &= b \cdot (1-u)^{\frac{1}{2m}} \end{aligned}$$

so geschieht der Gleichung (1) Genüge, und das Integrale (2) geht über in

$$F = \frac{4ab}{2m} \int_0^1 u^{\frac{1}{2m}-1} (1-u)^{\frac{1}{2m}} du \quad (3)$$

Das in (3) stehende Integrale ist die bekannte Beta-Function, folglich gestattet die Gleichung (3) nachstehende Schreibweise:

$$F = \frac{4ab}{2m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

Dies vereinfacht sich, wenn man die Gleichung

$$\frac{1}{2m} \Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2m}\right)$$

berücksichtigt, denn dann ist

$$F = 4ab \cdot \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \quad (4)$$

Setzt man  $m = \infty$ , so ist

$$F = 4ab$$

und dies ist selbstverständlich, weil die Gleichung (1) für unendlich

wachsende Werte von  $m$  sich fort und fort einem Rechtecke nähert, welches die Seiten  $2a$  und  $2b$  hat. (Siehe die Arbeit von Dr. J. Grai-lich im 23. Bande der Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien).

Man kann auch das in (4) stehende Resultat erlangen, wenn man von der Formel Lejeune-Dirichlet's

$$\int x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \dots dx dy dz \dots = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c}{pqr} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \Gamma\left(\frac{c}{r}\right) \dots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \dots\right)} \quad (5)$$

ausgeht, in welcher  $x, y, z, \dots$  solche positive Zahlen bedeuten, für welche

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \dots < 1$$

ist, und wo die Constanten  $a, b, c, \dots p, q, r, \dots \alpha, \beta, \gamma, \dots$  positiv sind. Lässt man nämlich das Integrale (5) ein Doppelintegrale sein, so hat man:

$$\iint x^{a-1} y^{b-1} dx dy = \frac{\alpha^a \beta^b}{pq} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)} \quad (6)$$

unter der Voraussetzung, dass

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q < 1$$

ist, und  $a, b, p, q, \alpha, \beta$  positive Zahlen bezeichnen. Setzt man nun in (6)

statt  $a$  die Zahl 1

„	$b$	„	„	1
„	$p$	„	„	$2m$
„	$q$	„	„	$2m$
„	$\alpha$	„	„	$a$
„	$\beta$	„	„	$b$

so erhält man:

$$\iint dx dy = \frac{ab}{4m^2} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \quad (7)$$

vorausgesetzt, dass

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} < 1$$

ist, und  $a$ ,  $b$  und  $m$  positive Zahlen bedeuten.

Das in (7) stehende Resultat gibt den 4ten Teil jener Fläche an, welche durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$$

bestimmt ist, und somit ist die Richtigkeit der Formel (4) nachgewiesen.

**Bestimmung des Körperinhaltes jener Flächen, die durch die Gleichung**

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2m} = 1 \quad (8)$$

gegeben sind, in welcher  $m$  eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Schneidet man die Fläche (8) durch die Horizontal-Ebene  $z = h$ , so ist die Gleichung eines Horizontalschnittes

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} + \left(\frac{h}{c}\right)^{2m} = 1$$

und diese Gleichung gestattet auch folgende Schreibweise:

$$\frac{x^{2m}}{a^{2m} (c^{2m} - h^{2m})} + \frac{y^{2m}}{b^{2m} (c^{2m} - h^{2m})} = 1$$

Die Fläche dieses Schnittes ergibt sich aus der Formel (4) und ist:

$$\frac{4ab}{c^2} \sqrt[m]{c^{2m} - h^{2m}} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

Wird dies mit  $dh$  multiplicirt, und innerhalb der Grenzen von 0 bis  $c$  integrirt, so hat man die Hälfte des gesuchten Körperinhaltes. Es ist demnach

$$K = \frac{8ab}{c^2} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \cdot \int_0^c \sqrt[m]{c^{2m} - h^{2m}} dh$$

Setzt man nun

$$h = c \cdot u^{\frac{1}{2m}}$$

so ist:

$$K = \frac{8abc}{2m} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \cdot \int_0^1 u^{\frac{1}{2m}-1} (1-u)^{\frac{1}{m}} du$$

Das hier auftretende Integrale ist wieder eine Beta-Function, und ist gleich

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2m}\right)}$$

folglich ist

$$K = \frac{8abc}{2m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2m}\right)}$$

oder anders geschrieben:

$$K = 8abc \cdot \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{2m}\right)\right]^3}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2m}\right)}$$

und dies geht für  $m = \infty$  über in

$$K = 8abc$$

was wieder von selbst klar ist, weil der durch die Fläche (8) begrenzte Körper mit dem Wachsen von  $m$  sich fort und fort dem Körperinhalte eines Parallelepipeds nähert.

Mittelst der Formel (5) von Lejeune-Dirichlet, welche im Jahre 1839 in Liouville's Journal für Mathematik veröffentlicht wurde, lässt sich gleichfalls das gefundene Resultat herstellen.

Simon Spitzer.

4.

Summierung der Reihe  $\sum \frac{n^m}{n!}$  für  $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

1) Bezeichnet man die Summe der Reihe für  $m = 1$  mit  $\sum_1 \frac{n}{n!}$ ,  
so hat man:

$$\sum_1 \frac{n}{n!} = 1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots = e$$

also die bekannte Formel.

2) Weil

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

$$e = 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \dots$$

so erhält man durch Addition:

$$2e = 1 + 2 + \frac{3}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{5}{1.2.3.4} + \dots$$

Daher gilt die Gleichung:

$$\sum_1 \frac{n^2}{n!} = 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \dots = 2e$$

3) Es ist

$$2e = 1 + 2 + \frac{3}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{5}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[2e] = 2e = 1 + \frac{4}{1.2} + \frac{9}{1.2.3} + \frac{16}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[e] = e = 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \dots$$

so ergibt sich durch Addition:

$$5e = 1 + 4 + \frac{9}{1.2} + \frac{16}{1.2.3} + \frac{25}{1.2.3.4} + \dots$$

woraus folgt:

$$\sum_1 \frac{n^3}{n!} = 1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \dots = 5e$$

4) Weil

$$5e = 1 + 4 + \frac{9}{1.2} + \frac{16}{1.2.3} + \frac{25}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[5e] = 5e = 1 + \frac{8}{1.2} + \frac{27}{1.2.3} + \frac{64}{1.2.3.4} + \dots$$

$$2[2e] = 4e = 2 + \frac{8}{1.2} + \frac{18}{1.2.3} + \frac{32}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[e] = e = 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \dots$$

so erhält man durch Addition:

$$15e = 1 + 8 + \frac{27}{1.2} + \frac{64}{1.2.3} + \frac{125}{1.2.3.4} + \dots$$

oder

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^4}{n!} = 1 + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \dots = 15e$$

5) Es ist

$$15e = 1 + 8 + \frac{27}{1.2} + \frac{64}{1.2.3} + \frac{125}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[15e] = 15e = 1 + \frac{16}{1.2} + \frac{81}{1.2.3} + \frac{256}{1.2.3.4} + \dots$$

$$3[5e] = 15e = 3 + \frac{24}{1.2} + \frac{81}{1.2.3} + \frac{192}{1.2.3.4} + \dots$$

$$3[2e] = 6e = 3 + \frac{12}{1.3} + \frac{27}{1.2.3} + \frac{48}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[e] = e = 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \dots$$

so erhält man durch Addition:

$$52e = 1 + 16 + \frac{81}{1.2} + \frac{256}{1.2.3} + \frac{625}{1.2.3.4} + \dots$$

oder

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^5}{n!} = 1 + \frac{2^5}{2!} + \frac{3^5}{3!} + \frac{4^5}{4!} + \dots = 52e$$

6) Weil

$$52e = 1 + 16 + \frac{81}{1.2} + \frac{256}{1.2.3} + \frac{625}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[52e] = 52e = 1 + \frac{32}{1.2} + \frac{243}{1.2.3} + \frac{1024}{1.2.3.4} + \dots$$



$$4[15e] = 60e = 4 + \frac{64}{1.2} + \frac{324}{1.2.3} + \frac{1024}{1.2.3.4} + \dots$$

$$6[5e] = 30e = 6 + \frac{48}{1.2} + \frac{162}{1.2.2} + \frac{384}{1.2.3.4} + \dots$$

$$4[2e] = 8e = 4 + \frac{16}{1.2} + \frac{36}{1.2.3} + \frac{64}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[e] = e = 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \dots$$

so ergibt sich durch Addition:

$$203e = 1 + 32 + \frac{243}{1.2} + \frac{1024}{1.2.3} + \frac{3125}{1.2.3.4} + \dots$$

oder

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^6}{n!} = 1 + \frac{2^6}{2!} + \frac{3^6}{3!} + \frac{4^6}{4!} + \dots = 203e$$

7) Es ist

$$203e = 1 + 32 + \frac{243}{1.2} + \frac{1024}{1.2.3} + \frac{3125}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[203e] = 203e = 1 + \frac{64}{1.2} + \frac{729}{1.2.3} + \frac{4096}{1.2.3.4} + \dots$$

$$5[52e] = 260e = 5 + \frac{160}{1.2} + \frac{1215}{1.2.3} + \frac{5120}{1.2.3.4} + \dots$$

$$10[15e] = 150e = 10 + \frac{160}{1.2} + \frac{810}{1.2.3} + \frac{2560}{1.2.3.4} + \dots$$

$$10[5e] = 50e = 10 + \frac{80}{1.2} + \frac{270}{1.2.3} + \frac{640}{1.2.3.4} + \dots$$

$$5[2e] = 10e = 5 + \frac{20}{1.2} + \frac{45}{1.2.3} + \frac{80}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[e] = e = 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \dots$$

so erhält man durch Addition:

$$877e = 1 + 64 + \frac{729}{1.2} + \frac{4098}{1.2.3} + \frac{15625}{1.2.3.4} + \dots$$

oder

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^7}{n!} = 1 + \frac{2^7}{2!} + \frac{3^7}{3!} + \frac{4^7}{4!} + \dots = 877e$$

8) Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke  $e, 2e, 5e, 15e, 52e, 203e, \dots$  ist leicht ersichtlich:

$$\sum_1^{\infty} \frac{n}{n!} = e$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \left[ \sum_1^{\infty} \frac{n}{n!} + \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{n}{n!} \right\} \right] = 2e$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \left[ \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_1^{\infty} \frac{n}{n!} \right\} \right] = 5e$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^4}{n!} = \left[ \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{n!} + \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{n!} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_1^{\infty} \frac{n}{n!} \right\} \right] = 15e$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^5}{n!} = \left[ \sum_1^{\infty} \frac{n^4}{n!} + \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{n^4}{n!} + 3 \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{n!} + 3 \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_1^{\infty} \frac{n}{n!} \right\} \right] = 52e$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^6}{n!} = \left[ \sum_1^{\infty} \frac{n^5}{n!} + \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{n^5}{n!} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{n^4}{n!} + 6 \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{n!} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_1^{\infty} \frac{n}{n!} \right\} \right] = 203e$$

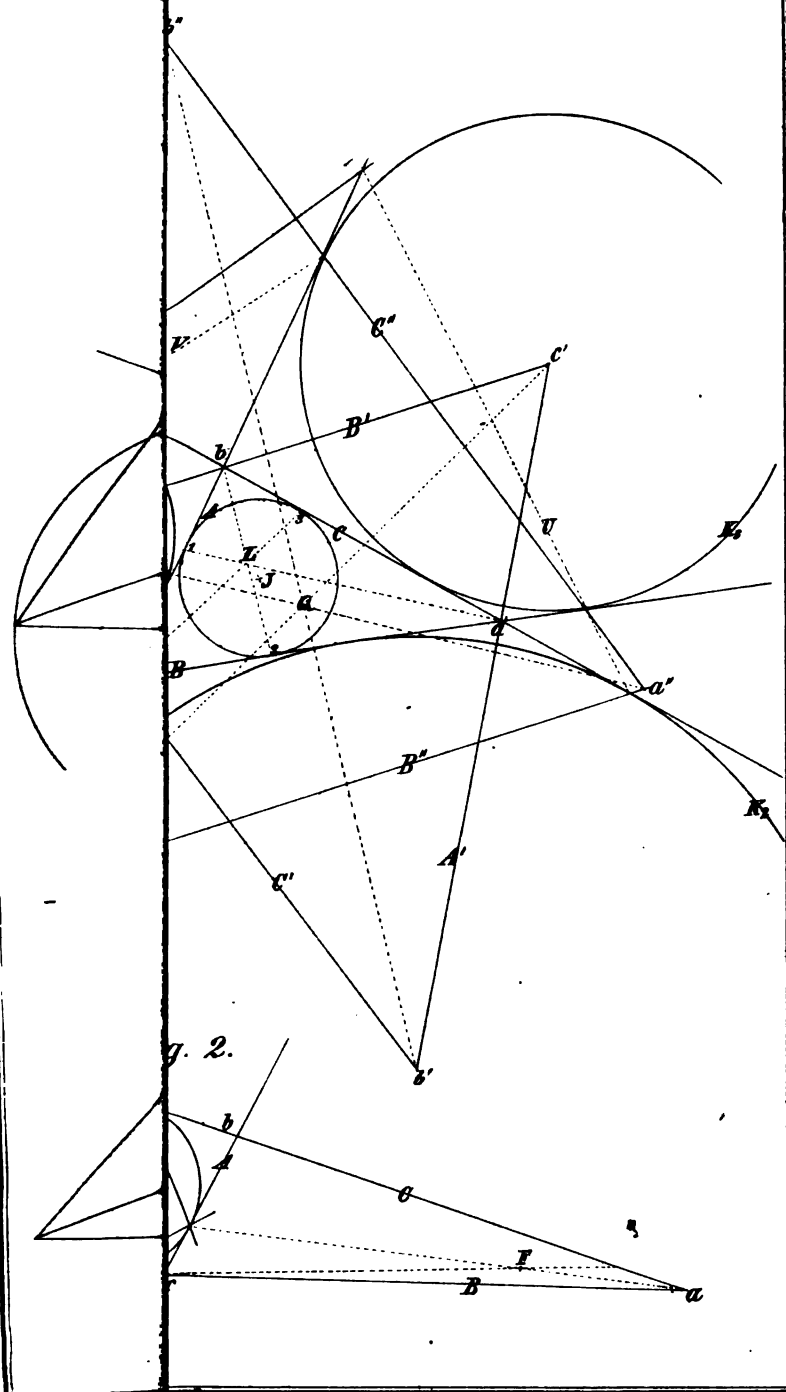
$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{n^7}{n!} = & \left[ \sum_1^{\infty} \frac{n^6}{n!} + \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{n^6}{n!} + 5 \sum_1^{\infty} \frac{n^5}{n!} + 10 \sum_1^{\infty} \frac{n^4}{n!} + 10 \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{n!} + 5 \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n!} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_1^{\infty} \frac{n}{n!} \right\} \right] = 877e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{n^8}{n!} = & \left[ \sum_1^{\infty} \frac{n^7}{n!} + \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{n^7}{n!} + 6 \sum_1^{\infty} \frac{n^6}{n!} + 15 \sum_1^{\infty} \frac{n^5}{n!} + 20 \sum_1^{\infty} \frac{n^4}{n!} + 15 \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{n!} \right. \right. \\ & \left. \left. + 6 \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_1^{\infty} \frac{n}{n!} \right\} \right] = 4140e \end{aligned}$$

Auf diesem Wege kann man weiter gehen.

Kutno, d. 1. März 1877.

G. Dobinski.





## **Verlag von Modellen für den höheren math. Unterricht.**

Bei L. Brill in Darmstadt erschien soeben:

# **Math. Gips-Modelle**

mod. nach den im math. Institut der k. technischen Hochschule in München  
unter Leitung der Proff. Dr. Brill und Dr. Klein  
angefertigten Originalen.

Formen und Abgüsse von J. Kreittmayr, Formator des National-  
museums in München.

## **Zweite Serie.**

6) Drei Modelle der Kummer'schen Fläche (16, 8, 4 Knotenpunkte reell.)  
7) Fläche 3ter Ordn. mit 4 reellen con. Knotenpunkten nebst Haupttangenten-  
curven. 8) Drei Rotationsflächen const. mittl. Krümmung nebst geodät.  
Linien. 9) Rotationsfläche von const. negat. Krümmungsmass (Kegel-  
Typus) nebst geodät. u. Asymptoten-Linien. 10) Desgl. (Hyperboloid-  
Typus) mit parallelen geodät. Linien u. geodät. Kreisen. 11) Bahncurve  
eines schweren Punktes auf einer Kugel.

Zu jeder Gruppe von zusammengehörigen Modellen ist ein erläuternder  
Text beigelegt,

Preis der ganzen Serie 120 Mark excl. Emballage u. Versandkosten.

Mod. u. Prosp. sind durch jede Buchhandlung, ferner durch Hrn. Kreitt-  
mayr in München, sowie direct durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

In unserm Verlag ist soeben erschienen:

# **Lehrbuch der Analysis**

von  
**Rudolf Lipschitz.**

**Erster Band:**

## **Grundlagen der Analysis.**

38 Bogen gr. 8<sup>o</sup>. Geh. Preis 15 Mk.

Durch die neueren Fortschritte der Analysis haben auch die Elemente  
dieser Wissenschaft allmählig tiefgreifende Umgestaltungen erlitten. Die  
Grundbegriffe und Beweise haben an Schärfe der Fassung gewonnen; vieles  
hat sich vereinfacht, dagegen hat sich der Umfang der zum Verständniss  
der modernen Mathematik und namentlich auch ihrer physikalischen und  
technischen Anwendungen erforderlichen Kenntnisse bedeutend erweitert.  
Die mit den Anfangsgründen sich befassenden Lehrbücher haben aber, be-  
sonders in Deutschland, entsprechende Veränderungen gar nicht oder doch  
nur in beschränktem Maasse erfahren; die Kluft zwischen ihren Auffassungs-  
weisen und denjenigen Anschauungen, welche dem Studenten in den Vor-  
trägen der Universitäten und technischen Hochschulen jetzt meist entgegen-  
treten, ist immer grösser geworden. Um diese Kluft auszufüllen, musste der  
Verfasser im vorliegenden Buche das ganze Gebäude der Analysis aus den  
Fundamenten vor dem Leser neu errichten und durfte bei ihm nichts vor-  
aussetzen, als diejenige Gewandtheit im Gebrauch der mathematischen Zei-  
chensprache, welche auch ein mittelmässiger Schulunterricht immerhin gibt.

Der zweite Band „Differential- und Integralrechnung“, womit das Werk  
abschliesst, ist in Vorbereitung.

**Max Cohen & Sohn (Fr. Cohen) in Bonn.**

Soeben erschienen:

# Geometrische Aufgaben

zu den

Kubischen Gleichungen, nebst einem Anhang mit Aufgaben über biquadratische Gleichungen. Ein Supplement zu jeder Sammlung algebraischer Aufgaben

von

**Dr. Emil Lampe,**

Professor an der Louisenstädtischen Gewerbeschule und an der Königl. Kriegsakademie zu Berlin.

gr. 8°. 112 Seiten. Geh. Preis 2 Mark.

Verlag von H. W. Müller in Berlin.

## I N H A L T.

	Seite.
XVII. Ueber das Dreieck. Von Max Greiner . . . . .	225
XVIII. Fortrücken der Bahnscheitel eines Pendels von geringer Elongation. Mit Bezugnahme auf das Foucault'sche Pendel. Von R. Hoppe . . . . .	264
XIX. Erste Sätze von den bestimmten Integralen unabhängig vom Differentialbegriff entwickelt. Von R. Hoppe . . . . .	270
XX. Zur Theorie der magnetischen Induction. Von L. Weber .	286
XXI. Miscellen.	
1. Ueber die geometrische Darstellung elliptischer Functionen. Von R. Strnad . . . . .	323
2. Ueber Bezeichnungen. Von R. Hoppe . . . . .	328
3. Bestimmung der Flächeninhalte derjenigen Curven, die durch die Gleichung	
$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$	
gegeben sind, in welcher $m$ eine ganze positive Zahl bezeichnet. Von S. Spitzer . . . . .	329
4. Summirung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$	
Von G. Dobinski . . . . .	326

Mar. 1

# ARCHIV

der

## MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht  
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von  
**J. A. Grunert,**  
fortgesetzt von  
**R. Hoppe.**

Einundsechzigster Teil. Viertes Heft.

(Mit 5 lithographirten Tafeln.)

---

Leipzig.  
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,  
J. Sengbusch.

1878.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung in Leipzig.

(Durch alle Buchhandlungen zu beziehen.)

# Lehrbuch der Geometrie

für  
Gymnasien  
und andere Lehranstalten.

Von

**C. Meyer,**

weiland Professor am Gymnasium zu Potsdam.

I. Theil: Planimetrie. 12. Auflage. Geh. 1 Mk. 75 Pf.

II. Theil: Stereometrie. 6. Auflage. Geh. 1 Mk. 50 Pf.

III. Theil: Algebraische Geometrie. Trigonometrie. 4. Auflage. Geh. 1 Mk. 50 Pf.

Freiexemplare behufs **Einführung** stehen gern zu Diensten.

## Neuigkeiten

aus dem Verlage von George Westermann in Braunschweig.

**Asher: Die wichtigsten Regeln der englischen**

Syntax, besonders zur Vorbereitung für Schulamtskandidaten  
und einjährig Freiwillige. 8. Geh. 75 Pf.

**Ducros: Le Parnasse français.** Choix de poésies.

3. Aufl. Miniatur-Ausgabe. Geh. Mk. 4,80. Eleg. geb. 6 Mk.

**Glaser: Das Haus des Schulmeisters.** Dem Hol-

ländischen des Gerard Keller nacherzählt. 8. Geh. Mk. 4,80.

**Heigel: Neueste Novellen.** 8. Geh. Mk. 4,80.

**Riegel: Kunstgeschichtliche Vorträge und Auf-**

sätze. Mit 8 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8.  
Geh. 8 Mk.

**Storm: Hausbuch aus deutschen Dichtern seit**

Claudius. 4. durchgesehene Auflage. 8. Geh. 6 Mk. Eleg.  
geb. Mk. 7,50.

Im Verlage von **Quandt & Hündel** in Leipzig ist soeben erschienen:

**Theorie der Elasticität, Akustik und Optik.**

Von Prof. Dr. **Hermann Klein**, Oberlehrer am Vitzthum'schen  
Gymnasium in Dresden. Gr. 8°. XII und 524 S. mit 104 Holz-  
schnitten. Preis 14 Mk.

Das Werk soll zunächst allen Lehrern der Physik einen bequemen  
Ersatz für die oft schwer zu erlangenden Originalarbeiten bieten, so-  
dann besonders den Studirenden auf Universitäten und technischen  
Hochschulen einen Dienst erweisen, wenn sie sich mit der theoretischen  
Behandlung physikalischer Probleme bekannt machen wollen.



## XXII.

## Neue Methode zur Auflösung des Dreikants.

Von

Herrn Karl Klekler,

Professor an der k. k. Marine-Akademie in Fiume.

Um ein gegebenes Dreikant aufzulösen, bringt man es in eine solche Lage gegen die Projectionsebene, dass dieselbe gegen alle Kanten gleich geneigt erscheint. Die Spur des Dreikants ist dann ein Dreieck  $ABC$  (Fig. 1a und 1b), dessen Mittelpunkt  $S'$  des umgeschriebenen Kreises die Projection des Scheitels  $S$  des Dreikants ist. Ist noch die Höhe des Scheitels über der Projectionsebene gegeben, so ist dadurch das Dreikant vollkommen bestimmt.

Die Seiten (Kantenwinkel) des Dreikants erhält man in der wahren Grösse durch Umlegen der Seitenebenen um ihre Spuren in die Projectionsebene. Bei dieser Umlegung erhält man die Seitenebenen als gleichschenklige Dreiecke  $AS_3B$ ,  $AS_3C$  und  $BS_1C$  von gleicher Schenkellänge, deren Winkel an der Spitze die 3 Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des Dreikants ergeben. Die Länge der Schenkel dieser Seitendreiecke ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten der Radius des dem Spurendreiecke umschriebenen Kreises und die Höhe des Scheitels über der Projectionsebene bilden.

Um die drei Winkel (Keile) des Dreikants zu erhalten, legt man durch den Scheitel  $S$  die Neigungswinkelenebenen senkrecht auf die Kanten. Die Spuren dieser Ebenen ergeben sich leicht aus den Schnittlinien derselben mit den Seitenebenen, welche auf der betreffenden Kante senkrecht stehen. Um z. B. die Spur der auf der Kante  $AS$  senkrechten Ebene zu erhalten, zieht man in den umgelegten

Seitenebenen  $AS_3B$  und  $AS_3C$  die Geraden  $S_3M$  und  $S_3N$  senkrecht auf die Umlegungen  $AS_3$  und  $AS_2$  der Kante  $AS$ , welche die Spuren  $AB$  und  $AC$  dieser Seitenebenen in den Punkten  $M$  und  $N$  treffen. Die Verbindungsgerade  $MN$  ist dann die gesuchte Spnr der Neigungswinkelebene des Keiles  $\alpha$  des Dreikants, und die Verbindungslinien der Punkte  $M$  und  $N$  mit dem Scheitel des Dreikants geben den Neigungswinkel  $\alpha$ . Die wahre Grösse desselben erhält man durch Umlegung um die Spur  $MN$ , und da die wahren Grössen der Schnittlinien  $MS$  und  $NS$  in den Umlegungen  $S_3M$  und  $S_3N$  bekannt sind, so gibt das an  $MN$  mit den Seiten  $S_3M$  und  $S_3N$  construierte Dreieck  $MA_1N$  die verlangte Umlegung, und bei  $A_1$  den gesuchten Neigungswinkel des Dreikantkeiles  $\alpha$ . Die auf gleiche Weise construirten Neigungswinkeldreiecke  $PB_1Q$  und  $RC_1T$  geben die beiden anderen Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  des Dreikants.

Die Verbindungslinien  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  der Ecken des Spurendreiecks mit den gegenüberliegenden Eckpunkten dieser Neigungswinkeldreiecke gehen durch den Mittelpunkt  $S'$  und sind auf den betreffenden Spuren  $MN$ ,  $PQ$  und  $RT$  senkrecht. Diese Neigungswinkeldreiecke haben je eine Seite und einen Winkel gemeinsam; die gemeinsamen Seiten  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  derselben sind aus den Kantenwinkeln  $a$ ,  $b$  und  $c$  und der Kantenlänge  $l$  des Dreikants leicht bestimmbar. Die nicht gemeinsamen Seiten  $MN(m)$ ,  $PQ(p)$  und  $RT(r)$  dieser Dreiecke bilden mit den gegenüberliegenden Eckpunkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  des Spurendreiecks Dreiecke, welche zum Spurendreieck  $ABC$  ähnlich sind, und deren andre Seiten  $a_3$ ,  $b_3$  und  $c_3$  ebenfalls durch die Kantenwinkel des Dreikants bestimmt sind.

Bringt man die Spuren  $MN$ ,  $PQ$  und  $RT$  zu ihren gegenseitigen Durchschnitten, so erhält man die Spur  $A_2B_2C_2$  des Polardreikants, dessen Seitenebenen gegen die Projectionsebene gleich geneigt sind; die Projection  $S'$  des Dreikantsscheitels erscheint also als der Mittelpunkt des dem Dreiecke  $A_2B_2C_2$  eingeschriebenen Kreises. Die Verbindungslinien der Eckpunkte  $A_2$ ,  $B_2$  und  $C_2$  dieses Dreiecks mit den Scheitelpunkten  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  der Neigungswinkeldreiecke schliessen die Seiten des Polardreikants ein, und die Winkel  $QS_1T$ ,  $NS_2R$  und  $MS_3P$  geben die Winkel desselben, welche zu den Winkeln und Seiten des gegebenen Dreikants supplementär sind.

Soll ein Dreikant aus 3 gegebenen Stücken aufgelöst, d. h. sollen die fehlenden Stücke bestimmt werden, so hat man folgende 6 Fälle zu unterscheiden:

Gegeben:

- I. die drei Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;
- II. zwei Seiten  $a$ ,  $b$ , und der eingeschlossene Winkel  $\gamma$ ;

- III. zwei Seiten  $a, b$ , und ein gegenüberliegender Winkel  $\alpha$ ;
- IV. eine Seite  $a$  und die anliegenden Winkel  $\beta$  und  $\gamma$ ;
- V. eine Seite  $a$ , ein anliegender Winkel  $\beta$  und der gegenüberliegende Winkel  $\alpha$ ; und
- VI. die drei Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ .

I. Sind die drei Seiten des Dreikants gegeben, so trägt man auf die Schenkel derselben die willkürlich gewählte Kantenlänge  $l$  auf. Die Verbindungslinien der Endpunkte der Schenkel geben die Seiten  $a_1, b_1$  und  $c_1$  des Spurendreiecks, und dieses, sowie die bekannte Kantenlänge bestimmen das Dreikant. Die 3 Winkel erhält man nach der obigen Construction aus den Neigungswinkeldreiecken.

II. Sind zwei Seiten,  $a$  und  $b$ , und der eingeschlossene Winkel  $\gamma$  gegeben, so kann man aus den gegebenen Kantenwinkeln  $a$  und  $b$ , und der willkürlich angenommenen Kantenlänge  $l$  die Seiten  $a_2, b_2$  des Neigungswinkeldreiecks für den Winkel  $\gamma$  leicht bestimmen. Man trägt nämlich (Fig. 2a) die Kantenlänge auf die Schenkel der gegebenen Winkel  $a$  und  $b$  auf, und errichtet in dem Scheitel derselben die Senkrechte auf einen Schenkel. Gleichzeitig mit  $a_2$  und  $b_2$  erhält man auch die Seiten  $a_3$  und  $b_3$  des dem Neigungswinkeldreieck anliegenden Dreiecks, welches mit dem Spurendreieck einen Eckpunkt gemeinsam hat, und die Seiten  $a_1, b_1$  des Spurendreiecks. Trägt man nun (Fig. 2b) auf die Schenkel des gegebenen Winkels  $\gamma$  die so gefundenen Seiten  $a_2$  und  $b_2$  auf, so erhält man das Neigungswinkeldreieck  $RC_1T$ , und das an die Seite  $RT$  desselben mit den Seiten  $a_3, c_3$  construirte Dreieck  $RCT$  gibt den Eckpunkt  $C$  des Spurendreiecks. Die beiden andern Eckpunkte  $A$  und  $B$  dieses Dreiecks erhält man, wenn man von  $C$  aus auf die Seiten  $CR$  und  $CT$  die bekannten Seiten  $b_1$  und  $a_1$  des Spurendreiecks aufträgt. Aus dem Spurendreieck lassen sich dann die fehlenden Stücke des Dreikants auf die oben angegebene Weise leicht bestimmen.

III. Sind zwei Seiten  $a, b$  und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel  $\alpha$  gegeben, so muss zunächst der der zweiten Seite gegenüberliegende Winkel  $\beta$  bestimmt werden. Um diesen Winkel zu erhalten, denkt man sich (Fig. 1a und 1b) die Neigungswinkelebenen der Dreikantswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  parallel verschoben, bis sie durch den Eckpunkt  $C$  des Spurendreiecks gehen. Die einen Schenkel beider Neigungswinkel, die Schnittlinien  $CG$  und  $CH$  der Neigungswinkelebenen mit den Seitenebenen  $CSA$  und  $CSB$  des Dreikants, gehen ebenfalls durch den Punkt  $C$  und sind auf den Kanten  $AS$  und  $BS$  senkrecht. Die Schnittlinien  $GK$  und  $HK$  dieser Ebenen mit der Seitenebene  $ASB$ , welche die zweiten Schenkel der Neigungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  bilden, gehen durch die beiden Punkte  $G$  und  $H$  der

Seitenkanten  $AS$  und  $BS$  und sind ebenfalls auf diesen Kanten senkrecht. Diese beiden Geraden schneiden sich im Punkte  $K$  der Seitenebenen  $ASB$ , und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Eckpunkte  $C$  des Spurendreiecks gibt die auf der Seitenebene  $ASB$  senkrechte Schnittlinie  $CK$  der beiden durch  $C$  gehenden Neigungswinkelenebenen. Diese beiden Ebenen bestimmen also die beiden bei  $K$  rechtwinkligen Dreiecke  $CGK$  und  $CHK$ , welche die Kathete  $CK$  gemeinsam haben und bei  $G$  und  $H$  die Neigungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  der entsprechenden Dreikantskeile oder deren Supplemente enthalten. Mit Hilfe dieser beiden Dreiecke kann nun der Winkel  $\beta$  aus den gegebenen Stücken leicht bestimmt werden. Sind (Fig. 3a)  $a$  und  $b$  die gegebenen Seiten, so erhält man zunächst durch Auftragen der beliebig gewählten Kantenlänge  $AS = BS = CS = l$  die Strecken  $a_1, a_2, a_3$  und  $b_1, b_2, b_3$  auf die bekannte Weise. Fällt man dann von  $C$  die Senkrechten  $CG$  und  $CH$  auf die Kanten  $AS$  und  $BS$ , so erhält man in denselben die Hypotenusen der Neigungswinkeldreiecke  $CGK$  und  $CHK$ . Construiert man an  $CG$  bei  $G$  den gegebenen Winkel  $\alpha$ , oder, wenn  $\alpha > 90^\circ$ , seinen supplementären Winkel, und zieht von  $C$  die Senkrechte  $CK$  auf den zweiten Schenkel dieses Winkels, so ist  $CGK$  das Neigungswinkeldreieck für den Winkel  $\alpha$ . Von dem Neigungswinkeldreieck des Winkels  $\beta$  kennt man jetzt die eine mit  $CGK$  gemeinsame Kathete  $CK$  und die Hypotenuse  $CH$ , aus welchen Stücken es construiert werden kann. Durchschneidet man nämlich die Gerade  $CK$  im Punkte  $H_1$  durch einen Kreisbogen vom Radius  $CH$  und dem Mittelpunkte  $C$ , so erhält man in  $H_1$  den dritten Eckpunkt dieses Dreiecks, und in dem Winkel bei  $H_1$  den gesuchten Winkel  $\beta$ .

Bei dieser Bestimmung des Winkels  $\beta$  muss noch entschieden werden, ob der durch diese Construction erhaltene, spitze Winkel des Dreiecks  $CHK$  selbst, oder sein supplementärer, stumpfer Winkel, oder vielleicht beide Winkel den gesuchten Dreikantswinkel  $\beta$  ergeben. Zur Entscheidung dieser Frage dienen die bekannten Sätze über das Dreikant, dass für

$$a+b \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 2R \text{ auch } \alpha+\beta \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 2R, \text{ und für } a \begin{cases} > \\ < \\ = \end{cases} b \text{ auch } \alpha \begin{cases} > \\ < \\ = \end{cases} \beta$$

sein muss.

Man hat daher folgende 8 mögliche Fälle:

1. für  $a+b < 2R$ ,  $a > b$ ,  $\alpha < R$ ; muss  $\beta < R$  sein;
2. „  $a+b < 2R$ ,  $a > b$ ,  $\alpha > R$ ; „  $\beta < R$  „
3. „  $a+b < 2R$ ,  $a < b$ ,  $\alpha < R$ ; kann  $\beta \begin{cases} < \\ > \end{cases} R$  „
4. „  $a+b < 2R$ ,  $a < b$ ,  $\alpha > R$ ; ist das Dreikant unmöglich;

5. für  $a+b > 2R$ ,  $a < b$ ,  $\alpha > R$ ; muss  $\beta > R$  sein;
6. „  $a+b > 2R$ ,  $a < b$ ,  $\alpha < R$ ; „  $\beta > R$  „
7. „  $a+b > 2R$ ,  $a > b$ ,  $\alpha > R$ ; kann  $\beta \gtrless R$  „
8. „  $a+b > 2R$ ,  $a > b$ ,  $\alpha < R$ ; ist das Dreikant unmöglich.

Aus diesem Schema kann nun leicht entnommen werden, welcher der beiden durch die Construction erhaltenen Winkel der gesuchte Dreikantswinkel  $\beta$  ist. Hierbei ist noch zu bemerken, dass in den Fällen 3. und 7., wo beide Winkel der Aufgabe genügen, bei besonderer Annahme der gegebenen Stücke das Dreikant auch unmöglich werden kann; es kann nämlich, da in diesen Fällen  $CH < CG$  ist,  $CH$  auch kleiner als  $CK$  sich ergeben, wo dann das Dreieck  $CHK$ , und mit ihm der Winkel  $\beta$ , unmöglich wird.

Um jetzt das Spurendreieck, und aus ihm die fehlenden Stücke des Dreikants zu erhalten, construirt man an eine Gerade  $A_1M$  (Fig. 3b) als gemeinsamen Schenkel, die beiden bekannten Winkel  $MA_1N = \alpha$  und  $MA_1Q = \beta$ , und trägt auf die nicht gemeinsamen Schenkel die früher bestimmten Seiten  $a_2$  und  $b_2$  der durch den Scheitel gehenden Neigungswinkeldreiecke auf. Verbindet man die Endpunkte  $N$  und  $Q$  dieser Strecken und verlängert diese Verbindungslinie bis zum Durchschnitte  $M$  mit dem gemeinsamen Schenkel  $A_1M$  der beiden Winkel, so erhält man in  $MA_1N$  und  $MA_1Q$  die beiden mit der gemeinsamen Seite  $c_2$  und dem gleichen Winkel  $z$  auf einander gelegten Neigungswinkeldreiecke der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  des Dreikants. Der  $A_1$  gegenüberliegende Eckpunkt  $A$  des Spurendreiecks liegt in der von  $A_1$  auf  $MN$  gefällten Senkrechten und ist durch die Länge der Seite  $AN = b_3$  bestimmt. Die von  $A$  auf  $AN$  aufgetragene Seite  $b_1$  des Spurendreiecks bestimmt den Eckpunkt  $C$ , und die Seitenlänge  $BC = a_1$  den dritten Eckpunkt  $B$  desselben.

IV. Sind zwei Winkel,  $\alpha$  und  $\beta$ , und die zwischenliegende Seite  $c$  gegeben, so benützt man wieder die durch den Punkt  $C$  gehenden Neigungswinkeldreiecke  $CGK$  und  $CHK$  zur Construction. Nimmt man die gemeinsame Kathete  $CK$  willkürlich an, so kann man (Fig. 4a) in  $CGK$  und  $CHK$  aus den beiden gegebenen Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ , oder deren Supplementen, diese beiden Dreiecke construiren. Die Katheten  $GK$  und  $HK$  geben die Abstände des in der Ebene der Seite  $c$  gelegenen Punktes  $K$  von den Kanten  $AS$  und  $BS$ , welche positiv oder negativ genommen werden müssen, je nachdem die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  kleiner oder grösser als  $90^\circ$  sind. Ist also (Fig. 4b)  $AS_3B$  die gegebene Seite  $c$ , und zieht man in den Abständen  $GK$  und  $HK$  die Parallelen zu den Schenkeln  $S_3A$  und  $S_3B$  dieses Winkels, (wobei die positive Richtung dieser Abstände gegen die innere Winkelfläche an-

genommen werden muss), so erhält man in dem Durchschnitte derselben den Punkt  $K$ . Die Senkrechten von  $K$  auf  $S_3A$  und  $S_3B$  bestimmen die Lage der Punkte  $G$  und  $H$  in den Kanten  $SA$  und  $SB$  des Dreikants oder in deren Verlängerungen. Errichtet man daher in  $G$  und  $K$  (Fig. 4a) die Senkrechten  $HS_1$  und  $GS_2$  auf die Hypotenusen  $CG$  und  $CH$  der Dreiecke  $CGK$  und  $CHK$ , und trägt auf dieselben die früher bestimmten Strecken  $GS_3$  und  $HS_3$  in ihrer entsprechenden Richtung auf, so erhält man die Dreiecke  $CHS_1$  und  $CGS_2$ , welche bei  $S_1$  und  $S_2$  die Seiten  $a$  und  $b$  des Dreikants, oder deren Supplemente enthalten. Die Hypotenusen dieser Dreiecke geben die Kantenlänge  $l$ , aus welcher die Seitendreiecke  $AS_2C$  und  $BS_1C$  des Dreikants, mit den Seiten  $a_1$  und  $b_1$  des Spurendreiecks gefunden werden. Trägt man noch die gefundene Kantenlänge auf die Schenkel des Winkels  $c$ , so ergibt sich in  $AB$  die dritte Seite  $c_1$  des Spurendreiecks, wodurch dasselbe und mit ihm das Dreikant bestimmt erscheint.

V. Sind zwei Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , und eine gegenüberliegende Seite  $a$  gegeben, so kann die zweite gegenüberliegende Seite  $b$  mit Hilfe der durch  $C$  gehenden Neigungswinkeldreiecke  $CGK$  und  $CHK$  leicht bestimmt werden. Ist  $a$  (Fig. 5.) die gegebene Seite, so trägt man auf die Schenkel dieses Winkels die beliebige Kantenlänge  $l = S_1A = S_1B$  auf, und fällt von  $C$  die Senkrechte  $CH$  auf den andern Schenkel desselben. Construiert man dann an  $CH$  den gegebenen Dreikantswinkel  $\beta$  oder sein Supplement, und zieht die Senkrechte  $CK$ , so ist  $CHK$  das Neigungswinkeldreieck des Winkels  $\beta$ . Von dem zweiten dieser rechtwinkligen Dreiecke ist nun die Kathete  $CK$  und ein spitzer Winkel ( $\alpha$  oder dessen Supplement) gegeben, aus welchen Stücken dasselbe in  $CKG$  construiert werden kann. Errichtet man hierauf in  $H$  die Senkrechte auf  $CH$  und durchschneidet dieselbe in  $S_2$  durch einen Kreisbogen vom Radius  $l$  aus dem Mittelpunkte  $C$ , so gibt der Winkel  $HS_2C$  oder sein Supplement die gesuchte Seite  $b$  des Dreikants. Wie im Falle III. muss auch hier noch bestimmt werden, welcher der beiden so erhaltenen Winkel der Aufgabe genügt, was aus dem dort gegebenen Schema, wenn man die Seiten und Winkel gegenseitig vertauscht, leicht entnommen werden kann. Aus den nun bekannten Seiten  $a$  und  $b$ , und den gegenüberliegenden Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  werden das Spurendreieck und die fehlenden Stücke, wie im Falle III., gefunden.

VI. Soll aus den drei Winkeln das Dreikant bestimmt werden, so geht die Construction von einem der drei durch den Scheitel gehenden Neigungswinkeldreiecken z. B.  $RC_1T$  aus. Dieses Dreieck enthält den gegebenen Winkel  $\gamma$  des Dreikants, und die beiden andern

Winkel desselben,  $x$  und  $y$ , sind aus den gegebenen Dreikantswinkeln leicht bestimmbar. Es ist nämlich, wie leicht ersichtlich,

$$x + y = 180^\circ - \gamma; \quad x - y = \alpha - \beta.$$

Ist daher (Fig. 6a)  $AOB$  der Winkel  $\gamma$ , und macht man  $BOC$  gleich  $\alpha$  und  $COD$  gleich  $\beta$ , so gibt der zu  $\gamma$  supplementäre Winkel  $EOB$  die Summe, und  $BOD$  die Differenz der Winkel  $x$  und  $y$ . Halbirt man also den Winkel  $EOD$  durch den Strahl  $OF$ , so erhält man in  $EOF$  den Winkel  $x$  und in  $FOB$  den Winkel  $y$ . Construiert man mit den Winkeln  $\gamma$ ,  $x$  und  $y$ , und mit willkürlicher Seitenlänge das Dreieck  $RC_1T$  (Fig. 6b), so geben  $RC_1$  und  $TC_1$  die Seiten  $b_2$ ,  $a_2$ , und  $RT$  die Seite  $r$  des Neigungswinkeldreiecks für den Winkel  $\gamma$ . Ebenso kann man an die gemeinsame Seite  $a_2$  mit den Winkeln  $\beta$  und  $x$  das Neigungswinkeldreieck des Winkels  $\beta$  construiren, und erhält so die Seiten  $c_2$  und  $p$  dieses Dreiecks. Jetzt handelt es sich noch um die Bestimmung der Strecke  $a_3$ , da aus  $a_3$  und  $a_2$  die Seite  $a_1$  des Spurendreiecks und die Kantenlänge  $l$  gefunden werden kann. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $RCT$  und  $PBQ$  (Fig. 1a und 1b) folgt:

$$r : a_3 = a_3 : p;$$

d. h.  $a_3$  ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen  $p$  und  $r$ . Construiert man daher über  $RT$  (Fig. 6b) als Durchmesser einen Halbkreis und errichtet im Punkte  $P$  die Senkrechte  $PL$ , so ist nach einem bekannten Satze:

$$r : TL = PL : p,$$

mithin  $TL$  die gesuchte Strecke  $a_3$ . Der  $C_1$  gegenüberliegende Eckpunkt  $C$  des Spurendreiecks ist dann durch die Senkrechte  $CC_1$  auf  $RT$  und durch die Entfernung  $CT = a_3$  bestimmt, wobei sich auch die Seite  $CR = b_3$  ergibt. Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 6c) mit der Hypotenuse  $a_3$  und einer Kathete  $a_2$ , so gibt die zweite Kathete desselben die Kantenlänge  $l$ , aus welcher auch die Seite  $a_1$  des Spurendreiecks leicht gefunden werden kann. Auf ganz gleiche Weise findet man aus  $b_2$  und  $b_3$  die entsprechende Seite  $b_1$  des Spurendreiecks. Durch die Seiten  $a_1$  und  $b_1$  und den von ihnen eingeschlossenen Winkel bei  $C$  ist aber das Spurendreieck  $ABC$  (Fig. 6b) und mit ihm das Dreikant vollkommen bestimmt.

Fiume, den 15. September 1876.

## XXIII.

## Zur Theorie des Keiles.

Von

P. Meutzner.

Die folgenden Zeilen wollen zunächst auf gewisse Fehler aufmerksam machen, die sich in verbreiteten physikalischen Lehrbüchern bei der Ableitung des Satzes vom Gleichgewichte der Kräfte am Keile vorfinden, und beabsichtigen andererseits, womöglich eine einheitliche Fassung dieses Theoremes anzubahnen. Eine kurze Herleitung des Theoremes sei vorausgeschickt.

Wird in ein widerstehendes Mittel ein materielles, gleichschenkeliges Dreieck hineingetrieben vermöge einer in der Richtung der Höhe  $DC$  wirkenden Kraft  $P$ , so wird ein Zerreißen jenes Mittels in einer zu den Schenkeln des Dreiecks im Allgemeinen senkrechten Richtung die Folge sein. Die Wirkung von  $P$  ist sonach äquivalent mit der zweier, unter den gegebenen Verhältnissen einander gleichen Druckkräfte  $Q = Q'$ , deren Richtungen man erhält, wenn man von einem in der Richtung der Kraft  $P$  liegenden Punkte, z. B.  $\alpha$ , auf  $AC$  und  $BC$  Normalen fällt. Ist  $\alpha\delta$  das Bild von  $P$ , so sind  $\alpha\beta$  und  $\beta\delta = \alpha\gamma$  die Repräsentanten der  $P$  äquivalenten Druckkräfte  $Q = Q'$ , so dass

$$P : Q : Q' = \alpha\delta : \alpha\beta : \beta\delta$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke endlich:

$$P : Q : Q' = AB : AC : BC$$

d. h.: „Eine senkrecht auf die Basis eines materiellen gleichschenkligen Dreiecks wirkende Kraft  $P$  ist äquivalent mit 2 einander



gleichen, senkrecht zu den Schenkeln wirkenden Druckkräften  $Q = Q'$ , wenn erstere zu je einer der letzteren sich verhält wie die Basis zu einem Schenkel“.

Hieraus folgt durch Umkehrung: Drücken 2 Kräfte  $Q = Q'$  senkrecht auf die Schenkel eines materiellen gleichschenkligen Dreiecks, so kann ihnen das Gleichgewicht gehalten werden durch eine zur Basis senkrechte Kraft  $P$ , wenn diese zu je einer Druckkraft sich verhält wie die Basis zum Schenkel“.

Betrachten wir schliesslich  $ABC$  als Durchschnitsfigur eines gleichschenkligen Keiles, so haben wir den Satz vom Gleichgewichte der Kräfte am Keile hierdurch gewonnen. — Sehen wir uns jetzt in einigen Lehrbüchern nach der Fassung dieses Lehrsatzes um, wir lesen:

„Beim Keile findet Gleichgewicht statt wenn sich die Kraft zur Last verhält wie der Rücken zur Seite des Keiles“. (Reis.)

„Eine Kraft  $Q$ , welche rechtwinklig gegen den Rücken des Keiles wirkt, hält einem rechtwinklig gegen die Seite des Keiles wirkenden Drucke  $P$  das Gleichgewicht, wenn sich  $Q$  zu  $P$  verhält wie die Breite des Keilrückens zur Länge des Keiles“. (Müller.)

„Es verhält sich für jede Hälfte des Keiles Kraft zur Last wie der halbe Rücken zur Höhe des Keiles, oder für die Gesamtwirkung Kraft zur Last, wie der Rücken des Keiles zu seiner Höhe“. (Gerding.)

„Die Kraft verhält sich zum Widerstande wie die halbe Breite des Rückens zur Seitenlinie des Keiles“. (Spiller.)

„Die Kraft verhält sich zu einer der beiden Lasten, wie der Rücken des Keiles zu einer seiner Seiten“. (Fliedner.)

Diese Aufzählung zeigt zur Genüge, dass nach Inhalt wie nach Form das beregte Theorem einen sehr verschiedenen Ausdruck gefunden.

Zuvörderst scheint es wünschenswert, über eine einheitliche Bezeichnung der einzelnen Stücke des Keiles sich zu verständigen. Die der Schneide des Keiles gegenüberliegende Fläche, resp. deren lineare Darstellung in der herkömmlichen Durchschnitsfigur soll kurz der Rücken ( $r$ ) des Keiles heissen, in den obigen Sätzen findet sich dafür auch noch die Bezeichnung „Breite“. — Die beiden die Schneide des Keiles bildenden Flächen resp. deren lineare Darstellungen mögen die Seiten ( $s$ ) des Keiles genannt werden; (der Einfachheit wegen setzen wir voraus, der Keil sei gleichschenkelig.) Der dafür auch

noch gebrauchte Ausdruck „Länge“ (z. B. auch bei Poisson, Koppe u. a.) wenn demselben auch eine gewisse Berechtigung nicht abgesprochen werden kann, sofern man ja den Keil auf die schiefe Ebene zurückzubeziehen pflegt, ist doch, zumal wenn dieser Begriff vorher nicht definirt ist, wie Beispielsweise bei Müller, oder das Theorem nicht im Zusammenhange mit seiner Ableitung gelesen wird, nicht frei von Zweideutigkeit: kann man doch bei diesem Worte „Länge“ recht wol auch an den Abstand der Schneide vom Rücken denken. In der Tat mag im folgenden unter „Länge“ ( $l$ ) des Keiles, der eben definirte Abstand verstanden werden im Gegensatze zu der von Gerding dafür angewendeten Bezeichnung „Höhe“. — Für das durch das Eintreiben des Keiles zuüberwindende Hindernis findet sich bald Last, bald Druck, bald Widerstand gebraucht, sollte es sich in Gemässheit der üblichen Bezeichnung bei den anderen einfachen Maschinen nicht empfehlen den Ausdruck „Last“ anzunehmen? Wir wählen dafür das Zeichen  $Q$ , wie für die treibende, auf den Rücken senkrecht wirkende Kraft  $P$ .

Bei Zugrundelegung dieser Zeichen lassen sich die obigen Sätze kürzlich durch folgende Formeln wiedergeben:

$$\begin{array}{ll}
 P: Q = r: s & \text{Reis, Müller, Fliedner.} \\
 \text{oder} & \\
 \left. \begin{array}{l} P: Q = \frac{1}{2}r: l \\ P: 2Q = r: l \end{array} \right\} & \text{Gerding.} \\
 P: 2Q = \frac{1}{2}r: s & \text{Spiller.} \quad \text{s. p. 6.}
 \end{array}$$

Wenden wir uns zu einer kritischen Besprechung einiger Ableitungen dieser Sätze.

Reis Physik<sup>2</sup> p. 91. sagt: „Dieses Gesetz geht leicht aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten hervor; denn ist der Keil mit der Kraft  $P$  um den Weg  $dc$  (s. Fig. 2.) in die zu sprengende Masse eingedrungen, so ist dieselbe um den Weg  $de$  auseinander gedrängt; folglich ist  $P:dc = Q:de$  oder  $P:Q = de:dc$ .“

Daraus ergibt sich ihm schliesslich

$$P: Q = ab: ac$$

Augenblicks noch die Richtigkeit der Deduction zugegeben, wäre der Beweis doch einfacher dadurch zu geben, dass man den Keil ganz in den Körper eingedrungen denke. Ohne erst auf ähnliche Dreiecke zurückgreifen zu müssen, ergäbe sich dann

$$P: ac = Q: db \quad \text{und} \quad P: Q = ab: ac$$

Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten musste aber doch

die virtuelle Arbeit der senkrecht zu dem Rücken wirkenden Kraft  $P$  durch  $P:cf$  ausgedrückt werden, wenn  $cf$  den Abstand des Punktes (der Schneide)  $c$  von  $de$  bedeutet, da  $P$  nur um  $cf$ , nicht um  $de$  „in die zusprengende Masse eingedrungen ist.“ Schliesslich würde dies auf folgenden Ausdruck des gesuchten Satzes führen:

$$P:cg = Q:al \quad \text{oder} \quad P:Q = r:l$$

Ganz ähnlich wie Reis hat auch Weinhold in seiner weitverbreiteten „Vorschule der Physik“<sup>1</sup> p. 64. das Gleichgewicht der Kräfte am Keile nachgewiesen. In dem Beispiele — eine knappe Fassung des Lehrsatzes fehlt — welches das Spiel der Kräfte versinnlichen soll, ist ein 25<sup>cm</sup> langer, 5<sup>cm</sup> breiter Keil mit einer Kraft von 100 Kgr. „seiner ganzen Länge nach“ in das Holz eingetrieben, daraus wird die Arbeit der Kraft gleich 25 MK. berechnet und hieraus „die auseinander treibende Kraft“ oder umgekehrt der zu überwindende Druck des Holzes gleich 500 Kgr. gefunden. Allerdings sagt W. nicht, was man unter der Länge des Keiles verstehen soll; entweder ist — wie wahrscheinlich — die Seite  $ac$  gemeint; dann ist  $P:ac$  aber kein streng richtiger Ausdruck für die Arbeit der Kraft  $P$ ; oder man erhält wie zuvor  $P:Q = r:l$  d. h. das in Rede stehende Theorem in einer anderen als der üblichen Gestalt.

In dem Lehrbuche (auch Grundrisse) der Physik von Müller ist die ganze Frage sehr kurz abgetan. Dort heisst es: „Aus der Theorie der schiefen Ebene lässt sich leicht ableiten, dass zwischen der Kraft  $Q$  und der Last  $P$  — M. hat sonderbarer Weise hier die umgekehrte Bezeichnung für Kraft und Last wie sonst — „am Keile Gleichgewicht stattfindet, wenn  $Q = P:\sin\alpha$ , vorausgesetzt, dass die Last  $P$  rechtwinklig auf die Seitenfläche, die Kraft  $Q$  rechtwinklig gegen den Rücken wirkt, und dass mit  $\alpha$  der Winkel der Schneide bezeichnet wird.“ Die Umdeutung dieser Formel aber leitet er mit den merkwürdigen Worten ein: „Wenn der Winkel  $\alpha$  nicht zu gross ist, lässt sich das Gesetz des Gleichgewichtes am Keile in Worten auch so ausdrücken: (folgt das Gesetz);“ merkwürdig weil der Wortlaut des Gesetzes richtiger ist als die Formel, deren ungenaue Deutung er sein soll. Es folgt doch bei der gewöhnlichen Ableitung — M's. Bezeichnungen seien beibehalten —

$$Q:P = r:s = 2bg:bc$$

$$Q = P \cdot bg:bc \quad \text{d. h.} \quad Q = 2P \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

Ganz abweichend von den übrigen Lehrbüchern ist in der wol weniger verbreiteten „Schule der Physik“ von Gerding p. 46. die vor-

liegende Frage behandelt. Mit Benutzung der Bezeichnung unserer Figur heisst es dort: „Es sei  $abc$  ein Keil, der aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken (!)  $agc$  und  $bgc$  zusammengesetzt betrachtet werden kann. Die Linie  $ab$  heisst der Rücken des Keiles und  $gc$  seine Höhe. — Betrachten wir nun das Eindringen des Keiles, so nehmen irgend 2 Teilchen  $d$  und  $e$  des zu trennenden Körpers die Lagen  $d'$  und  $e'$  an; sie sind von einander entfernt worden, indem sie auf den schiefen Ebenen fortrücken; dieselbe Bewegung haben aber auch alle übrigen Teile des Körpers gemacht, mithin haben wir beim Keile zwei schiefe Ebenen, bei denen der Widerstand des Körpers die Last bildet und, wo die Kraft in der Richtung der Grundlinien derselben wirkt. Es verhält sich demnach für jede Hälfte des Keiles Kraft zur Last, wie der halbe Rücken zur Höhe des Keiles oder für die Gesamtwirkung: Kraft zur Last wie der Rücken des Keiles zu seiner Höhe.“

Formulirt würde das Gleichgewichtsgesetz sonach lauten:

$$P:Q = \frac{1}{2}r:l \quad \text{I.}$$

für die Gesamtwirkung ist es nach dem Wortlaute möglich

$$P:2Q = r:l \quad \text{od.} \quad 2P:2Q = r:l^*) \quad \text{II.}$$

zu setzen. Um den offenbaren Widerspruch zwischen I. und II. zu vermeiden, müsste es natürlich heissen

$$2P:Q = r:l^*)$$

Jedenfalls ist der Wortlaut nicht klar. — Verweilen wir noch einen Augenblick bei I. Da hier  $abc$  als aus 2 schiefen Ebenen bestehend betrachtet wird, die unter der Wirkung der Kraft  $P$  ihren ganzen mechanischen Effect hervorbringen, so verteilt sich  $P$  in gleicher Weise auf die beiden schiefen Ebenen. Für jede Hälfte des Keiles erhält man dann

$$\frac{1}{2}P:Q = \frac{1}{2}r:l$$

und für die Gesamtwirkung:

$$P:2Q = \frac{1}{2}r:l$$

wofür auch

$$P:Q = r:l$$

gesetzt werden könnte, d. h. wir erhalten dieselbe Form des Ge-

---

\*) Dann wäre unter  $P$  nur die halbe wirkende Kraft verstanden.

setzes, auf welche Reis nach einer früheren Bemerkung (p. 4.) hätte geführt werden müssen.

So sehen wir uns hier vor das Dilemma gestellt als Ausdruck des Gesetzes vom Gleichgewichte der Kräfte am Keile entweder

$$P:2Q = \frac{1}{2}r:l; \quad P:Q = r:l$$

oder

$$P:2Q = \frac{1}{2}r:s; \quad P:Q = r:s$$

anzunehmen. In praxi würde es ziemlich auf dasselbe hinauskommen, da bei den wirklich benutzten Keilen  $s$  und  $l$  von einander nur wenig verschieden sind und diese Differenz ganz in den Hintergrund tritt gegenüber dem Ausfalle in der theoretischen und praktischen Kraftleistung des Keiles, welche durch die starke Reibung beim Gebrauche des Instrumentes verursacht wird. Wie hat man sich aber von theoretischem Gesichtspunkte aus zu entscheiden? Die Mehrzahl unserer Lehrbücher hat der 2ten Form des Gesetzes den Vorzug gegeben; sollten also in den beiden obigen Ableitungen des ersten Ausdruckes noch Fehler versteckt liegen? Allerdings! Was zunächst die Ableitung nach Gerding betrifft, so ist ja richtig, dass bei dieser Auffassung die Kraft  $P$  parallel der Grundlinie der schiefen Ebene wirkt. Trotzdem ist der für diesen Fall geltende Gleichgewichtssatz — Kraft zur Last wie die Höhe zur Grundlinie der schiefen Ebene — um des willen nicht anwendbar: bei dem Beweise dieses Satzes würde die auf der schiefen Ebene liegende Last  $Q$  in eine Componente parallel der Grundlinie und eine senkrecht zur Länge der schiefen Ebene zerlegt, letztere dann aus der weiteren Betrachtung ganz weggelassen, weil sie durch die Festigkeit der schiefen Ebene aufgehoben wird; anders beim Keile. Hier haben wir auf beiden Seiten solche senkrechte Druckkräfte, die sich mit nichten aufheben, vielmehr zu einer Resultante in der Richtung von der Schneide nach dem Rücken zusammensetzen und eben dieser Resultante hat  $P$  das Gleichgewicht zu halten. — Was dann die Ableitung desselben Satzes  $P:Q = r:l$  mittels des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten anlangt, so ist der früher hervorgehobene Fehler nochmals begangen, weil nicht beachtet ist, dass die Druckkräfte  $Q$  senkrecht zu den Seiten des Keiles wirken sollen, folglich  $de$  (Fig. 2.) nicht die virtuelle Verrückung,  $Q:de$  nicht das virtuelle Moment der Last sein kann. Man müsste vielmehr sagen: ist der Keil (Fig. 3.) mit der Kraft  $P$  um  $fc$  in den zu sprengenden Körper eingedrungen, so sind die zu den Seiten senkrecht wirkenden Lasten  $Q$  um die Wege  $fd$  (senkrecht  $bc$ ) und  $fe$  (senkrecht  $ac$ ) fortgehoben werden. Daher ist:

$$P \cdot fc = Q \cdot fd + Q \cdot fe = 2Q \cdot fd = Q \cdot 2fd$$

folglich

$$P:2Q = fd:fe = \frac{1}{2}r:s$$

oder

$$P:Q = 2fd:fc = r:s$$

d. h. „Am Keile findet zwischen einer senkrecht zum Rücken wirkenden Kraft und einer rechtwinklig auf eine der Seiten drückenden Last Gleichgewicht statt, wenn Kraft zur Last sich wie der Rücken zur Seite verhält.“

Meissen.

## XXIV.

## Kegelflächen zweiter Ordnung mit einer Symptosenaxe.

Von

**Emanuel Czuber**

in Prag.

Der Kegelschnitt  $K$  (Fig. 1.) sei gemeinschaftliche Leitcurve zweier Kegel, deren Scheitel  $s$  und  $s_1$  sich nach  $s'$  und  $s'_1$  auf die Ebene von  $K$  orthogonal projeciren. Es handle sich um den noch übrigen Schnitt der beiden Kegelflächen, resp. um dessen Projection auf die bereits erwähnte Ebene. Zu diesem Ende legt man durch die Gerade  $ss_1$  ein Ebenenbüschel; jede Ebene desselben wird im Allgemeinen beide Kegelflächen, und zwar nach je zwei Erzeugenden schneiden; diese vier Erzeugenden bilden ein vollständiges Vierseit, zwei Gegenecken desselben sind die Scheitel  $ss_1$ , zwei andere die Punkte auf  $K$ , welche die betreffende Ebene ausschneidet, das dritte Gegeneckenpaar gehört der übrigen Durchdringung an. Ist  $\delta$  der Schnittpunkt der Geraden  $ss_1$  mit der Ebene  $K$ , so bilden die Tracen des Ebenenbüschels ein Strahlenbüschel in  $K$  mit  $\delta$  als Mittelpunkt; heben wir die Ebene  $e$  mit der Trace  $e'$  hervor, welche letztere  $K$  in den Punkten 1, 2 trifft, so sind  $a, b$  die Schnittgeraden des Kegels  $s, a_1, b_1$  jene von  $s_1$ , und  $a, b, a_1, b_1$  bilden das genannte vollständige Vierseit, in welchem  $ss_1, 1, 2, I, II$  Gegeneckenpaare sind. Die Zeichnung gibt von allem die Projection auf die  $K$ -Ebene. Bei einer Aenderung von  $e'$  wird die Diagonale  $I', II'$  einerseits durch den zu  $\delta$  in Bezug auf  $ss_1$  zugeordneten harmonischen Punkt  $\delta_1$  hindurchgehen, um diesen sich also drehen, andererseits aber auch den zu-

geordnet harmonischen Punkt zu  $\delta$  in Bezug auf die Schnittpunkte 1, 2 enthalten; letztere aber durchläuft bei der Drehung von  $c'$  die Polare  $D$  von  $\delta$  in Bezug auf  $K$ . — Damit ist bewiesen, dass der Ort der Punkte  $I'$ ,  $II'$  in central-collinearer Verwandtschaft zu  $K$  steht; denn betrachten wir die Punkte 1, 2 und  $I'$ ,  $II'$ , so liegen entweder 1,  $I'$  und ebenso 2,  $II'$  auf einem Strale durch  $s_1'$ , oder 1,  $II'$  und 2,  $I'$  auf einem Strale durch  $s'$ , und die Verbindungslinie von 1, 2 einerseits und jene von  $I'$ ,  $II'$  andererseits schneiden sich in einem Punkte  $p$  der festen Geraden  $D$ . Mithin ist der Ort der Punkte  $I'$ ,  $II'$  der zu  $K$  collineare Kegelschnitt  $K_1'$  in Bezug auf  $s'$  oder  $s_1'$  als Collineationscentrum,  $D$  als Collineationsaxe. Die beiden Kegel haben ausser dem Kegelschnitt  $K$  noch einen zweiten  $K_1$  gemein. Die Ebene derselben ist durch  $D$  und den Punkt  $\delta_1$  auf  $ss_1$ , dessen Projection  $\delta_1'$  ist, bestimmt.

Die Gerade  $D$  spielt nun in Bezug auf die beiden Kegel eine eigentümliche Rolle. Als Collineationsaxe hat sie bezüglich beider Kegelschnitte  $K$  und  $K_1'$  dasselbe Punktsystem. Sind  $p$  und  $\pi$  zwei conjugirte Punkte desselben, dann sind  $e'$  ( $p\delta$ ) und  $e_1'$  ( $p\delta_1'$ ) die Polaren von  $\pi$  bezogen auf  $K$  und  $K_1'$ ; räumlich gesprochen bestimmen  $e'$  und  $e_1$  die gemeinschaftliche Polarebene von  $\pi$  bezüglich beider Kegel. Die Punkte der Geraden  $D$  haben also für beide Kegel dieselbe Polarebene.

Das Punktsystem in  $D$  wird ein hyperbolisches, elliptisches oder parabolisches werden, je nachdem  $\delta$  ausserhalb, innerhalb oder auf dem Kegelschnitt  $K$  selbst liegt (selbstverständlich hat auch  $\delta_1$  bezüglich  $K_1$  die gleiche Lage); im ersten Falle treten zwei reelle Doppelpunkte (Asymptotenpunkte) auf, für welche die Polarebenen zu Berührungsebenen werden; es haben also die Kegel in diesem Falle zwei gemeinschaftliche Tangirungsebenen, die Durchdringung besitzt zwei reelle Doppelpunkte  $d, d_1$  mit den Tangentenpaaren  $\delta d, \delta_1 d$  und  $\delta d_1, \delta_1 d_1$ . Im zweiten Falle, wo das Punktsystem in  $D$  elliptisch ist, werden die Doppelpunkte, mithin auch die gemeinsamen Tangirungsebenen imaginär. Im dritten Falle endlich fallen die Doppelpunkte in einen zusammen, das Gleiche geschieht mit den gemeinsamen Berührungsebenen, so dass sich die beiden Kegel längs einer Erzeugenden berühren; es fällt dann auch der Kegelschnitt  $K_1$  mit  $K$  überein. Der letztbesprochene Fall bildet den Uebergang vom ersten zum zweiten.

Fassen wir das Resultat zusammen:

Haben zwei Kegel einen Kegelschnitt  $K$  gemein, so schneiden sie sich noch nach einem zweiten Kegelschnitt  $K_1$ ; die



Schnittlinie  $D$  der beiden Ebenen  $K$  und  $K_1$  geht durch die zwei reellen, getrennten oder zusammenfallenden, oder die zwei imaginären Doppelpunkte der Durchdringung (Schnittpunkte von  $K$  und  $K_1$ ); in diesen haben die Kegelflächen reelle, getrennte oder zusammenfallende \*), oder imaginäre gemeinsame Tangirungsebenen.

Die Gerade  $D$  hat von Escherich (nach Chasles' Vorschlag) eine Symptosenaxe der beiden Flächen genannt (Grunert's Archiv, 1877, I; allgemeinere Auffassung und für Flächen zweiten Grades überhaupt). Die Ebenen  $K$  und  $K_1$ , als deren Schnittlinie  $D$  erscheint, bezeichnet er als Symptosenebenen. Wählt man in der Ebene  $K$  (oder  $K_1$ ) irgend einen Punkt und bestimmt seine Polare in Bezug auf den darin liegenden Kegelschnitt, so fixirt diese mit  $s$  einerseits und mit  $s_1$  andererseits die Polarebenen des gewählten Punktes bezüglich des einen und des andern Kegels. Diess lässt sich nun so aussprechen:

Die beiden Symptosenebenen ( $K$  und  $K_1$ ) haben die Eigenschaft, dass die Polarebenen irgend eines ihrer Punkte in Bezug auf beide Kegel sich in ihnen selbst schneiden.

Dazu kommt die schon früher von  $D$  erwiesene Eigenschaft, die sich in folgende Worte kleiden lässt:

Die Punkte der Symptosenaxe  $D$  haben bezüglich beider Kegel dieselbe Polarebene.

Die beiden letztgenannten Sätze hat v. Escherich als Definition für Symptosenebene und -Axe aufgestellt.

Weil  $D$  die Polare von  $\delta$  bezüglich  $K$  und von  $\delta_1$  bezüglich  $K_1$  ist, so sind die Ebenen  $D_s$  und  $D_{s_1}$  die Polarebenen der Geraden  $s$ ,  $s_1$  bezüglich der Kegel  $s$  und  $s_1$ . Wird nun beachtet, dass die Punkte  $s$ ,  $s_1$  von  $\delta$ ,  $\delta_1$  harmonisch getrennt werden, und dass die Ebenen  $D\delta$  und  $D\delta_1$  gleichbedeutend sind mit den Symptosenebenen, so lässt sich der Satz aussprechen:

Die beiden Symptosenebenen der Kegel werden von den Polarebenen der Scheitelverbindungsgeraden, in Bezug auf beide Kegel, harmonisch getrennt. Die Axe dieses Systems harmonischer Ebenen ist die Symptosenaxe.

Der erste der bisher aufgestellten Sätze lässt folgende Umkehrung zu:

---

\*) Der Kegelschnitt  $K_1$  degenerirt dann in die Berührungserzeugende.

Gehen zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kegelschnitte  $K$  und  $K_1$  durch zwei in der Schnittlinie  $D$  der Ebenen gelegene — reelle, zusammenfassende \*) oder getrennte, oder imaginäre — Punkte hindurch, so können sie als Durchschnitt zweier Kegel aufgefasst werden, für welche dann jene Ebenen Symptosenebenen und deren Schnittlinie Symptosenaxe ist.

Die Scheitel  $s, s_1$  dieser Kegel liegen auf der Verbindungslinie der Pole  $\delta$  und  $\delta_1$  von  $D$  in Bezug auf  $K$  und  $K_1$  und werden von letzteren Punkten harmonisch getrennt. Um sie zu erhalten, lege man durch die Gerade  $\delta\delta_1$  eine Ebene, welche  $K$  in 1, 2 und  $K_1$  in I, II schneidet; 1, I und 2, II, ebenso 1, II und 2, I treffen sich auf jener Geraden und geben die Scheitel  $s$  und  $s_1$ .

Diese Bedingung, unter welcher zwei Kegelschnittslinien (in verschiedenen Ebenen) als Schnittergebnis zweier Kegel angesehen werden können, ist selbstverständlich dieselbe, unter welcher sie als Schnitte eines Kegels gelten können. Wird der eine von ihnen auf die Ebene des andern oder werden beide sammt der Schnittlinie  $D$  auf eine Ebene (central oder parallel) projicirt (oder der eine in die Ebene des andern um die Schnittlinie hineingedreht, was mit einer Parallelprojection identisch ist), wodurch man zwei neue Kegelschnitte ( $K$ ) und ( $K_1$ ) und eine Linie ( $D$ ) erhält, so muss letztere eine der Collineationsachsen sein, welche entspringen, wenn man ( $K$ ) und ( $K_1$ ) als collinear liegend betrachtet.

Als Beispiel nehmen wir den besonderen Fall, wo die beiden Kegelschnitte  $K$  und  $K_1$  Kreise sind (Fig. 2.). Die Schnittlinie  $D$  ihrer Ebenen muss dann für sie eine Linie gleicher Potenzen sein, oder die Kreise müssen sich als Schnitte einer Kugel betrachten lassen. Die Verhältnisse sind hier leicht zu überblicken. Wählt man die durch die Kreiscontra gehende zu  $D$  normale Ebene als Zeichenebene, so stellt sich  $D$  als Punkt dar, und 1, 2, I, II sind Durchmesser, die der Bedingung zufolge als Sehnen eines Kreises sich repräsentiren. Die Pole von  $D$  in Bezug auf  $K$  und  $K_1$  liegen gleichfalls in der Zeichenebene, somit wird diese auch die Kegelscheitel enthalten, welche sich durch entsprechende Verbindung der Punkte 1, 2, I, II sofort in  $s$  und  $s_1$  ergeben. Die Zeichenebene tritt hier als eine gemeinschaftliche Hauptebene beider Kegel auf; die Halbierungslinien der Winkel bei  $s$  und  $s_1$  geben ein Paar Kegelachsen  $sx$  und  $s_1x_1$ , welche übrigens bei der symmetrischen Lage der cyklischen Schnitte mit den Halbierungslinien  $h$  und  $h_1$  der bei  $D$  von  $K$  und  $K_1$  eingeschlossenen Winkel

\*) Der eine der beiden Kegel degenerirt dann in ein Ebenenpaar.

parallel und daher gegen einander senkrecht sind. Das zweite Axenpaar  $sy$  und  $s_1y_1$  liegt ebenfalls in der Zeichenebene, das dritte steht zu ihr senkrecht und projecirt sich nach  $s$  und  $s_1$ .

Schneiden sich demnach zwei Kegel zweiter Ordnung nach zwei Kreisen, so treffen sich zwei Axenpaare derselben unter rechtem Winkel, während das dritte parallel ist.

In Fig. 2. hat die Durchdringung der beiden Kegel zwei nach  $D$  sich projecirende reelle Doppelpunkte, welche mit der Geraden  $ss_1$  die gemeinschaftlichen Tangirungsebenen festlegen.

Die Fig. 3. bringt den Fall zur Darstellung, wo die beiden Kreise mit  $D$  imaginäre Punkte gemein haben. Im ersten Falle sind die zu  $sx$  und  $s_1x_1$  senkrechten Schnitte Ellipsen, im andern Falle ist einer davon eine Hyperbel.

Wenn es sich um die Lösung der Aufgabe handeln würde, einen Kreis auf eine Ebene zu projeciren derart, dass die Projection wieder ein Kreis vom gegebenen Durchmesser ist, so könnte zur Aufsuchung der Projectionscontra in folgender Weise vorgegangen werden.

Es sei  $K$ , Fig. 4., der gegebene Kreis, dessen Ebene auf der Zeichenfläche normal steht und von letzterer nach einem Durchmesser 12 geschnitten wird.  $E$  sei die Ebene, in welcher die Projection von  $K$  bestimmt werden und den Durchmesser  $d$  haben soll. Nach dem Vorausgegangenen wird sich die Lösung darauf reduciren, durch 12 einen Kreis zu legen, welcher in  $E$  eine Sehne von der Länge  $d$  ausschneidet. Construiert man zu diesem Zwecke an einen beliebigen, durch 12 geführten Kreis  $C$  eine Tangente  $Dt$  aus  $D$ , verzeichnet mit dieser und  $\frac{d}{2}$  als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck  $Dtm$ , so

gibt, wie man sich leicht überzeugt, die um  $\frac{d}{2}$  verminderte, resp. vermehrte Hypotenuse  $Dm$  die Abstände der Punkte I und II von  $D$ . Dies gilt, wenn  $D$  ausserhalb der Strecke 12 gelegen ist. — Im andern Falle, Fig. 5., wo  $D$  auf der Strecke 12 liegt, beschreibt man über 12 als Durchmesser einen Halbkreis  $C$ , macht die in  $D$  zu 12 bis an diesen errichtete Senkrechte  $Dt$  zur Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks  $Dtm$ , dessen Hypotenuse  $tm = \frac{d}{2}$  ist; die andere Ka-

thete  $Dm$  dieses Dreiecks, einmal zu  $\frac{d}{2}$  zu addirt, einmal hiervon abgezogen, gibt die Abstände der Punkte I, II von  $D$ . Schon aus dem Gange der Construction ersieht man, dass in diesem zweiten Falle

die Aufgabe nicht für jeden Wert von  $d$  eine Lösung zulässt; es muss nämlich, soll eine solche möglich sein,  $Dt < \frac{d}{2}$  ausfallen.

Da in beiden Fällen das Abtragen der Abstände der Punkte I und II in zweifacher Weise geschehen kann, da sich ferner für jedes Abtragen zwei Kegel, also zwei Projectionscentra ergeben, so lässt die vorliegende Aufgabe im Allgemeinen vier Lösungen zu.

In den Fig. 4. und 5. bedeuten  $K_1(I, II)$  und  $K_1'(I', II')$  jedesmal die beiden möglichen Projectionen von  $K(12)$ ,  $s$  und  $s_1$  die der ersten,  $s'$  und  $s_1'$  die der zweiten entsprechenden Kegelscheitel, resp. Projectionscentra. Wie bereits im Eingange gezeigt wurde, werden die beiden Symptosenebenen zweier Kegel durch die zu ihrer Scheitelverbindungsgeraden zugehörigen Polarebenen, d. i. durch die Ebenen  $Ds$  und  $Ds_1$  harmonisch getrennt. In unserer Darstellung wird also  $K$  und  $K_1$  durch  $Ds$  und  $Ds_1$ , dann  $K$  und  $K_1'$  durch  $Ds'$  und  $Ds_1'$  harmonisch geschieden, und da  $K_1$  mit  $K_1'$  (in der Zeichnung) dieselbe Gerade ist, so fallen die Strahlen  $Ds$  und  $Ds'$  einerseits, dann  $Ds_1$  und  $Ds_1'$  andererseits zusammen, die vier Projectionscentra liegen also auf zwei durch  $D$  gehenden Geraden, welche  $K$  und  $E$  harmonisch trennen.

Es ist leicht einzusehen, dass für den Fall, wo wie in Fig. 4. und 5. die beiden Kreise gleiche Grösse haben, einer der Kegelscheitel in's Unendliche rückt, eine der Kegelflächen in eine Cylinderfläche übergeht, bei unserer Aufgabe verwandeln sich dann zwei Centralprojectionen in Parallelprojectionen.

Wir kehren zu dem allgemeinen Fall Fig. 1. zurück.

Hält man den einen Kegelscheitel, z. B.  $s$ , fest, während man den andern  $s_1$  das ihn projecirende Perpendikel durchlaufen lässt, so dass  $s_1'$  constant bleibt, dann durchläuft  $\delta$  die unbegrenzte Gerade  $s's_1'$ , während sich die Symptosenaxe  $D$  um den Pol  $\sigma$  von  $s's_1'$  in Bezug auf  $K$  dreht. Dabei bilden die zugehörigen Lagen von  $\delta$  und  $\delta_1'$  ein hyperbolisches Punktsystem mit den Asymptotenpunkten  $s'$  und  $s_1'$ . In der Geraden  $s's_1'$  befindet sich aber auch das ihr in Bezug auf den Kegelschnitt  $K$  zukommende Punktsystem, welches hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ausfallen wird, jenachdem ein reelles oder imaginäres Schneiden oder eine Berührung von  $s's_1'$  mit  $K$  stattfindet. Es liegen demnach in  $s's_1'$  zwei Punktsysteme, und diese haben im Allgemeinen ein Paar conjugirte Punkte, die wir  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}_1'$  nennen wollen, gemeinschaftlich. Welche Bedeutung haben dieselben?

Fällt der Durchstosspunkt von  $ss_1$  nach  $\mathcal{A}'$ , so geht die Symptosenaxe  $D$  durch  $\mathcal{A}'_1$ , die zweite Symptosenebene  $DA_1$  steht auf der ersten senkrecht. Desgleichen, wenn  $\mathcal{A}'_1$  den Durchstosspunkt von  $ss_1$  mit der Ebene von  $K$  repräsentirt, geht  $D_1$  durch  $\mathcal{A}'$  und es stehen wieder die beiden Symptosenebenen auf einander normal.

Was nun die Punkte  $\mathcal{A}'$  und  $\mathcal{A}'_1$  anlangt, so treten dieselben immer auf, sobald das zweitgenannte Punktsystem in  $s's_1$  elliptisch ist, letztere Gerade  $K$  also nicht schneidet; sie treten dagegen nur bedingungsweise auf, wenn das zweite Punktsystem ebenfalls hyperbolisch ist,  $s's_1$  mit  $K$  reelle Schnittpunkte ( $K, K_1$ ) gibt; in diesem Falle dürfen nämlich die Asymptotenpunkte  $s's_1$  des einen Systems durch die des andern,  $K, K_1$ , nicht getrennt werden.

Fassen wir Alles zusammen:

Bei der beschriebenen Bewegung des Punktes  $s_1$  (also bei der entsprechenden Aenderung des Kegels  $s_1$ ) geschieht es, wenn  $K$  von  $s's_1$  nicht geschnitten wird, zweimal, dass die beiden Symptosenebenen zu einander normal stehen; in dem Falle, wo  $s's_1$  den Kegelschnitt  $K$  trifft, geschieht dieses nur dann, und ebenfalls zweimal, wenn  $s'$  und  $s_1$  gleichzeitig innerhalb oder gleichzeitig ausserhalb  $K$  liegen.

Was die Construction der Punkte  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}'_1$  betrifft, so wird man, wenn beide Systeme hyperbolisch sind, Fig. 6., über  $s's_1$  und  $KK_1$  als Durchmesser Kreise beschreiben, ihre Chordale bestimmen, den Schnittpunkt  $\omega$  derselben mit  $s's_1$  zum Centrum eines Orthogonalkreises  $O$  der erstgedachten Kreise machen, welcher die Punkte  $\mathcal{A}'$  und  $\mathcal{A}'_1$  ausschneidet. — Ist dagegen das zweite Punktsystem elliptisch, Fig. 7., so wird man über zwei Punktpaaren  $xg, yh$  desselben Kreise beschreiben, welche reelle Schnittpunkte  $\alpha, \beta$  liefern; durch einen derselben, z. B.  $\alpha$  und die Asymptotenpunkte  $s's_1$  legt man nun einen Kreis  $C$  und construirt zu diesem im Punkte  $\alpha$  jenen Orthogonalkreis  $O$ , der sein Centrum  $\omega$  in  $s's_1$  hat; dieser gibt wieder die gesuchten gemeinschaftlichen Punkte  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}'_1$  an \*).

In dem Zwischenfall, wo das Punktsystem in  $s's_1$  in Bezug auf  $K$  ein parabolisches ist, geschieht es auch zweimal, dass die zweite Kegelschnittsebene auf der ersten  $K$  senkrecht steht, und diese Lagen sind nach Fig. 8. leicht zu construiren; man braucht blos den zu  $(KK_1) \equiv \mathcal{A}_1 \equiv \sigma$ , dem Mittelpunkt der parabolischen Involution,

\*) Jac. Steiner's Vorl. über synth. Geom. II. Th. v. Dr. H. Schröter, pag. 58.

zugeordnet harmonischen Punkt  $\mathcal{A}'$  in Bezug auf  $s', s_1'$  zu bestimmen, Die eine dieser besonderen Ebenen,  $D_1\mathcal{A}$  nämlich, ist gemeinschaftliche Tangirungsebene beider Kegel, wenn  $\mathcal{A}_1'$  der Durchstosspunkt der Scheitelverbindungsline ist; die Kegel selbst berühren sich dann längs einer Erzeugenden, welche, doppelt gezählt, mit  $K$  die Durchdringung ausmacht.

Ein eigentümlicher Fall tritt ein, wenn die Punkte  $s', s_1'$  auf  $K$  selbst liegen; dann fallen die beiden in ihrer Verbindungslinie liegenden Punktsysteme zusammen, jedes Paar conjugirter Punkte ist ihnen gemeinschaftlich, daher stehen auch alle bei der beschriebenen Aenderung des Kegels  $s_1$  auftretenden Symptosenebenenpaare auf einander senkrecht; die zweiten Symptosenebenen bilden ein Ebenenbüschel, dessen Axe sich in den Pol  $\sigma$  von  $s's_1'$  projicirt.

## XXV.

Sur une représentation des points imaginaires  
en géométrie plane.

Par

**Paul Appell.**

Soit une conique  $C$  et une droite  $D$  coupant cette conique en deux points imaginaires  $M_1$  et  $M_2$ ; prenons sur la droite un point fixe  $O$  et désignons par  $\varrho$  la distance  $OM$  de ce point fixe à un point quelconque  $M$  de la droite. Les distances  $OM_1$ ,  $OM_2$  seront données par une équation du second degré en  $\varrho$  ayant ses racines imaginaires; soient

$$\varrho_1 = a + bi, \quad \varrho_2 = a - bi$$

ces deux racines. Pour figurer les deux points  $M_1$  et  $M_2$ , portons à partir de  $O$  sur la droite  $D$  une longueur  $OA = a$ ; puis prenons sur la perpendiculaire en  $A$  au plan de la figure de part et d'autre du point  $A$  des longueurs  $AM_1 = AM_2 = b$ : nous obtenons ainsi deux points  $M_1$  et  $M_2$  dont la position dans l'espace est indépendante du choix de l'origine  $O$  sur la droite  $D$  et qui peuvent par conséquent être considérés comme représentant les deux points imaginaires d'intersection de la droite et de la conique.

Ces deux points étant déterminés quand la conique et la droite sont connues possèdent des propriétés géométriques qui remplacent celles dont l'énoncé exige l'emploi des imaginaires. C'est ainsi que les points  $M_1$  et  $M_2$  sont des points d'où l'on voit sous un angle droit les couples de points situés sur la droite et conjugués par rapport à la conique.

Si la droite  $D$  se meut parallèlement à elle-même, le lieu des points  $M_1$  et  $M_2$  est une autre conique  $C'$  qu'on peut appeler conjuguée de la conique  $C$  relativement à la direction  $D$ .

Cette représentation des points imaginaires s'étend d'elle-même au cas des courbes algébriques d'ordre supérieur.

Remarque. Soit un point imaginaire ayant pour coordonnées par rapport à des axes rectangulaires

$$x = \alpha + \beta \sqrt{-1}$$

$$y = \gamma + \delta \sqrt{-1}$$

le point de l'espace représentant ce point aura pour coordonnées

$$x = \alpha, \quad y = \gamma, \quad z = +\sqrt{\beta^2 + \delta^2}$$

Strassbourg 16 Aout.



# XXVI.

## Ueber die Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren.

Von

Herrn **Leopold Klug**,  
Realschullehrer in Pressburg.

Es giebt im Allgemeinen acht Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren.

Bezeichnen wir die Flächen und die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte mit 1, 2, 3, 4 und nehmen diejenigen Seiten der Flächen, auf welchen das Tetraeder ruht, als positiv an, die andere aber negativ, so wird eine Kugel alle Flächen auf den positiven, vier Kugeln werden drei Flächen auf den positiven, eine auf der negativen, endlich werden drei Kugeln zwei Flächen auf den positiven, zwei auf den negativen Seiten berühren.

Bezeichnet man ferner den Radius der Kugel, welche alle Flächen auf den positiven Seiten berührt, mit  $r$ , die Radien, welche die resp. 1, 2, 3, 4 Fläche auf der negativen, die übrigen drei aber auf den positiven Seiten berühren, mit  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , die Flächeninhalte der Dreiecke mit  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , endlich das dreifache Volumen des Tetraeders mit  $V$ , so bestehen zwischen diesen Grössen folgende Relationen

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{r} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{V}; & 2) \frac{1}{r_1} = \frac{-f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{V}; \\ 3) \frac{1}{r_2} = \frac{f_1 - f_2 + f_3 + f_4}{V}; & 4) \frac{1}{r_3} = \frac{f_1 + f_2 - f_3 + f_4}{V}; \\ 5) \frac{1}{r_4} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 - f_4}{V} \end{array}$$

Die erwähnten drei Kugeln berühren eine gewisse Fläche (z. B. 1 Fläche) entweder auf der positiven oder negativen Seite, aber alle drei übrigen Flächen kann dieselbe Kugel weder auf den positiven, noch auf den negativen Seiten berühren.

Berühren die drei Kugeln die 1 Fläche auf der positiven Seite und man bezeichnet mit  $\varrho_i$  den Radius der Kugel, welche noch die  $i$  Fläche auf der positiven Seite berührt, so ist leicht ersichtlich, dass

$$6) \frac{1}{\varrho_2} = \frac{f_1 + f_2 - f_3 - f_4}{V}; \quad 7) \frac{1}{\varrho_3} = \frac{f_1 - f_2 + f_3 - f_4}{V};$$

$$8) \frac{1}{\varrho_4} = \frac{f_1 - f_2 - f_3 + f_4}{V};$$

berühren sie aber die 1 Fläche auf der negativen Seite und man bezeichnet mit  $\varrho'_i$  den Radius der Kugel, welche noch die 1 Fläche auf der negativen Seite berührt, dann ist

$$9) \frac{1}{\varrho'_2} = \frac{f_3 + f_4 - f_2 - f_1}{V}; \quad 10) \frac{1}{\varrho'_3} = \frac{f_2 + f_4 - f_3 - f_1}{V};$$

$$11) \frac{1}{\varrho'_4} = \frac{f_2 + f_3 - f_4 - f_1}{V}.$$

Die Lage der drei Kugeln wird von der Grösse der Flächen bestimmt.

Wenn wir voraussetzen, dass

$$a) f_1 > f_2 > f_3 > f_4$$

dann sind  $\frac{1}{\varrho_2}$  und  $\frac{1}{\varrho_3}$  positiv, aber  $\frac{1}{\varrho_4}$  nur dann positiv, wenn  $f_1 - f_2 > f_3 - f_4$  und  $\frac{1}{\varrho_2}$  negativ; die Kugeln müssen also in dem Falle die 1 Fläche auf der positiven Seite berühren.

$$b) f_2 > f_3 > f_4 > f_1$$

dann sind  $\frac{1}{\varrho'_3}$  und  $\frac{1}{\varrho'_4}$  positiv, aber  $\frac{1}{\varrho'_2}$  nur dann positiv, wenn  $f_2 - f_3 < f_4 - f_1$ , während  $\frac{1}{\varrho'_4}$  negativ; in dem Falle können nicht alle drei Wurzeln die 1 Fläche auf der positiven Seite berühren.

$$c) f_2 > f_1 > f_3 > f_4$$

dann sind  $\frac{1}{\varrho_2}$  positiv,  $\frac{1}{\varrho_4}$  und  $\frac{1}{\varrho'_2}$  negativ; alle drei Kugeln berühren

also die 1 Fläche weder auf der positiven noch auf der negativen Seite.

Aus diesem folgt:

1) Die drei Kugeln berühren entweder die kleinste oder grösste Fläche auf (dem Zeichen nach) derselben Seite.

2) Sie berühren die grösste Fläche (und zwar immer auf der positiven Seite) nur dann, wenn die Differenz der zwei grössten Flächen grösser ist als die Differenz der zwei kleineren.

3) Sie berühren die kleinste Fläche (und zwar immer auf der negativen Seite) nur dann, wenn die Differenz der zwei grössten Flächen kleiner ist als die Differenz der beiden übrigen.

Aus den Gleichungen von 6) bis 11) ergibt sich, dass

$$12) \left\{ \begin{array}{l} \text{wenn } f_1 = f_2 = f_3 = f_4, \text{ dann sind} \\ \quad q_2 = q_3 = q_4 = \infty, \\ \text{,, } f_1 + f_k = f_i + f_l, \text{ dann sind} \\ \quad q_k = \infty; q_i \geq q_l \text{ aber nicht unendlich gross;} \\ \text{,, } f_1 = f_k; f_i = f_l, \text{ dann sind} \\ \quad q_i = q_l = \infty; q_k \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ \text{,, } (f_1 > f_k) = f_i = f_l, \text{ dann sind} \\ \quad q_k = q_i = q_l \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \end{array} \right.$$

Die Mittelpunkte der Kugeln werden durch die gemeinsamen Punkte derjenigen Ebenen bestimmt, welche die Flächenwinkel halbiren.

Bezeichnet man mit  $J_{li}$  und  $A_{li}$  diejenigen Ebenen, welche den inneren resp. äusseren Winkel der Flächen  $l, i$  halbiren, die Mittelpunkte der Kugeln, deren Radien  $r, r_i, q_i$  sind, mit  $m, m_i, q_i$ , dann liegen

$$13) \left\{ \begin{array}{ll} m m_2 m_4 \mu_2 & \text{in der Ebene } J_{12}; \quad m_1 m_2 \mu_3 \mu_4 \text{ in der Ebene } A_{12}; \\ m m_4 m_2 \mu_3 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad J_{13}; \quad m_1 m_3 \mu_4 \mu_2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad A_{13}; \\ m m_2 m_3 \mu_4 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad J_{14}; \quad m_1 m_4 \mu_2 \mu_3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad A_{14}; \\ m m_1 m_4 \mu_4 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad J_{23}; \quad m_2 m_3 \mu_2 \mu_3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad A_{23}; \\ m m_1 m_3 \mu_3 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad J_{24}; \quad m_2 m_4 \mu_2 \mu_4 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad A_{24}; \\ m m_1 m_2 \mu_2 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad J_{34}; \quad m_3 m_4 \mu_3 \mu_4 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad A_{34}; \end{array} \right.$$

ferner gehen die Geraden

$$14) \left\{ \begin{array}{ll} m m_1, m_2 \mu_2, m_3 \mu_3, m_4 \mu_4 & \text{durch den Eckpunkt 1;} \\ m m_2, m_1 \mu_2, m_3 \mu_4, m_4 \mu_3 & \text{,, , 2;} \\ m m_3, m_1 \mu_3, m_2 \mu_4, m_4 \mu_2 & \text{,, , 3;} \\ m m_4, m_1 \mu_4, m_2 \mu_3, m_3 \mu_2 & \text{,, , 4.} \end{array} \right.$$

Nach dieser Zusammenstellung ist leicht ersichtlich, dass die Centralprojectionen der Mittelpunkte aus einem Eckpunkte als Centrum auf die gegenüberliegende Fläche ein Viereck bestimmen, dessen Diagonalepunkte die anderen drei Eckpunkte des Tetraeders sind.

Um die Lagen der Berührungspunkte der Kugeln auf den Flächen z. B. 1 Fläche zu bestimmen, bezeichnen wir mit  $p_1$  die orthogonale Projection des 1 Eckpunktes auf die 1 Fläche, die Centralprojectionen der Mittelpunkte aus dem 1 Eckpunkt mit  $m', m_1', \mu_2' \dots$  die Berührungspunkte der Kugeln auf der 1 Fläche mit  $a, a_1, a_2 \dots$

Aus der Reihe 14) folgt nach den Gesetzen der Perspective, dass die Punkte

$$15) p_1 a a_1 m'; p_1 a_2 m_2' a_2; p_1 a_3 m_3' a_3; p_1 a_4 m_4' a_4$$

sowie

$$16) \left\{ \begin{array}{l} 2 a_1 a_2; 3 a_1 a_3; 4 a_1 a_4; \\ 2 a_2 a_3; 3 a_2 a_4; 4 a_2 a_1; \\ 2 a_3 a_4; 3 a_3 a_1; 4 a_3 a_2; \\ 2 a_4 a_1; 3 a_4 a_2; 4 a_4 a_3 \end{array} \right.$$

in einer Geraden liegen.

Die acht Berührungspunkte, die drei Eckpunkte (2, 3, 4) und die orthogonale Projection ( $p_1$ ) des vierten Eckpunktes sind derart situirt auf 16 Geraden, dass durch jeden Punkt vier Gerade gehen, und auf jeder Geraden drei Punkte liegen \*).

Es ist leicht zu beweisen, dass auf den unter 15) angeführten Geraden die benannten Punkte von einander harmonisch getrennt sind.

Bilden wir zu dem Ende aus den Gleichungen 1) bis 11) folgende andere:

$$\frac{1}{r_k} + \frac{1}{q_k} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{2f_1}{V} = \frac{2f_1}{h_1 f_1} = \frac{2}{h_1}; \quad \frac{1}{r_k} - \frac{1}{q_k} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{2}{h_1}$$

und nehmen wir noch in Betracht die Proportion

\*) Darège, Curven 3ter Ordnung p. 214.

$$r_k : q_k : h_1 = a_k m_k' : \alpha_k m_k' : p_1 m_k'$$

welche sich aus den im Raume vorkommenden ähnlichen Dreiecken ergibt, so erhalten wir:

$$\frac{1}{r_k} + \frac{1}{q_k} = \frac{2}{h_1} = \frac{p_1 m_k'}{h_1} \left[ \frac{1}{a_k m_k'} + \frac{1}{\alpha_k m_k'} \right]$$

und davon ist:

$$\frac{2}{p_1 m_k'} = \frac{1}{a_k m_k'} + \frac{1}{\alpha_k m_k'}.$$

Die Gleichung beweist, dass die Punkte  $p_1, m_k'$  von  $a_k, \alpha_k$  harmonisch getrennt sind.

Pressburg, den 4. Juni.

## XXVII.

Éclaircissements sur une Note relative  
à la fonction  $\log 1/x$ .

Par

Monsieur **Genocchi**,  
Professeur à l'Université de Turin.

Deux Notes, que j'ai présentées en 1873 à l'Académie Royale de Belgique, ont été l'objet d'un compte rendu dans le *Litterarischer Bericht*, No. CCXXVII, pag. 22 et 25 (*Archiv*, tom. 57.). Comme en certains points ces Notes n'ont pas été comprises et interprétées suivant leur véritable sens, j'ai cru convenable de donner quelques explications, ainsi que le savant Rédacteur avait bien voulu m'y engager. Sur l'une d'elles, qui se rapportait à la Géométrie abstraite, je me suis déjà expliqué dans un travail étendu qui vient de paraître et qui est intitulé: *Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes* (Turin, 1877). Ainsi je me bornerai ici à l'autre Note, sur laquelle j'entrerai dans tous les détails et je donnerai tous les développements qui sont nécessaires pour comprendre ces explications sans recourir à d'autres écrits sur la question. Je répondrai en même temps à certaines observations publiées dans les années 1873-74 par MM. De Tilly, de Bruxelles, et Ph. Gilbert, de Louvain.

## I. Formule de Nicole.

On a l'identité

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+v_n} + \frac{b+v_n}{(a+v_n)(a-b)};$$

et remplaçant successivement  $v_n$  par  $v_0, v_1, v_2, \dots v_n$ , multipliant respectivement par les quantités

$$1, \frac{b+v_0}{a+v_0}, \frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)}, \text{ etc.}$$

et ajoutant les produits, on obtient, après des réductions faciles,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-b} &= \frac{1}{a+v_0} + \frac{b+v_0}{(a+v_0)(a+v_1)} + \frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)} + \dots \\ &+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\dots(b+v_{n-1})}{(a+v_0)(a+v_1)\dots(a+v_n)} + \frac{(b+v_0)(b+v_1)\dots(b+v_n)}{(a+v_0)(a+v_1)\dots(a+v_n)(a-b)}. \end{aligned}$$

C'est la formule donnée par Nicole dans les Mémoires de l'Académie de Paris pour 1727, sauf une légère différence. J'ai montré en 1867 (Nouvelles Annales de Mathématiques), qu'on peut en tirer une règle de convergence des séries assez remarquable. En effet, si l'on désigne par  $R_n$  le dernier terme de cette formule, par  $w_n$  l'avant-dernier, qui fournira les autres en mettant pour  $n$  les nombres 0, 1, 2, ..., on pourra écrire

$$\frac{1}{a-b} = w_0 + w_1 + w_2 + \dots w_n + R_n,$$

et on aura

$$\frac{1}{R_n} = (a-b) \left(1 + \frac{a-b}{b+v_0}\right) \left(1 + \frac{a-b}{b+v_1}\right) \dots \left(1 + \frac{a-b}{b+v_n}\right),$$

d'où

$$\frac{1}{R_n} > (a-b) \left(1 + \frac{a-b}{b+v_0} + \frac{a-b}{b+v_1} + \dots + \frac{1}{b+v_n}\right)$$

en supposant positives toutes les quantités  $a, b, a-b, v_0, v_1, \dots v_n$ .

Donc si la série dont le terme général est  $\frac{1}{b+v_n}$  sera divergente,

$\frac{1}{R_n}$  pourra croître indéfiniment avec  $n$ , et  $R_n$  sera indéfiniment décroissant, en manière que la série  $w_0 + w_1 + w_2 + \dots$  sera convergente et aura pour somme  $\frac{1}{a-b}$ . Ainsi nous aurons deux séries,

l'une divergente ayant pour terme général  $v'_n = \frac{1}{b+v_n}$ , l'autre convergente ayant pour terme général  $w_n$ , et le rapport de deux termes consécutifs dans ces séries sera

$$\frac{v'_{n+1}}{v'_n} = \frac{b+v_n}{b+v_{n+1}}, \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{b+v_n}{a+v_{n+1}}.$$

Soit  $u_n$  le terme général d'une autre série à termes positifs: d'après un principe connu, elle sera divergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v'_{n+1}}{v'_n}, \text{ c'est-à-dire } \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b+v_n}{b+v_{n+1}},$$

et convergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ c'est-à-dire } \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b+v_n}{a+v_{n+1}}.$$

cela pour  $n$  quelconque ou à partir d'une valeur donnée de  $n$ .

On voit qu'on peut d'une infinité de manières attribuer des valeurs convenables à  $v_n$ ,  $a$  et  $b$ .

La formule de Nicole peut se réduire à la suivante

$$(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n) = 1 + u_0 + (1+u_0)u_1 + (1+u_0)(1+u_1)u_2 + \dots \\ + (1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_{n-1})u_n,$$

équation presque évidente due à Euler. Dans un article postérieur (rédigé en septembre 1868), j'ai fondé sur la même formule une théorie élémentaire des produits infinis. Voyez *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1869.

## II. Formule de Lagrange et formule de Binet.

Faisons dans la formule de Nicole  $a = x$ ,  $b = -\alpha$ ; multiplions par  $d\alpha$  et intégrons de  $\alpha = 0$  à  $\alpha = 1$ . En posant

$$\alpha_i = \int_0^1 \frac{(v_0 - \alpha)(v_1 - \alpha)\dots(v_{i-1} - \alpha)}{1.2\dots i} d\alpha,$$

$$X_i = \frac{1.2\dots i}{(x+v_0)(x+v_1)\dots(x+v_i)},$$

et

$$X_0 = \frac{1}{x+v_0},$$

nous aurons

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots \\ + \alpha_n X_n + \int_0^1 \frac{(v_0 - \alpha)(v_1 - \alpha)\dots(v_n - \alpha) d\alpha}{(x+v_0)(x+v_1)\dots(x+v_n)(x+\alpha)}.$$

développement de  $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  avec un reste qu'on peut représenter



par  $\int_0^1 R_n \frac{d\alpha}{x+\alpha}$ . Pour juger de la convergence de ce développement,

nous supposons  $x > 0$ ,  $v_0$  nul ou positif,  $v_1, v_2, v_3, \dots$  tous positifs et non inférieurs à l'unité, et nommerons  $\omega$  la plus grande valeur numérique de  $\frac{v_0 - \alpha}{x + v_0}$  entre les limites  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$ . On aura, en valeur numérique,

$$R_n < \omega \frac{v_1}{x+v_1} \frac{v_2}{x+v_2} \dots \frac{v_n}{x+v_n},$$

ou

$$\frac{1}{R_n} > \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{x}{v_1}\right) \left(1 + \frac{x}{v_2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{v_n}\right).$$

et par suite

$$\frac{1}{R_n} > \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2} + \frac{x}{v_3} + \dots + \frac{x}{v_n}\right).$$

Donc, si la série  $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}, \dots$  est divergente,  $\frac{1}{R_n}$  augmentera indéfiniment avec  $n$ , et  $R_n$  décroîtra indéfiniment en valeur numérique; donc l'intégrale

$$\int_0^1 R_n \frac{d\alpha}{x+\alpha},$$

qui a une valeur inférieure à  $\frac{M}{x}$ , si  $M$  est la valeur maximum de  $R_n$ , ira aussi indéfiniment décroissant. Ainsi la série indiquée sera convergente. Elle a été donnée par Lagrange, sans l'expression du reste, dans le cas particulier de  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ , etc.

Soit maintenant la fonction

$$u = (x - \frac{1}{2}) \log x - x$$

sa différence pour  $\Delta x = 1$  sera

$$\Delta u = \log x + (x + \frac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1.$$

Mais pour  $\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$  on a l'expression précédente, et comme

$$(x + \frac{1}{2})X_0 = 1 + \frac{\frac{1}{2} - v_0}{x + \frac{1}{2}}, \quad (x + \frac{1}{2})X_i = iX_{i-1} - (v_i - \frac{1}{2})X_i,$$

il s'ensuivra

$$\Delta u = \log x + \frac{\frac{1}{2} - v_0}{x + v_0} + \alpha_1 X_0 + \beta_0 X_1 + \beta_1 X_2 + \dots + \beta_{n-2} X_{n-1} \\ - \alpha_n (v_n - \frac{1}{2}) X_n + (x + \frac{1}{2}) \int_0^1 R_n \frac{d\alpha}{x + \alpha},$$

où l'on a fait

$$\beta_0 = (\frac{1}{2} - v_1) \alpha_1 + 2\alpha_2, \quad \beta_1 = (\frac{1}{2} - v_2) \alpha_2 + 3\alpha_3, \dots$$

et en général

$$\beta_i = (\frac{1}{2} - v_{i+1}) \alpha_{i+1} + (i+2) \alpha_{i+2}.$$

Or  $\alpha_1 = v_0 - \frac{1}{2}$ , et

$$\int_0^1 R_n \frac{x + \frac{1}{2}}{x + \alpha} d\alpha - \alpha_n (v_n - \frac{1}{2}) X_n = \int_0^1 R_{n-1} \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{x + \alpha} d\alpha;$$

on a en même temps

$$\beta_i = \int_0^1 \frac{(v_0 - \alpha)(v_1 - \alpha) \dots (v_i - \alpha)(\frac{1}{2} - \alpha)}{1.2 \dots (i+1)} d\alpha.$$

Donc, avec ces conventions, il viendra

$$\Delta u = \log x + \beta_0 X_1 + \beta_1 X_2 + \dots + \beta_{n-2} X_{n-1} + \int_0^1 R_{n-1} \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{x + \alpha} d\alpha,$$

et le développement qui est ici compris sera convergent puisque  $R_{n-1}$  devenant infiniment petit pour  $n$  infini, il en est de même de l'intégrale qui forme le terme complémentaire. On suppose toujours que la série  $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}, \dots$  soit divergente, et  $x$  positif.

Intégrons enfin par rapport à  $x$  et suivant les règles du calcul des différences les deux membres de cette équation sous la condition ci-dessus indiquée de  $\Delta x = 1$ : une intégrale particulière du premier membre sera  $u$  et ne pourra différer d'une intégrale particulière du second que d'une quantité constante ou périodique laquelle sera désignée par  $C$ . Ainsi, en représentant par le signe  $\Sigma$  des intégrales particulières, remettant la valeur de  $u$ , faisant  $\Sigma X_i = Y_i$ , et transposant, on aura

$$\Sigma \log x = (x - \frac{1}{2}) \log x - x + C - \beta_0 Y_1 - \beta_1 Y_2 - \dots - \beta_{n-2} Y_{n-1} \\ - \Sigma \int_0^1 R_{n-1} \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{x + \alpha} d\alpha.$$

Dans le cas particulier de  $v_i = i$ , on peut prendre  $Y_i = -X_{i-1}$ , ce qui donne, en remplaçant  $n$  par  $n+1$ ,

$$\Sigma \log x = (x - \frac{1}{2}) \log x - x + C + \beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_{n-1} X_{n-1} \\ - \Sigma \int_0^1 R_n \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{x + \alpha} d\alpha.$$

Cette formule se trouve dans ma première Note de 1853 dont elle était l'objet principal, et ne suppose aucunement que  $x$  soit un nombre entier. Les arguments, par lesquels M. Ph. Gilbert, en novembre 1873, a voulu prouver le contraire, ne sont pas sérieux \*). La quantité  $C$  permet de déterminer comme on voudra les intégrales particulières désignées par  $\Sigma$ : j'insiste sur cette qualification, car je ne comprends pas comment M. De Tilly a pu, dans son Rapport, affirmer que d'après mon explication les  $\Sigma$  sont uniquement des intégrales générales \*\*).

Dans la formule de Binet on réduit  $\Sigma \log x$  à  $\log \Gamma x$ ,  $C$  à  $\frac{1}{2} \log 2\pi$ , et l'on prolonge indéfiniment et sans terme complémentaire la série

$$\beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots,$$

que j'appellerai série de Binet.

### III. Convergence de la série de Binet. Évanouissement pour $x$ infini.

La question de la convergence ne pouvait pas produire la moindre difficulté. Binet s'en était occupé d'une manière très profonde et très détaillée, et avait indiqué des moyens simples et directs pour démontrer la convergence: moyens auxquels j'aurai pu renvoyer sans autres explications. Ayant trouvé une expression du reste de la série, je n'ai fait qu'invoquer en deux mots un principe énoncé par Euler et Lacroix, pour déduire de cette expression la convergence. J'ai donné une démonstration plus développée dans ma dernière Note: M. Hoppe l'a jugée trop \*\*\*) prolix, mais celle qu'il propose me paraît beaucoup plus prolix car elle emploie une formule du Lehrbuch dont la démonstration est aussi un peu longue. J'ai fait usage de considérations plus simples dans ma Note pag. 8—9, et j'ai obtenu, au fond, le même résultat que cherchait M. Hoppe, savoir une limite supérieure de  $\sum_x R_{n+1}$  (suivant la notation que j'avais adoptée).

\*) Voyez les Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique pour 1853 et 1873.

\*\*) Ibid. 1873.

\*\*\*) Ce mot ne se trouve pas là; le vrai contenu de la remarque est omis ici: il s'y agit de ce que l'auteur ne fait nul usage de son expression du reste, qui en s'évanouissant montre la convergence de la série. (Réd.)

Je remarquerai encore que M. Hoppe semble avoir négligé \*) dans la fonction à intégrer les variations de facteur  $x + \alpha$  qui entre au dénominateur et qui devient  $x + 1 + \alpha$ ,  $x + 2 + \alpha$ , etc.; et qu'en finissant il se borne à une affirmation qui pour moi n'est pas très claire, car il dit seulement, que la convergence de la série  $U_n$  (série de Binet) s'ensuit de là sans difficulté.

Quoi qu'il en soit, voici une démonstration très simple à laquelle se réduit la démonstration de Binet lorsqu'on la débarrasse de tout ce qui n'est pas nécessaire pour établir la convergence.

On a ici

$$\beta_i = - \int_0^1 \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(i-\alpha)}{1.2\dots(i+1)} (\frac{1}{2} - \alpha) d\alpha$$

le produit  $\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(i-\alpha)$  est inférieur à  $1.2\dots i$ , et la valeur numérique de  $\frac{1}{2} - \alpha$  ne surpasse pas  $\frac{1}{2}$ ; donc celle de  $\beta_i$  sera inférieure à  $\frac{1}{2(i+1)}$ , et celle de  $\beta_i X_i$  sera inférieure à

$$\frac{1}{2(i+1)} \frac{1.2\dots i}{x(x+1)\dots(x+i)}, \text{ et par suite à } \frac{1}{2x} \frac{1.2\dots(i-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+i)}.$$

Mais  $\frac{1.2\dots(i-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+i)}$  est le terme général d'une série convergente à termes positifs dont la somme est  $\frac{1}{x}$ : on peut reconnaître cela par la formule de Nicole, puisque, en y faisant  $a = x+1$ ,  $b = 1$ ,  $v_i = i$ , on trouve

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1.2}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \text{etc.}$$

Donc la série ayant pour terme général  $\beta_i X_i$  sera aussi convergente et aura une somme inférieure à  $\frac{1}{2x^2}$

Il faudra partir du terme  $\beta_1 X_1$  pour faire la comparaison: ajoutant le terme  $\beta_0 X_0$  qui est égal à  $\frac{1}{12x}$ , on conclura que la série de Binet est convergente et a une somme inférieure en valeur absolue à  $\frac{1}{12x} + \frac{1}{2x^2}$

Cette limite est peu approchée, mais elle suffit pour montrer que la somme de la série de Binet doit s'évanouir si  $x$  devient infini.

\*) Ces variations diminuent seulement la quantité qui doit s'évanouir. (Réd.)

Cette propriété est d'ailleurs évidente dès qu'on admet la convergence, tous les termes de la série s'annulent avec  $\frac{1}{x}$ : la définition de la convergence et celle de la somme d'une série doivent lever tous les doutes. Le reste de la série devra aussi s'annuler avec  $\frac{1}{x}$ .

Il est encore visible que ce reste sera une valeur particulière de l'intégrale aux différences  $\sum \int_0^1 R_n \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{x + \alpha} d\alpha$ . En effet, comme je l'ai remarqué dans ma dernière Note, si une série de fonctions de  $x$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

est convergente, et a pour somme  $s$ , pour reste  $r_n$  après  $n$  termes, et si cela a lieu pour deux valeurs  $x$  et  $x + \Delta x$ , l'autre série

$$\Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \dots$$

sera aussi convergente, aura pour somme  $\Delta s$  et pour reste  $\Delta r_n$ . Ayant fait  $\Delta r_n = r'_n$ , on aura  $r_n = \sum r'_n$ , et ainsi le reste  $r_n$  de la première série sera une intégrale particulière du reste  $r'_n$  de la dernière. Or, dans notre cas, le reste de la série des différences est

bien  $\int_0^1 R_n \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{x + \alpha} d\alpha$ : donc le reste de la série de Binet sera une inté-

grale particulière de cette fonction, celle qui s'annule avec  $\frac{1}{x}$ .

Ces propriétés sont une conséquence bien facile de la convergence qui avait été démontrée par Binet.

M. De Tilly a publié en 1873 une Note pour éclaircir les points que je viens d'indiquer, dans le cas particulier de  $x$  entier, et M. Ph. Gilbert assure que son travail a rendu un service réel aux géomètres. On voit que toutes les questions se réduisent à la démonstration de la convergence et que cette démonstration était donnée depuis longtemps.

M. Ph. Gilbert a voulu faire l'histoire des recherches sur la fonction  $\log \Gamma(x)$ . Il a nommé un grand nombre d'ouvrages et de Mémoires, mais sans les avoir lus. On peut en juger par le passage suivant (Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique, janvier 1873, pag. 9):

„Binet ne s'était pas arrêté à démontrer la convergence de cette „série (la série dont nous venons de parler), mais Cauchy, dans le „mémoire déjà cité, donna de cette formule de Binet une démonstra-

„tion rigoureuse, d'une beauté analytique exceptionnelle, et qui en-  
„trainait en même temps la convergence de la série.“

Si M. Ph. Gilbert avait lu, je ne dis pas le *Mémoire* de Binet, mais au moins celui de Cauchy, il aurait su que cette démonstration rigoureuse, d'une beauté analytique exceptionnelle, était de Binet, car Cauchy le déclare lui-même très expressément. J'ai réfuté dans ma Note ces étranges assertions en citant des extraits des *Mémoires* de Binet et de Cauchy, et j'ai conclu en ces termes: „On voit donc que Binet, non-seulement n'a pas négligé la question „de convergence, mais l'a, au contraire, approfondie avec un grand „soin, et que, relativement à la convergence, Cauchy n'a fait que „réproduire une des démonstrations de Binet.“

J'ai cité dans la même Note une autre série de factorielles négatives étudiée longuement par Binet dans son grand *Mémoire*, qui néanmoins était restée inconnue au savant belge, tant inconnue, que l'ayant depuis retrouvée dans ses *Recherches sur le développement de la fonction  $\Gamma$*  (Bruxelles, 1873), il la crut nouvelle et lui appartenant et la déclare série analogue à celle de Binet et que l'on pourrait aussi obtenir par d'autres procédés (pag. 25). J'ai mentionné aussi une infinité de séries semblables à celle de Binet, que j'avais données en 1855. J'ai revendiqué à Binet un autre développement qu'on attribuait à Féaux et qu'on trouve dans les *Comptes rendus* de 1839. M. Ph. Gilbert pense rectifier sa première assertion en attribuant cette série à Cauchy (*Recherches etc.* pag. 14), mais le *Mémoire* de Cauchy est de 1843 (M. Gilbert se trompait en le faisant remonter à 1841). J'ai rétabli en outre les droits d'Euler, de Plana, de M. Weierstrass, qui me paraissaient oubliés. En finissant, M. Gilbert annonçait cet important résultat: „que l'on peut obtenir l'expression du reste de „la série de Binet sous la forme d'une intégrale définie triple“. J'ai répondu qu'en 1859 j'avais obtenu et publié l'expression de ce reste sous la forme d'une intégrale définie simple.

#### IV. Factorielle de Gauss. Détermination de la quantité $C$ .

Je définis avec Gauss la fonction  $\Gamma x$  comme la limite pour  $k = \infty$  de la factorielle

$$\Gamma(x, k) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \cdot k^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+k-1)},$$

qui donne

$$\Gamma(x+1, k) = \frac{k}{x+k} x \Gamma(x, k),$$

et à la limite

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma x,$$

d'où

$$\log \Gamma(x+1) - \log \Gamma x = \log x.$$

Ainsi  $\log \Gamma x$  est une valeur particulière de l'intégrale aux différences  $\Sigma \log x$ , et en le substituant dans une formule précédente nous aurons

$$\log \Gamma x = C + (x - \frac{1}{2}) \log x - x + \mu(x),$$

si  $\mu(x)$  représente la somme de la série de Binet

$$\beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \text{etc.}$$

qu'on a démontré être convergente. Prenant les différences des deux pour  $\Delta x = 1$ , on trouve

$$\mu(x) - \mu(x+1) = (x + \frac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1;$$

et remplaçant successivement  $x$  par  $x+1$ ,  $x+2$ , ...  $x+k-1$ , et ajoutant, on déduit

$$\mu(x) - \mu(x+k) = \sum_{m=0}^{m=k-1} \left[ (x+m+\frac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{1}{x+m}\right) - 1 \right].$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m=k-1} \left[ (x+\frac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{1}{x+m}\right) \right] &= (x+\frac{1}{2}) \log \left[ \frac{x+1}{x} \frac{x+2}{x+1} \dots \frac{x+k}{x+k-1} \right] \\ &= (x+\frac{1}{2}) \log \left( \frac{x+k}{x} \right); \end{aligned}$$

et en outre

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m=k-1} \left[ m \log \left(1 + \frac{1}{x+m}\right) \right] &= \log \left[ \frac{x+2}{x+1} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2 \left(\frac{x+4}{x+3}\right)^3 \dots \left(\frac{x+k}{x+k-1}\right)^{k-1} \right] \\ &= (k-1) \log(x+k) - \log[(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mu(x) - \mu(x+k) &= \\ (x+k-\frac{1}{2}) \log(x+k) - (x+\frac{1}{2}) \log x - \log[(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)] - k. \end{aligned}$$

D'un autre côté, l'expression de  $\Gamma(x, k)$  donne

$$\log \Gamma(x, k) = \log(1.2.3\dots k) + (x-1) \log k - \log[x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)].$$

Combinant ces deux équations et faisant pour abrégé

$$\varphi(k) = \log(1.2.3\dots k) - (k+\frac{1}{2}) \log k + k,$$

on obtient

$$-\mu(x) + \mu(x+k) + \log \Gamma(x, k) = (x-\frac{1}{2}) \log x - (x+k-\frac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{x}{k}\right) + \varphi(k),$$

dans laquelle il faut prendre les limites pour  $k = \infty$ . Mais comme

$$(x+k-\frac{1}{2})\log\left(1+\frac{x}{k}\right) = (x-\frac{1}{2})\log\left(1+\frac{x}{k}\right) + x - \frac{x^2}{2k} + \frac{x^3}{3k^2} - \dots,$$

$k$  étant supposé  $> x$ , et par suite  $(x+k-\frac{1}{2})\log\left(1+\frac{x}{k}\right)$  se réduit à  $x$  lorsque  $k$  devient infini. D'ailleurs on sait que la somme  $\mu(x)$  de la série de Binet s'évanouit pour  $x$  infini, en sorte que la limite de  $\mu(x+k)$  sera nulle. On conclura

$$\log \Gamma x - \mu(x) = (x - \frac{1}{2})\log x + x + \lim \varphi(k),$$

ce qui revient à  $C = \lim \varphi(k)$ . Il résulte donc que la quantité  $C$  est indépendante de  $x$  comme  $\varphi(k)$ , et qu'ainsi  $C$  n'est pas une fonction périodique mais une simple constante.

Cette démonstration est extraite presque textuellement des Bulletins de l'Acad. Roy. de Belgique, février 1854, pag. 85-88.

J'ai dit au même endroit que la valeur de  $C$  s'obtient aisément par la formule de Wallis. M. De Tilly affirme au contraire „qu'on „ne peut employer pour cela la formule de Wallis que dans le cas „particulier où  $x$  est entier“. \*) Mais cette formule donne

$$\frac{\pi}{2} = \lim \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k-2}{2k-3} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k-1} \right) \text{ pour } k = \infty,$$

ou

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim \left( \frac{2.4.5 \dots 2k}{1.3.5 \dots (2k-1)} \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) \text{ pour } k = \infty;$$

et comme

$$2.4.6 \dots 2k = 2^k.1.2.3 \dots k,$$

$$1.2.3 \dots 2k = 1.3.5 \dots (2k-1).2.4.6 \dots 2k,$$

on peut écrire aussi

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim \left[ \frac{(2^k.1.2.3 \dots k)^2}{1.2.3 \dots 2k} \frac{1}{\sqrt{2k}} \right];$$

il s'ensuit que  $\frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2}$  sera la limite de

$$2 \log(1.2.3 \dots k) - \log(1.2.3 \dots 2k) + 2k \log 2 - \frac{1}{2} \log(2k) = K.$$

---

\*) Bulletins etc. novembre 1873, pag. 460.



On trouve d'ailleurs

$$2\varphi(k) - \varphi(2k) = 2\log(1.2.3 \dots k) - \log(1.2.3 \dots 2k) - (2k+1)\log k + (2k+\frac{1}{2})\log(2k);$$

de là nous tirons

$$2\varphi(k) - \varphi(2k) = K + (2k+1)\log 2 + 2k\log 2 = K + \log 2,$$

et la limite de  $2\varphi(k) - \varphi(2k)$  sera ainsi

$$\lim K + \log 2 = \frac{1}{2}\log \frac{\pi}{2} + \log 2 = \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Or  $C = \lim \varphi(k)$ , et de même  $C = \lim \varphi(2k)$ : donc la limite de  $2\varphi(k) - \varphi(2k)$  est  $2C - C = C$ . On conclut la valeur cherchée  $C = \frac{1}{2}\log 2\pi$ , soit  $x$  entier ou non entier; ce qui complète la formule de Binet.

En faisant  $k = \infty$  dans l'équation

$$\mu(x) - \mu(x+k) = \sum_{m=0}^{m=k-1} \left[ (x+m+\frac{1}{2})\log \left( 1 + \frac{1}{x+m} \right) - 1 \right]$$

on a la formule de Gudermann

$$\mu(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ (x+m+\frac{1}{2})\log \left( 1 + \frac{1}{x+m} \right) - 1 \right],$$

qu'on peut, avec M. Ph. Gilbert, mettre sous la forme

$$\mu(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{x+m+\alpha} d\alpha,$$

puisque cette intégrale définie, relative à  $\alpha$ , a pour valeur

$$(x+m+\frac{1}{2})\log \left( 1 + \frac{1}{x+m} \right) - 1.$$

## V. Observation sur les valeurs infinies de la variable.

J'ai fait une observation fort simple dans ma dernière Note, qui ne m'a pas semblé manquer d'importance. M. Hoppe, l'ayant rapportée inexactement, l'a jugée inexacte.

L'étude de la série de Binet avait conduit à prendre pour  $x$  des valeurs infinies, et l'on avait trouvé que pour ces valeurs, quelle que fût leur forme, la somme de la série s'annulait. Plus généralement, j'avais considéré une série convergente  $\varphi(x) + \varphi(x+1) + \varphi(x+2) +$

ete., et en supposant  $\varphi(x) = 0$  pour toute valeur infinie de  $x$ , j'avais conclu que la somme de cette série serait une valeur particulière de l'intégrale  $\Sigma\varphi(x)$ , s'annulant pour  $x = \infty$ .

J'énonçais ensuite ce principe que je regardais comme presque évident. „Lorsqu'on a obtenu, en intégrant par  $\Sigma$ , une intégrale particulière  $f(x)$ , et qu'on détermine la quantité  $C$  de l'intégrale générale  $f(x) + C$  en faisant  $x = \infty$  et en supposant  $C$  constante; si l'on trouve pour  $C$  une quantité finie et déterminée, on pourra conclure qu'on n'aurait pas une autre valeur de  $C$  en la supposant variable (c'est-à-dire périodique).“ La démonstration était très simple: en désignant par  $c$  une valeur finie quelconque de  $x$ , je remarquais que la quantité  $C$  étant périodique doit prendre pour  $x = c+1$ ,  $x = c+2$ ,  $x = c+3$ , ... la même valeur qu'elle prend pour  $x = c$ , qu'ainsi elle prendra cette valeur pour  $x = c+m$ ,  $m$  étant un nombre entier aussi grand qu'on voudra, et par conséquent elle la prendra pour  $x$  infini. Il résultait de là, que dans ce cas l'arbitraire  $C$  se réduisait à une constante.

J'ajoutais cette explication: „On voit que la valeur infinie, pouvant revêtir une infinité de formes différentes  $c+m$  où  $c$  peut varier d'une manière continue, joue le rôle d'une infinité de valeurs, même continues, et peut ainsi suffire pour déterminer la fonction périodique arbitraire.“

Il est clair, que dans cette partie de ma Note j'ai toujours parlé de valeurs infinies d'une forme quelconque, et que si pour ces valeurs  $C$  prend une valeur unique, naturellement constante, je démontrerais que  $C$  doit recevoir la même valeur pour les valeurs finies de  $x$ . M. Hoppe me fait dire que si  $C$  résulte constant pour certaines valeurs infinies de  $x$ , il doit être constant en général pour  $x = \infty$ . \* (p. 384.)

Je finissais en disant: „Le principe je viens de démontrer sera utile en plusieurs cas, pour l'application du calcul des différences finies; il peut servir à confirmer la détermination de la constante dans la formule logarithmique de Binet; il explique le succès de la méthode suivie par M. Weierstrass dans la théorie des facultés analytiques et des factorielles, et peut fournir une base rigoureuse à la théorie des fonctions inexplicables d'Euler.“

Ainsi pour démontrer que  $C$  est constant dans la formule

$$\log \Gamma x = C + (x - \frac{1}{2}) \log x - x + \mu(x),$$

il aurait suffi de prouver que la quantité

$$\log \Gamma x - (x - \frac{1}{2}) \log x + x$$

a pour  $x = \infty$  une limite finie et déterminée. La démonstration, que j'ai donnée ci-dessus, et que j'ai extraite des Bulletins de 1854, est indépendante de ce principe.

J'indiquerai plutôt, comment le même principe sert à mettre hors de doute qu'une intégrale aux différences est parfaitement déterminée si elle est sujette à la condition de s'évanouir pour  $x$  infinie. Car, si une intégrale particulière  $f(x) = \Sigma \varphi(x)$  s'évanouit pour  $x = \infty$ , une autre intégrale sera  $f(x) + C$ , avec  $C$  quantité constante ou périodique, et pour que cette intégrale s'évanouisse aussi lorsque  $x = \infty$ , il faudra que cette valeur donne  $C = 0$ , et que par suite on ait toujours  $C = 0$ .

Cette réflexion montre qu'il n'y avait aucune indétermination dans l'expression du reste de la série de Binet sous la forme d'une intégrale aux différences, puisque, les termes et la somme de la série s'annulant pour  $x = \infty$ , le reste devait s'annuler pour la même valeur. Une telle prétendue indétermination a été le premier et principal reproche qu'on m'a fait, et on l'a relevée tantôt comme une erreur, tantôt comme une lacune.

## VI. Généralisation de la série de Binet.

En laissant aux quantités  $\beta_i$ ,  $X_i$ ,  $Y_i$  leur signification plus générale, on a la formule dont celle de Binet est un cas particulier

$$\Sigma \log x = (x - \frac{1}{2}) \log x - x + C - \beta_0 Y_1 - \beta_1 Y_2 - \dots - \beta_{n-2} Y_{n-1} \\ - \Sigma \int_0^1 R_{n-1} \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{x - \alpha} d\alpha.$$

Mais on a aussi

$$\log \Gamma x = \frac{1}{2} \log 2\pi + (x - \frac{1}{2}) \log x - x + \mu(x):$$

en posant donc  $\Sigma \log x = \log \Gamma x$ ,  $C = \frac{1}{2} \log 2\pi$ , il viendra

$$\mu(x) = -\beta_0 Y_1 - \beta_1 Y_2 - \dots - \beta_{n-2} Y_{n-1} - \Sigma \int_0^1 R_{n-1} \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{x - \alpha} d\alpha,$$

qui donne une transformation de la série de Binet.

Prenant les différences et changeant  $n$  en  $n+1$ , on obtient

$$\mu(x) - \mu(x+1) = \beta_0 X_1 + \beta_1 X_2 + \dots + \beta_{n-1} X_n + \int_0^1 R_n \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{x - \alpha} d\alpha.$$

Remplaçons  $x$  successivement par  $x+1, x+2, \dots, x+m$ , et ajoutons: le premier membre deviendra  $\mu(x) - \mu(x+m+1)$ , et se réduira à  $\mu(x)$  si  $m$  est supposé infini, alors, en indiquant les sommes dans le second membre, on aura

$$\mu(x) = \beta_0 \sum_x X_1 + \beta_1 \sum_x X_2 + \dots + \beta_{n-1} \sum_x X_n + \sum_x \int_0^1 R_n \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{x - \alpha} d\alpha.$$

Ici la notation  $\sum_x \varphi(x)$  désigne la somme

$$\varphi(x) + \varphi(x+1) + \varphi(x+2) + \text{etc.},$$

et il faut s'assurer que cette série sera convergente. Or cela est facile à démontrer pour les sommes  $\sum_x X_i$ , en supposant, comme ci-dessus,  $x$  positif,  $v_0$  nul ou positif,  $v_1, v_2, v_3, \dots$  tous positifs et non inférieurs à l'unité. En effet,  $X_i$  sera toujours positif, on aura

$$\sum_x X_i = X_i + \sum_{x+1} X_i$$

et  $\sum_{x+1} X_i < \sum_1 X_i$ ; de plus,  $X_1$  étant  $= \frac{1}{(x+v_0)(x+v_1)}$  sera  $< \frac{1}{x(x+1)}$ ,

et comme on sait que  $\sum_1 \frac{1}{x(x+1)} = 1$ , il s'ensuivra que la série

$\sum_1 X_1$  est convergente; mais  $X_i$  ne peut surpasser  $\frac{1.2 \dots i}{(x+1)^{i-1}} X_1$ : donc

$\sum_1 X_i$  ne pourra surpasser  $\frac{1.2 \dots i}{(x+1)^{i-1}} \sum_1 X_1$  et formera aussi une série

convergente. Les séries  $\sum_x X_i$  seront donc également convergentes.

Quant au terme complémentaire  $\sum_x \int R_n \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{x - \alpha} d\alpha$ , on a trouvé

$$\frac{1}{R_n} > \frac{1}{\omega} \left( 1 + \frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2} + \dots + \frac{x}{v_n} \right)$$

et l'on peut prendre  $\omega = \frac{1}{x}$ ; d'où  $\frac{1}{R_n} > x(1+s_n)$ ,  $R_n < \frac{1}{x(1+s_n)}$ ,

en posant  $s_n = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$ . Nous partagerons l'intégrale en

deux parties, l'une de  $\alpha = 0$  à  $\alpha = \frac{1}{2}$ , l'autre de  $\alpha = \frac{1}{2}$  à  $\alpha = 1$ : la valeur numérique du terme complémentaire sera moindre que la somme des valeurs numériques des deux parties, c'est-à-dire que

$$\sum_x \int_0^{\frac{1}{2}} R_n \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{x + \alpha} d\alpha + \sum_x \int_{\frac{1}{2}}^1 R_n \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{x + \alpha} d\alpha.$$

Mais

$$\frac{1}{x + \alpha} < \frac{1}{x}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} (\tfrac{1}{2} - \alpha) d\alpha = \tfrac{1}{8}, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 (\alpha - \tfrac{1}{2}) d\alpha = \tfrac{1}{8};$$

donc cette somme sera inférieure à

$$\tfrac{1}{8} \sum_x \left( \frac{1}{x} \int_0^{\frac{1}{2}} R_n d\alpha + \frac{1}{x} \int_{\frac{1}{2}}^1 R_n d\alpha \right) < \tfrac{1}{8} \sum_x \frac{1}{x^2(1 + xs_n)}$$

inférieure aussi à

$$\tfrac{1}{8} \frac{1}{1 + xs_n} \sum_x \frac{1}{x^2} < \tfrac{1}{8} \frac{1}{1 + xs_n} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{6} \right),$$

puisque

$$\sum_x \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{x+1} \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^2} + \sum_1 \frac{1}{x^2}, \quad \text{et} \quad \sum_1 \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On voit donc que si la série  $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_3}, \frac{1}{v_5}, \dots$  est divergente, comme  $s_n$  pourra dépasser toute limite, le terme complémentaire dont il s'agit ira en décroissant au delà de toute limite, et la série très-générale exprimant  $\mu(x)$  sera convergente.

Cette série est d'une forme plus générale que toutes celles auxquelles est parvenu M. Ph. Gilbert dans le §. IV de son Mémoire (pag. 18—26). En faisant  $v_0 = a$ ,  $v_1 = a + 1$ ,  $v_2 = a + 2$ , etc., et remarquant que dans ce cas

$$\sum_x X_i = \frac{1.2.3 \dots (i-1)}{(a+x)(a+x+1) \dots (a+x+i-1)} = X_{i-1},$$

on aura les séries semblables à celles de Binet que j'avais données en 1855 et 1859: les deux séries de Binet répondent aux valeurs  $a = 0$  et  $a = 1$ .

On obtient les séries de M. Gilbert en prenant  $v_0 = \beta$ ,  $v_1 = \beta + p$ ,  $v_2 = \beta + 2p$ , ... et généralement  $v_i = \beta + ip$ , et supposant  $p$  un nombre entier et positif: alors les sommes  $\sum_x X_i$  se réduisent à un nombre fini de termes, car on a

$$X_i = \frac{1}{p} \frac{1 \cdot 2 \dots (i-1)}{(x+\beta)(x+\beta+p) \dots (x+\beta+i-1p)} \\ - \frac{1}{p} \frac{1 \cdot 2 \dots (i-1)}{(x+\beta+p)(x+\beta+2p) \dots (x+\beta+ip)},$$

et les valeurs que prend le premier terme lorsqu'on remplace  $x$  par  $x+p$ ,  $x+p+1$ , etc. sont détruites par celles du second; d'où il résulte

$$\sum_x X_i = \frac{1}{p} \sum_x^{x+p-1} X_{i-1}.$$

Mais ces séries dans les quelles chaque terme se compose par la somme de  $p$  termes et qui ne procèdent pas suivant des factorielles négatives ne paraissent pas devoir être regardés comme semblables à celles de Binet. M. Ph. Gilbert lui-même a qualifié analogue à la série de Binet celle de la formule (6), pag. 25. (la seconde série de Binet), mais non toutes les séries comprises dans sa formule (5).

J'ai adressé une réclamation de priorité à l'Académie royale de Belgique pour les séries semblables à celle de Binet données dans le §. IV du Mémoire de M. Gilbert, et cette réclamation fut insérée dans les Bulletins (mars 1874. pag. 351—352) sur le rapport de M. Ernest Quetelet. M. De Tilly, qui d'abord avait été nommé commissaire, demande d'être remplacé, parceque (je pense) je m'étais plaint qu'on me donnât pour juges mes adversaires (Voyez ib. p. 270); mais il fit néanmoins son rapport, en raison de la circonstance d'avoir été l'un des commissaires pour le Mémoire de M. Gilbert (Bulletins, juillet 1874. pag. 67—70). En ajoutant pour les séries du dit §. IV que je revendiquais le mot toutes et ne tenant pas compte de la qualification de semblables, il jugea que ma réclamation n'était fondée qu'en partie, et que la formule (5) déjà mentionnée devait lui échapper \*).

Quoi qu'il en soit d'une question de mots, j'observe qu'on reconnaît mes droits de priorité pour une généralisation plus ou moins importante de la série de Binet, et qu'ainsi M. De Tilly n'a pas mis entièrement à couvert sa responsabilité de commissaire pour le Mémoire de M. Gilbert. Sa responsabilité dans cette qualité serait engagée au même titre pour n'avoir pas constaté que l'une des séries que M. Gilbert s'attribuait était de Binet lui-même, et que dans la démonstration de la formule de Gudermann et dans l'expression du reste de la série de Binet j'avais la priorité sur M. Gilbert, comme celui-ci l'a déclaré (Bulletins, novembre 1873. pag. 545).

---

\*) M. De Tilly dit l'une au moins des séries, mais il n'y en a qu'une absolument.

La formule de Binet a été généralisée à un autre point de vue, dont M. De Tilly ne s'est pas occupé du tout, mais que j'ai rappelé dans ma dernière Note en citant la formule symbolique

$$\int u dx = \Sigma u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{(1+\Delta)^n \log(1+\Delta)} \left[ \frac{1}{\log(1+\Delta)} - \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{2} \right] v_n,$$

dans laquelle  $u$  désigne une fonction de  $x$ , et  $v_n$  ce que devient  $v = \frac{du}{dx}$  lorsqu'on change  $x$  en  $x+n$ . Dans le développement, les puissances de  $\Delta$  représenteront des différences pour  $\Delta x = 1$ . On obtient la série de Binet et les séries semblables en prenant  $u = \log x$ . Je renvoie aux Annales de Tortolini, 1855, pag. 71—74.

Voici une autre généralisation. Dans la formule de Nicole, telle que nous l'avons donnée, faisons comme ci-dessus  $a = x$ ,  $b = -\alpha$ , et puis multiplions les deux membres par  $\varphi(\alpha)d\alpha$ , et intégrons entre les limites  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$ , en désignant par  $\varphi(\alpha)$  une fonction de la variable  $\alpha$  qui conserve entre ces limites une valeur finie et ne change de signe qu'un nombre fini de fois, et telle de plus que

l'intégrale  $\int_0^1 \varphi(\alpha)d\alpha$  se réduise à zéro. Si l'on fait

$$X_i = \frac{1.2 \dots i}{(x+v_0)(x+v_1) \dots (x+v_i)},$$

$$\beta_i = \int_0^1 \frac{(v_0-\alpha)(v_1-\alpha) \dots (v_i-\alpha)}{1.2 \dots (i+1)} \varphi(\alpha) d\alpha,$$

$$R_n = \frac{(v_0-\alpha)(v_1-\alpha) \dots (v_n-\alpha)}{(x+v_0)(x+v_1) \dots (x+v_n)},$$

on aura

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha} = \beta_0 X_1 + \beta_1 X_2 + \dots + \beta_{n-1} X_n + \int R_n \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha}.$$

Qu' on remplace  $x$  successivement par  $x+1$ ,  $x+2$ ,  $x+3$ , etc. à l'infini, et qu' on ajoute tous les résultats: il viendra

$$\sum_x \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha} = \beta_0 \sum_x X_1 + \beta_1 \sum_x X_2 + \dots + \beta_{n-1} \sum_x X_n + \sum_x \int R_n \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha}.$$

Nous supposons toujours que  $x$  soit positif, que  $v_0$  soit nul ou positif, que tous les nombres  $v_1, v_2, v_3, \dots$  soient positifs et non in-

féricurs à l'unité, et que la série  $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}, \dots$  soit divergente. Alors on prouvera comme nous l'avons expliqué, que toutes les sommes  $\sum X_i$  ont des valeurs finies; et à l'égard du terme complémentaire  $\int_0^1 R_n \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha}$ , on pourra décomposer l'intervalle  $\alpha = 0, \alpha = 1$  en plusieurs parties dans chacune desquelles la fonction  $\varphi(\alpha)$  conserve le même signe, et en nommant  $M$  la plus grande valeur numérique que la fonction  $\varphi(\alpha)$  puisse acquérir dans tout l'intervalle, on trouvera sans peine que la valeur numérique du terme complémentaire sera inférieure à

$$\frac{v_0 v_1 \dots v_n}{(x+v_0)(x+v_1) \dots (x+v_n)} \frac{M}{x}$$

et par conséquent sera infiniment petite pour  $n$  infini,  $M$  étant une valeur finie.

Ainsi la fonction  $\sum_x \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha}$  sera exprimée par une série con-

vergente, avec les coefficients  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ . Cette fonction devient la même  $\mu(x)$  qui est représentée par la série de Binet, si l'on prend  $\varphi(\alpha) = \frac{1}{2} - \alpha$ .

En terminant ici ma polémique avec M. De Tilly, je dois rendre justice à la forme extrêmement courtoise de ses Notes et Rapports.

---

\* (p. 378.) M. Genocchi m'accuse d'une substitution. Ma remarque se rapportait à ses mots (v. p. 378. l. 7.) „en faisant  $x = \infty$ “. On peut faire  $x = \infty$  en le faisant parcourir une série de valeurs. Donc le principe d'après l'énoncé ne suppose pas varier  $x$  continuellement. Si M. Genocchi dit maintenant qu'il a toujours parlé de valeurs infinies d'une forme quelconque, cet usage ne peut pas être porté dans un principe général et indépendant. J'ai dit que, la critique ayant révoqué en doute la justesse de déduction, il y avait assez de raison d'aviser le lecteur.

Hoppe.



## XXVIII.

## Ueber die Krümmungskreise der Parabel.

Neue Grundlage für die Theorie derselben und entsprechende Ausführungen.

Von

Herrn Prof. Dr. **Mack**

zu Ludwigsburg.

Wenn man den Winkel zwischen zwei Normalen einer Parabel mit demjenigen zwischen den Brennstrahlen der zugehörigen Peripheriepunkte vergleicht, so ergibt sich ein Lehrsatz, welcher — in seiner Einfachheit — schon an und für sich bemerkenswert erscheint. Derselbe macht es möglich, die Lage des Krümmungsmittelpunkts für jede Stelle der Curve auf eine viel leichtere Weise zu ermitteln, als bisher geschehen sein dürfte. Daran knüpft sich ganz von selbst eine völlig elementare Darlegung aller Hauptsätze über die Krümmungsverhältnisse der Parabel, zu welchen einige vielleicht neue und nicht unerhebliche Nebensätze (Vgl. namentlich § 4, III und § 5, I) hinzutreten. Man braucht hiebei nichts Weiteres vorauszusetzen als diejenigen allbekannten Theoreme, welche überall schon bei einem ersten Studium der Lehre von den Kegelschnitten sich darbieten. — Das hiemit Angedeutete soll hier des genaueren ausgeführt, und mögen entsprechende Bemerkungen für die übrigen Kegelschnitte hinzugefügt werden.

## § 1.

Entwicklung des Fundamentalsatzes über den Winkel zwischen zwei Normalen einer Parabel. (Fig. 1.).

Auf einer gegebenen Parabel mit Scheitel  $S$  und Brennpunkt  $F$  sei irgend ein von  $S$  verschiedener Peripheriepunkt  $P$  genommen. Die

zu  $P$  gehörige Tangente gibt mit der Axe den Durchschnitt  $T$ . Das Dreieck  $PFT$  hat bei  $P$  und  $T$  gleiche Winkel. — Heisst  $FU$  die über  $F$  hinausgehende Verlängerung von  $SF$ , so zeigt sich

$$1) \quad \text{Wkl. } UFP = 2 \text{ FTP}$$

Wird ein zweiter Peripheriepunkt  $P_1$  in Betracht gezogen, welcher mit  $P$  auf derselben Seite der Axe liegt, ist ferner  $T_1$  der Durchschnitt der Axe mit der zu  $P_1$  gehörigen Tangente, so hat man aus gleichen Gründen wie vorhin

$$2) \quad \text{Wkl. } UFP_1 = 2 \text{ FT}_1P_1.$$

Setzt man ferner fest, dass  $P_1$  weiter als  $P$  von  $F$  entfernt sei, wornach  $\text{Wkl. } UFP > UFP_1$  ist, so erhält man durch Verbindung der Angaben 1) und 2)

$$3) \quad \text{Wkl. } UFP - UFP_1 = 2(\text{FTP} - \text{FT}_1P_1).$$

Die hier links stehende Differenz ist dargestellt durch den hohlen Winkel  $P_1FP$ ; was die rechts stehende betrifft, so erkennt man sie gleich dem spitzigen Winkel, welchen die zu  $P$  und  $P_1$  gehörigen Tangenten mit einander machen.

Hiernach ist vermöge der Gleichung 3) zunächst zu sagen: der spitzige Winkel zwischen den Tangenten der Punkte  $P$ ,  $P_1$  ist halb so gross als der hohle Winkel zwischen den Brennstrahlen  $FP$ ,  $FP_1$ . Da aber dem spitzigen Winkel zwischen zwei Tangenten gewiss gleich ist der spitzige Winkel zwischen den zugehörigen Normalen, so sagen wir vielmehr:

Wenn zwei Peripheriepunkte einer Parabel auf einerlei Seite von ihrer Axe sich befinden: so ist der spitzige Winkel zwischen den zugehörigen Normalen halb so gross als der hohle Winkel zwischen den zugehörigen Brennstrahlen.

Der Satz ist auch dann festzuhalten (und dann besonders leicht zu beweisen), wenn der eine der genannten Punkte in die Axe selbst fällt (in die Lage des Scheitels kommt).

Anmerkung. Für den Fall, dass  $P$ ,  $P_1$  auf verschiedenen Seiten der Axe sind, ist ein dem obigen entsprechender Satz leicht zu finden. Auch könnte man immerhin beide Sätze unter einer gemeinschaftlichen Fassung vereinigen; die übrigens bei vollkommener Genauigkeit schwerfällig werden möchte. — Ueber den Winkel zwischen zwei Tangenten ist der entsprechende Satz zu finden in „Steiner, Theorie der Kegelschnitte“, bearbeitet von Geiser, 2te Aufl., Seite 111.

## § 2.

Entwicklung des Hauptsatzes über den zu einer Stelle der Parabel gehörigen Krümmungskreis. Dazu genauere Bestimmungen. (Fig. 2.).

Während die Peripheriepunkte  $P$ ,  $P_1$  der Parabel auf Einer Seite von der Axe gedacht sind, sei mit  $N_1$  der Durchschnitt ihrer Normalen bezeichnet; man hat also (nach § 1.)

$$\text{Wkl. } P_1FP = 2 P_1N_1P,$$

wo wieder  $F$  den Brennpunkt bezeichnet. Nun werde an die  $P_1N_1$ , auf derjenigen Seite von ihr wo  $P$  sich befindet, die Gerade  $P_1Q$  so angelegt, dass sie — den Durchschnitt  $Q$  mit der  $PN_1$  gebend — den

$$\text{Wkl. } QP_1N_1 = QN_1P_1$$

darbietet. Das hierdurch entstandene Dreieck  $P_1N_1Q$  hat dann

$$QN_1 = QP_1,$$

und sein Aussenwinkel  $PQP_1$  ist doppelt so gross als der innere bei  $N_1$ , oder es ist

$$\text{Wkl. } PQP_1 = 2 PN_1P_1.$$

Nach dem vorhin Bemerkten heisst dies aber auch:

$$\text{Wkl. } P_1QP = P_1FP;$$

es liegen also die vier Punkte  $P$ ,  $P_1$ ,  $Q$ ,  $F$  auf Einem Punkte.

Denken wir jetzt auf der gegebenen Parabel zwar den Punkt in fester Lage, dagegen  $P_1$  gegen  $P$  hin auf der Curve sich bewegend. Mit  $P$  bleibt fest der Punkt  $F$  und der jetzt auch einzuführende, auf die Normale von  $P$  fallende Krümmungsmittelpunkt  $N$ ; dagegen bewegt sich auf der festen Geraden  $PN$  sowohl der Punkt  $N_1$  als der Punkt  $Q$ , während übrigens immer

$$QP_1 = QN_1$$

bleibt. Wenn  $P_1$  eben in die Lage  $P$  übergeht, so geht  $N_1$  über in  $N$ , und  $Q$  geht über in den (festen) Halbierungspunkt  $M$  der (festen) Strecke  $PN$ . Da aber der vorhin gedachte Kreis  $PP_1QF$  offenbar mit übergeht in denjenigen festen Kreis, der durch den Brennpunkt  $F$  gehend, die Parabel (oder die Tangente  $PT$  derselben) in  $P$  berührt, so ist die von  $Q$  zuletzt zu erreichende Lage  $M$  auch zu bestimmen als Durchschnitt dieses festen Kreises mit der Normale des Punktes  $P$ . Wenn also  $N$  nicht zum voraus bekannt ist, so lässt sich  $M$  vor  $N$  finden als Durchschnitt eines bekannten Kreises ( $F$ ,  $P$ ,  $P$ )

mit einer bekannten Geraden (Normale von  $P$ ); und dann ist  $N$  zu erhalten, indem die Strecke  $PM$  über  $M$  hinaus um das ihr gleiche Stück  $MN$  verlängert wird.

Die vorstehende Betrachtung gilt für jeden Peripheriepunkt der Parabel, auch für den Scheitel; es ist daher ganz allgemein der Satz auszusprechen:

I) Der Krümmungskreis zu einem Punkte  $P$  einer Parabel wird erhalten mittels eines Hilfskreises, der durch den Brennpunkt  $F$  der Curve so geführt wird, dass er die zu  $P$  gehörige Tangente derselben in  $P$  berührt. Wird der in die Normale von  $P$  fallende Durchmesser  $PM$  des Hilfskreises über  $M$  hinaus um das ihm selbst gleiche Stück verlängert, so hat man in dem Punkte  $N$  den zu  $P$  gehörigen Krümmungsmittelpunkt der Parabel; und der zugehörige Krümmungshalbmesser ( $PM$ ) zeigt sich sofort doppelt so gross als der Durchmesser des Hilfskreises.

Für den in obiger Betrachtung vorkommenden Punkt  $M$  ist es wesentlich, seine Lage auf der Normale des Punkts  $P$  ins Auge zu fassen — eben weil von ihr die Lage des  $N$  abhängt.

Heisst  $A$  der Durchschnitt jener Normale mit der Axe, so ist zunächst klar, dass gar wol  $M$  mit  $A$  zusammenfallen kann; es muss dies offenbar geschehen, wenn  $P$  auf der Curve so liegt, dass Winkel  $PFS = 90^\circ$ . Ist freilich  $PFS > 90^\circ$ , so muss  $M$  auf die über  $A$  hinaus gehende Verlängerung von  $PA$  fallen. Ist aber  $W. PFS < 90^\circ$ , so fällt  $M$  zwischen  $P$  und  $A$ . In den zwei ersteren Fällen ist es selbstverständlich, dass  $N$  auf die über  $A$  hinaus gehende Verlängerung der  $PA$  falle, weil immer

$$PN = 2PM.$$

Was aber den dritten Fall (Winkel  $PFS < 90^\circ$ ) betrifft, so fällt nun zwar  $FM$  innerhalb des nun stumpfen Winkels  $PFA$ ; weil jedoch immer Winkel  $PFM = 90^\circ$ , so hat man die entsprechende Lage von  $FM$  genauer zwischen  $FA$  und der Halbierungslinie des Winkels  $PFA$ . Hieraus ist leicht zu entnehmen, dass nun die Strecke  $PM$  zwar  $< PA$  aber  $> \frac{1}{2}PA$  ausfällt. Folglich ist auch dann

$$2PM > PA, \text{ d. h. } PN > PA;$$

es fällt also unter allen Umständen der Punkt  $N$  auf die andere Seite von der Parabelaxe als auf welcher der zugehörige  $P$  sich befindet.

Wenn  $P$  vom Scheitel  $S$  mehr und mehr sich entfernt, so ist für das Dreieck  $PFM$  (rechtwinklig bei  $F$ ) nicht bloß das fortwährende Wachsen der Kathete  $FP$  zu bemerken, sondern auch das Wachsen des spitzigen Winkels bei  $P$ . Dieser Winkel erscheint nämlich unmittelbar als Complement des spitzigen Winkels, welchen der Brennstrahl  $FP$  mit der Tangente  $PT$  des Punkts  $P$  macht. Da aber der letztere Winkel bekanntlich ebenso gross ist als die Abweichung dieser Tangente von der Axe, und da diese Abweichung (zwischen 0 und  $90^\circ$  zu denken) immer kleiner wird, je mehr  $P$  vom Scheitel  $S$  sich entfernt; so ist allerdings das angedeutete Wachsen des Winkels  $FPM$  bestätigt.

Vermöge vorstehender Betrachtung hat man zu dem Hauptsatze I) folgende genauere Bestimmung:

II) Der Krümmungsmittelpunkt zur Stelle  $P$  einer Parabel fällt auf die Axe selbst dann und nur dann, wenn  $P$  im Scheitel  $S$  der Curve sich befindet, wobei der Krümmungshalbmesser gleich der doppelten Länge von  $FS$ , gleich dem halben Parameter sich zeigt. Zu jedem vom Scheitel verschiedenen Peripheriepunkt  $P$  findet sich der Krümmungsmittelpunkt  $N$  auf der andern Seite der Axe als auf welcher  $P$  selbst liegt, und der Krümmungshalbmesser  $PN$  wächst zugleich mit dem Brennstrahl  $FP$ . Dieses Wachsen geht von der dem halben Parameter gleichen Anfangsgrösse bis in's Unendliche.

Anmerkung. Der Satz I) gestattet ohne weiteres folgende Umformung:

Der zum Periepheriepunkt  $P$  einer Parabel gehörige Krümmungsmittelpunkt  $N$  liegt auf der Normale von  $P$  dermassen, dass die Punkte  $P$  und  $N$ , als einander zugeordnete, eine harmonische Gruppe bilden mit dem unendlich entfernten Punkt der Normale und mit demjenigen Punkte  $M$ , welcher sich ergibt, indem man aus dem Brennpunkte  $F$  die zum Brennstrahl  $FP$  senkrechte Gerade bis zum Durchschnitt ( $M$ ) mit jener Normale zieht.

Diese Umformung kann zwar hier den Eindruck von etwas Gezwungenem machen; sie ist aber doch schon an dieser Stelle hervorzuheben, weil sie das bei der Parabel Vorkommende als besonderen Fall eines für alle Kegelschnitte giltigen Theorems erkennen lässt. — Dieses von Herrn Gugler längst durch Rechnung gefundene und mir gütigst mitgeteilte wird am Schlusse dieser Abhandlung besonders berücksichtigt werden. Einstweilen genüge es noch darauf hinzu-

weisen, dass der unendlich entfernte Punkt unserer Normale  $PN$  gewiss auch anzusehen ist als Durchschnitt dieser Geraden mit einer Linie, die auf Grund der Annahme eines zweiten — unendlich entfernten — Brennpunkts  $U$  der Parabel einzuführen ist; diese Linie nämlich in  $U$  senkrecht auf dem Brennstrahl  $UP$ .

### § 3.

Fünf weitere Regeln der Construction des Krümmungsmittelpunkts an den Hauptsatz I) des § 2. angeknüpft. (Fig. 3.).

Wenn wir das Ergebniss der bisherigen Betrachtung (und die bisherigen Bezeichnungen) festhalten, so ist sofort Folgendes zu bemerken.

Da der Krümmungshalbmesser  $PN$  das doppelte ist von der Hypotenuse  $PM$  des rechtwinkligen Dreiecks  $PFM$ , so gibt das von  $N$  auf die Kathetenlinie  $PF$  gefällte Lot  $NB$  seinen Fusspunkt  $B$  in solcher Lage, dass

$$PB = 2PF.$$

Hiernach ist  $N$  von dem einfach zu bestimmenden  $B$  aus zu gewinnen; es gilt der Satz:

I) Der Krümmungsmittelpunkt  $N$  zu Punkt  $P$  einer Parabel ist dadurch zu erhalten, dass der zugehörige Brennstrahl  $PF$  über  $F$  hinaus um das ihm gleiche Stück  $FB$  verlängert, dann aus  $B$  die zu  $PB$  senkrechte Gerade gezogen wird. Wo diese die Normale von  $P$  erreicht, ergibt sich der Punkt  $N$ .

Für den Axenschnitt  $A$  der Normale des Punkts  $P$  gilt bekanntlich die Angabe

$$FA = FP.$$

Da nun hier auch

$$FB = FP,$$

so ist das jetzt einzuführende Dreieck  $PAB$  rechtwinklig bei  $A$ . Hiernach ist weiter zu behaupten:

II) Der Krümmungsmittelpunkt  $N$  zum Punkt  $P$  einer Parabel ist dadurch zu erhalten, dass aus dem Axenschnitt  $A$  der zugehörigen Normale die zu ihr senkrechte Gerade bis zum Durchschnitte  $B$  mit der Linie des Brennstrahls  $FP$  gezogen, dann in  $B$  die zu  $FB$

senkrechte Gerade errichtet wird. Wo diese die Normale von  $P$  erreicht, ist der Krümmungsmittelpunkt  $N$ .

Mit der Geraden  $PF$  (oder  $PB$ ) gegen die Normale  $PA$  symmetrisch liegt die Linie  $PC$ , welche mit der Parabelaxe parallel ist. Hiernach wäre einfach zu sagen, dass die  $PC$  mit ihr angehörigen Punkten zu denselben Constructionen zu benutzen sei, wie sie in den obigen Sätzen I), II) dieses § gelehrt sind. Macht man aber die Länge  $PC$  selbst  $= PB$ , und zieht man noch die weitere  $CN$ , welche mit der Axe den Durchschnitt  $D$  gibt, so bietet sich zunächst die Congruenz der Dreiecke  $PBN$ ,  $PCN$  dar, und es wird hieraus

$$\text{Wkl. } PCN = PBN = 90^\circ$$

erkannt. Hiernach ist schnell zu übersehen, dass man den Punkt  $N$  von jedem der Punkte  $C$  und  $D$  als einfach mittels einer zu der Parabelaxe senkrechten Geraden construiren könne, und es empfiehlt sich also, die Lage der Punkte  $C$  und  $D$  selbst auf passende Art zu charakterisiren. Dazu dient die Einführung der weiteren Linie  $PE$ , welche in  $E$  auf der Axe senkrecht steht.

Was nun den Punkt  $C$  betrifft, so liegt er auf dem aus  $P$  gehenden Durchmesser der Parabel; der Weg  $PC$  aber, ursprünglich  $= PB = FP + FB$  genommen, ist eben hiermit auch  $= FA + FT = AE + EF =$  Summe aus Subnormale und Subtangente von  $P =$  Summe des halben Parameters  $+ 2SE =$  Summe des halben Parameters und des doppelten Abstandes des Punkts  $P$  von der Scheiteltangente.

Was den Punkt  $D$  anlangt, so liegt er auf der Axe der Parabel, und es lohnt sich, seine Abstände von den beiden Punkten  $S$  und  $A$  der Axe zu betrachten. Da ist für  $SD$  sofort zu sagen:  $SD = SE + ED = SE + PC = SE + 2SE +$  Parameterhälfte  $= 3SE +$  Parameterhälfte. Und für  $AD$  ist anzugeben:

$$AD = ED - EA = PC - EA = (2SE + EA) - EA = 2SE;$$

letzteres auch durch Einführung der Linie  $CA$  leicht zu beweisen, welche als Verlängerung der  $BA$ , somit als parallel mit  $PT$  erkannt wird und auf Erkenntniss der Congruenz der Dreiecke  $CDA$ ,  $PET$  hinleitet.

Die eben ausgeführten Betrachtungen liefern die folgenden weiteren Sätze:

III) Der zu Punkt  $P$  einer Parabel gehörige Krümmungsmittelpunkt  $N$  lässt sich construiren, indem man von  $P$  aus, innerhalb der Curve, auf dem zu  $P$  gehörigen

Durchmesser, ein Stück  $PC$  gleich der Summe aus dem halben Parameter und doppelten Abstand des Punkts  $P$  von der Scheiteltangente abträgt, dann durch  $C$  die zu der Axe senkrechte Gerade zieht. Sie gibt auf der Normale von  $P$  den Punkt  $N$ .

IV) Der zu Punkt  $P$  einer Parabel gehörige Krümmungsmittelpunkt  $N$  lässt sich construiren, indem man vom Scheitel  $S$  aus auf der Axe selbst, innerhalb der Curve, ein Stück  $SD$  gleich der Summe aus dem halben Parameter und dem dreifachen Abstand des Punkts  $P$  von der Scheiteltangente abträgt, dann durch  $D$  die zu der Axe senkrechte Gerade zieht. Sie gibt auf der Normale von  $P$  den Punkt  $N$ .

V) Der zu Punkt  $P$  einer Parabel gehörige Krümmungsmittelpunkt  $N$  lässt sich construiren, indem man, von dem Axenschnitt  $A$  der Normale des Punkts  $P$  ausgehend, auf der Axe selbst eine Strecke  $AD$  (gleichläufig mit  $SF$ ) gleich dem doppelten Abstände des Punkts  $P$  von der Scheiteltangente abträgt, dann durch  $D$  die zu der Axe senkrechte Gerade zieht. Sie gibt auf der Normale von  $P$  den Punkt  $N$ .

Mit Ausnahme der V) lassen sich alle obigen Regeln auch dann festhalten, wenn der Punkt  $P$  in den Scheitel fällt. Für die III), V) kann gegenüber der I) und II) ihre Unabhängigkeit von vorangehender Zeichnung des Brennpunkts hervorgehoben werden.

Anmerkung 1. Der in Satz I) unsres § auftretende Punkt  $B$  kann (wegen  $FP = FA = FB = FT$ ) auch dadurch erhalten werden, dass einestheils durch den Axenschnitt  $T$  der zu  $P$  gehörigen Tangente die Parallele zu seiner Normale  $PA$  gezogen wird, andernteils durch den Axenschnitt  $A$  dieser Normale die Parallele zu jener Tangente. Nun lässt sich der unendlich entfernte Punkt der Parabel als ihr Mittelpunkt ansehen, und die senkrecht zu der eigentlichen — ersten — Axe durch diesen Mittelpunkt gehende Gerade als zweite Axe. Ferner lässt sich dann sowohl für die Tangente als für die Normale von  $P$  sagen, dass der unendlich entfernte Punkt derselben eben ihr Durchschnitt mit der zweiten Axe sei. Dieses vorausgeschickt, kann man dem Satze I) unsres § die folgende Fassung geben, welche deswegen wichtig ist, weil sie (nach dem von Steiner für Ellipse und Hyperbel Gelehrten) wörtlich für alle Kegelschnitte gilt:

Um den Krümmungsmittelpunkt  $N$  zu dem Punkt  $P$



einer Parabel zu finden, kann man die beiden Axenschnitte der Tangente von  $P$  und die beiden der Normale von  $P$  in der so zu beschreibenden Weise benutzen. Durch den Schnitt  $T$  der Tangente mit der ersten Axe zieht man die Gerade nach dem Schnitt der Normale mit der zweiten Axe; ebenso durch den Schnitt  $A$  der Normale mit der ersten Axe zieht man die Gerade nach dem Schnitt der Tangente mit der zweiten Axe. Der Schnittpunkt  $B$  der zwei so gewonnenen Geraden selbst wird mit dem Punkt  $P$  verbunden, durch  $B$  die zu der  $BP$  senkrechte bis zum Durchschnitt mit der Normale gezogen. Dieser letztere Durchschnitt ist der zu  $P$  gehörige Krümmungsmittelpunkt  $N$ .

Was unsern Satz II) betrifft, so hat er bereits die für alle Kegelschnitte gültige Fassung.

Der Satz IV) unsres § lässt zunächst sehen, dass der Punkt  $N$  um so mehr von der Scheiteltangente der Parabel sich entfernt, je mehr der zugehörige Punkt  $P$  dies tut; beide Punkte immer auf einerlei Seite von dieser Tangente liegend. Man kann aber leicht in aller Strenge auch davon sich überzeugen, dass  $N$  mit  $P$  zugleich von der Axe sich entfernt. Dazu dient uns die leicht sich darbietende Proportion

$$ND : PE = AD : AE,$$

welche vermöge des vor III) Bewiesenen übergeht in

$$ND : PE = 2SE : EA.$$

Ihre zwei mittleren Glieder wachsen beide zumal, wenn die Entfernung des Punkts  $P$  von der Axe wächst. Da nun das vierte Glied  $EA$  constant ist, so sieht man allerdings, dass auch  $ND$  (wie  $SD$ ) zugleich mit  $PE$  und  $SE$  wachse.

In diesem Zusammenhange erscheint es am allerleichtesten, für den geometrischen Ort des Krümmungsmittelpunkts der Parabel oder für die Evolute derselben die Gleichung zu finden.

Es seien nämlich als Coordinatenaxen für eine gegebene Parabel wie auch für ihre Evolute genommen die Axe der Parabel und ihre Scheiteltangente, jene als Abscissenaxe, diese als Ordinatenaxe; der positive Zweig der Abscissenaxe habe vom Scheitel  $S$  die Richtung nach  $F$ . Ist nun der Parameter der Parabel  $2p$ , so ist

$$1) \quad y^2 = 2px$$

die Gleichung der Parabel. Sofern diese Relation besteht zwischen den Coordinatenwerten  $x, y$  eines beliebigen Punkts  $P$  dieser Curve, und sofern mit  $X, Y$  die Coordinatenwerte für den zu diesem  $P$  gehörigen Punkt  $N$  bezeichnet werden, so ist aus Satz IV) unsres § sofort zu entnehmen

$$2) \quad X = 3x + p,$$

während die oben vorhin aufgestellte Proportion liefert

$$Y^2 : y^2 = (2x)^2 : p^2$$

oder

$$3) \quad Y^2 = \frac{4x^2 y^2}{p^2}.$$

Um jetzt  $x, y$  aus den Gleichungen 1), 2), 3) zu eliminiren, verbindet man zunächst die 1) mit 3), wodurch sich ergibt

$$4) \quad Y^2 = \frac{8x^3}{p}.$$

In diese aus 2) den Wert  $\frac{1}{3}(X-p)$  für  $x$  einführend, erhält man die gesuchte Evolutengleichung

$$Y^2 = \frac{8}{27}(X-p)^3.$$

#### § 4.

Fünf Sätze zur Construction der Länge des Krümmungshalbmessers ohne vorangehende Construction des Krümmungsmittelpunkts. (Fig. 3.).

Schon im § 2. unsrer Darstellung zeigt sich, dass die Länge des zu Punkt  $P$  gehörigen Krümmungshalbmessers wesentlich abhängt von der Beschaffenheit des dort sich darbietenden rechtwinkligen Dreiecks  $PFM$ ; jener Krümmungshalbmesser ist eben das Doppelte seiner Hypotenuse. Nun ist aber dieses Dreieck einfach dadurch bestimmt, dass es eine Kathete habe gleich dem Brennstrahl  $FP$  und dieser Kathete gegenüber einen Winkel gleich demjenigen  $PTE$ , um welchen die Tangente des Punkts  $P$  von der Axe abweicht. Sofort begreift man auch die Richtigkeit der Angabe:

1) Der Krümmungshalbmesser zu Punkt  $P$  einer Parabel ist zu construiren als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, als dessen eine Kathete zu nehmen ist die doppelte Länge des zu  $P$  gehörigen Brennstrahls, und welches dieser Kathete gegenüber einen

Winkel hat gleich der Abweichung der zu  $P$  gehörigen Tangente von der Axe.

Zu dem eben erwähnten Dreieck  $PFM$  ergibt sich sofort ein ihm congruentes, wenn man sowohl die Normale  $PA$  als die mit der Axe parallel gezogene  $PC$  beide bis zur Directrix verlängert, welche sie beziehungsweise in Punkten  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{F}$  treffen. Denn  $P\mathfrak{F}$  (senkrecht zur Directrix) ist bekanntlich gleich der (zu  $FM$  senkrechten)  $PF$ ; auch bilden die beiden Linien  $PF$ ,  $P\mathfrak{F}$  auf einerlei Seite von der Normale liegend, mit dieser gleiche Winkel. Hiernach ist

$$P\mathfrak{M} = PM,$$

also  $2P\mathfrak{M} = 2PM =$  Krümmungshalbmesser zu  $P$ , und es ist zu sagen:

II) Der Krümmungshalbmesser zu Punkt  $P$  einer Parabel findet sich doppelt so gross als dasjenige Stück der zugehörigen Normale, welches zwischen  $P$  selbst und der Directrix begriffen ist.

Auch zu dem Dreieck  $PBN$  (des § 3.) erhalten wir ein ihm congruentes, wenn wir schon eingeführte Linien weiter benutzen. Da der Winkel  $FPN$  oder

$$FPA = FAP,$$

und da

$$TA = BP$$

ist, so genügt es, durch  $T$  noch die zur Axe senkrechte Gerade zu ziehen und bis zum Schnittpunkte  $\mathfrak{N}$  mit der Normale  $AP$  zu verfolgen, um sofort die Congruenz von Dreieck  $AT\mathfrak{N}$  und  $BP\mathfrak{N}$  zu erkennen. Hiernach findet sich

$$A\mathfrak{N} = PN,$$

und es ist zu sagen:

III) Der Krümmungshalbmesser zu Punkt  $P$  einer Parabel findet sich gleich demjenigen Stück der zugehörigen Normale, welches begriffen ist zwischen der Axe und einer zu der Axe senkrechten Geraden, die man durch den Axenschnitt  $T$  der zu  $P$  gehörigen Tangente zu ziehen hat.

Will man zu dem Dreieck  $PTM$  ein ihm ähnliches beiziehen, so bietet sich zu allernächst dar das Dreieck  $PET$ . Die Vergleichung beider gibt sofort

$$PE : PT = PF : PM = 2PT : 2PM,$$

also (wegen  $2PF = TA$ ) auch

$$PE:PT = TA:2PM.$$

Hiernach ist zu behaupten:

IV) Der Krümmungshalbmesser zu Punkt  $P$  einer Parabel ist vierte Proportionale zu dem Abstände dieses Punkts von der Axe, zu seiner Entfernung von dem Axenschnitte der ihm zugehörigen Tangente, und zu demjenigen Axenstücke, welches zwischen Tangente und Normale von  $P$  begriffen ist.

Das vorhin benutzte, dem Dreieck  $PBN$  congruente Dreieck  $ATN$ , dessen Hypotenuse  $AN$  gleich dem Krümmungshalbmesser zu  $P$  gefunden worden ist, gewährt den Vorteil zwei ihm ähnliche Dreiecke  $APT$  und  $AEP$  darzubieten, welche auch besonders günstig liegen. Ihre Betrachtung gibt sofort

$$\begin{aligned} AN^2:AT^2 &= AN:AP, \\ &= AT:AE. \end{aligned}$$

Hiernach ist zu sagen:

V) Das Quadrat des zu Punkt  $P$  einer Parabel gehörigen Krümmungshalbmessers verhält sich zu dem Quadrat des zwischen Tangente und Normale begriffenen Axenstückes wie dieses Axenstück selbst sich verhält zu dem halben Parameter.

Die vorstehenden Sätze sind alle auch für den Grenzfall festzuhalten, wo  $P$  in den Scheitel  $S$  zu liegen kommt. Doch sind in diesem Fall alle ausser II) nicht zur Ausführung einer Construction zu verwenden, deren Bedürfniss übrigens (nach § 2., II) auch selbstverständlich wegfällt, wenn man den Parameter der Parabel kennt.

Anmerkung 1. Zu dem Satze I) unsres § kann man hervorheben, dass das Doppelte des Brennstrahls  $FP$  genau halb so gross ist als diejenige durch  $F$  zu ziehende Parabelsehne, welche mit der Tangente von  $P$  parallel ist, d. h. jenes Doppelte ist gleich der Hälfte desjenigen Nebenparameters, welcher dem durch  $P$  gehenden Durchmesser conjugirt ist.

Diese Bemerkung genügt, um den betreffenden Satz als Analogon desjenigen für Ellipse und Hyperbel gültigen Satzes zu erkennen, den ich nur andeuten will durch die Formel

$$p = \frac{b^2}{a} : \sin \alpha;$$

hierbei  $\varrho$  der Krümmungshalbmesser zu Punkt  $P$ ,  $\alpha$  der nach  $P$  zu ziehende Halbmesser,  $b$  der ihm conjugirte,  $\alpha$  der Winkel zwischen beiden, während  $\frac{b^2}{\alpha}$  die Rolle eines gewissen Nebenparameters spielt.

Was den Satz II) betrifft, so ist er sofort auch auf die Form zu bringen:

Der Krümmungshalbmesser zu Punkt  $P$  einer Parabel ist gleich dem Durchmesser desjenigen Kreises, der die Parabel in  $P$  berührt und seinen Mittelpunkt auf der Directrix hat.

Nun ist aber bekanntlich die Directrix auch zu bezeichnen als der geometrische Ort für den Scheitel eines rechten Winkels, dessen beide Schenkel die Parabel berühren; und ein Kreis, der seinen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden hat, schneidet diese rechtwinklig. Hiernach ist die vorige Fassung zu ersetzen durch die so lautende:

Der Krümmungshalbmesser zu Punkt  $P$  einer Parabel ist gleich dem Durchmesser desjenigen Kreises, der die Parabel in  $P$  berührt, und der rechtwinklig schneidet die Ortslinie des Scheitels eines rechten Winkels, dessen beide Schenkel die Parabel berühren.

Diese Fassung ist es, welche nach Steiner für alle Kegelschnitte zutrifft.

Anmerkung 2. Der Satz V) unsres § macht es möglich, sofort den zu Punkt  $P$  der Parabel gehörigen Krümmungshalbmesser  $\varrho$  auszudrücken in dem Parameter  $2p$  der Curve und in dem Abstand  $x$  des Punkts  $P$  von der Scheiteltangente. Die Proportion

$$\overline{AN}^2 : \overline{AT}^2 = AT : AE$$

geht vermöge der angegebenen Bezeichnungen über in

$$\varrho^2 : (2x + p)^2 = (2x + p) : p,$$

was aus

$$AT = 2FP = 2 \left( x + \frac{p}{2} \right)$$

zu verstehen ist. Man findet also

$$\varrho^2 = (2x + p)^3 : p.$$

## § 5.

Genauere Betrachtung des Hilfskreises, an welchen die Auffindung des Krümmungskreises sich geknüpft hat.

(Fig. 3.)

Wenn wir für einen beliebigen Punkt  $P$  der Parabel die Lage des zugehörigen Krümmungskreises gegen die Curve selbst in jeder Beziehung genau untersuchen wollen, so werden wir beachten müssen, dass dieser Krümmungskreis mit dem zu seiner Auffindung benutzten Hilfskreise  $PFM$  ähnlich liegt, so zwar dass der Punkt  $P$  selbst für beide Kreise, welche die Parabel an dieser Stelle berühren, der äussere Aehnlichkeitspunkt ist. Hierdurch findet sich angezeigt, dass wir zunächst für den Hilfskreis alle diejenigen weiteren Bestimmungen aufsuchen, welche die bisherigen Betrachtungen und Constructionen uns darbieten können.

Da das bei  $F$  rechtwinklige Dreieck  $PFM$  bei  $M$  denselben Winkel hat, welcher in dem schiefwinkligen  $PFT$  bei  $T$  sich findet, so ist leicht die Angabe zu begründen, dass der Kreis  $PFM$  gleich ist dem Kreise  $PFT$ . Man kann daher auch (mit Beziehung von § 2, I) den Satz aussprechen:

I) Der zum Peripheriepunkt  $P$  einer Parabel gehörige Krümmungshalbmesser ist doppelt so gross als der Durchmesser desjenigen Kreises, der durch den Punkt  $P$  selbst, durch den Axenschnitt  $T$  der zu  $P$  gehörigen Tangente und durch den Brennpunkt  $F$  geht.

Unser Hilfskreis hat ferner mit dem aus  $P$  gehenden Parabeldurchmesser  $PC$  (§ 3.) ausser dem Punkte  $P$  noch einen zweiten  $G$  gemein. Da nun

$$\text{Winkel } GPA = \text{Winkel } FPA,$$

während  $PA$  den Mittelpunkt des Hilfskreises enthält, so ist sofort zu ersehen

$$PG = PF.$$

Daran knüpft sich die weitere Angabe, dass  $FG$  parallel sei mit der zu  $P$  gehörigen Tangente. Hiernach kann unter anderem gesagt werden:

II) Der zu Punkt  $P$  einer Parabel gehörige Krümmungshalbmesser ist doppelt so gross als der Durchmesser desjenigen Kreises, der die Parabel in  $P$  berührt und durch denjenigen Punkt  $G$  des zu  $P$  gehörigen Parabeldurchmessers geht, in welchem dieser geschnitten

wird von der ihm conjugirten, durch den Brennpunkt gehenden Sehne.

Unser Hilfskreis hat endlich mit der Axe der Parabel ausser dem Punkte  $F$  einen zweiten Punkt  $H$  gemein. Da nun nach Einführung der Sehne  $PH$  sofort

$$\text{Winkel } PHF = PMF = PTF$$

sich zeigt, so ist für das Dreieck  $PTH$  mit seiner Höhenlinie  $PE$  zu bemerken:

$$\text{Winkel } HPE = TPE, \quad PH = PT, \quad EH = ET.$$

Da zugleich

$$ET = 2SE,$$

so ist auch

$$EH = 2SE,$$

und

$$SH \text{ ist } = 3SE,$$

gleich dem dreifachen Abstand des Punkts  $P$  von der Scheiteltangente. Hiernach ist zu sagen:

III) Der zu Punkt  $P$  einer Parabel gehörige Krümmungshalbmesser ist doppelt so gross als der Durchmesser desjenigen Kreises, der die Parabel in  $P$  berührt und durch einen Punkt  $H$  ihrer Axe geht, dessen Lage durch jede der folgenden Angaben bestimmt wird. Die Gerade  $PH$  liegt mit der zu  $P$  gehörigen Tangente  $PT$  symmetrisch gegen das von  $P$  auf die Axe fallende Lot  $PE$ . Der Abstand des Punkts  $H$  vom Punkte  $E$  ist doppelt so gross als der Abstand des Punkts  $P$  von der Scheiteltangente. Der Abstand des Punkts  $H$  vom Scheitel  $S$  ist dreimal so gross als der Abstand des Punkts  $P$  von der Scheiteltangente.

Gerade die zwei letzteren Bestimmungen sind es, welche für die weitere Untersuchung von grösster Bedeutung werden.

## § 6.

Das Verhalten eines Krümmungskreises der Parabel gegen die Curve selbst genauer bestimmt. (Fig. 3.).

Ist  $P$  irgend ein vom Scheitel  $S$  verschiedener Punkt der Parabel, und sind  $P_1, P_{11}$  dicht bei  $P$  befindliche Punkte der Curve zu verschiedenen Seiten von  $P$ , ist namentlich  $P_{11}$  näher am Scheitel als  $P$  selbst, so ist (§ 2., II) der zu  $P$  gehörige Krümmungshalbmesser

kleiner als der zu  $P_1$  gehörige, grösser als der zu  $P_{11}$  gehörige. Hiernach ist die Krümmung der Curve bei  $P$  stärker als bei  $P_1$ , schwächer als bei  $P_{11}$ ; der von  $P$  ausgehende Parabelzweig  $PP_1$  muss also bei  $P$  mehr an die zugehörige Tangente sich anschmiegen als der dortige Krümmungskreis dies tut, bei  $P_{11}$  weniger. Hieraus ist klar, dass das Parabelstückchen  $PP_1$  zwischen jene Tangente und den Krümmungskreis fällt, das Stückchen  $PP_{11}$  aber innerhalb des letzteren, es ist also klar, dass die Parabel von ihrem zu  $P$  gehörigen Krümmungskreis an dieser Stelle sowohl geschnitten als berührt wird. Da es indess zwei nächst aufeinanderfolgende Elemente sind, welche die beiden Linien gemein haben, da also drei Punkte, als ihnen beiden gemeinschaftliche, daselbst sich zusammendrängen: so ist zu erwarten, dass ausser dem Durchschnitt bei  $P$  noch ein weiterer von ihm völlig getrennter, gemeinschaftlicher Punkt sich ergebe. Solcher wird in der Tat gefunden mittels folgender, wesentlich an § 5., III) sich anknüpfenden Betrachtung.

Der zu  $P$  gehörige Krümmungskreis hat (§ 2., I) einen viermal so grossen Durchmesser als der Hilfskreis  $FPM$ . Da nun  $P$  äusserer Aehnlichkeitspunkt für beide Kreise ist, so muss jede aus  $P$  gezogene Sehne des Krümmungskreises viermal so lang sein als die in dieselbe Gerade fallende Sehne des Hilfskreises. Wenden wir dies an auf die in § 5. hervorgetretene Sehne  $PH$  des letzteren, deren Endpunkt  $H$  auf der Parabelaxe liegt. Sie gibt, über  $H$  hinaus verlängert, für den Krümmungskreis die Sehne  $PJ$ , deren Länge also  $= 4PH$ , und deren Endpunkt  $J$  auf der andern Seite der Parabelaxe ist als auf welcher  $P$  liegt. Für den Punkt  $J$  des Krümmungskreises ist hiernach sofort klar: das von  $J$  auf die Parabelaxe fallende Lot  $JK$  ist dreimal so gross als das von  $P$  auf dieselbe fallende  $PE$ , und dergleichen findet sich

$$HK = 3HE.$$

Da aber  $HE$  selbst (nach § 5.)  $= 2SE$ , so ist

$$HK = 6SE,$$

somit

$$SK = 9SE.$$

So gut nun für den Parabelpunkt  $P$  die Angabe besteht

$$\overline{PE}^2 = \text{Parameter mal } SE,$$

so gut besteht auch die Angabe

$$3\overline{PE}^2 = \text{Parameter mal } (9SE),$$

d. h.

$$\overline{JK}^2 = \text{Parameter mal } SK.$$



Der auf dem Krümmungskreis befindliche Punkt  $J$  genügt hiermit derjenigen Forderung, welche allein zu erfüllen ist, damit er auch auf der Parabel sich befinde; es ist also  $J$  ein durch messbare Entfernung von  $P$  getrennter Punkt, welchen beide Linien gemein haben. Ausser ihm und den drei bei  $P$  selbst vereinigt zu denkenden Punkten haben sie aber gewiss keinen fünften gemein, und auch der Punkt  $J$  selbst kann nicht ein Berührungspunkt, sondern nur ein einfacher Durchschnittspunkt sein; beides deshalb, weil zwei mit fünf gemeinschaftlichen Punkten behaftete Linien zweiter Ordnung gar nicht von einander verschieden sein könnten. Sonach ergibt sich auch die bestimmtere Anschauung, dass der Parabelbogen  $PP_{11}J$  (von  $P$  über den Scheitel  $S$  nach  $J$  laufend) ganz innerhalb des Krümmungskreises sich befinde, während seine über  $P$  und  $J$  hinausgehenden Verlängerungen ganz ausserhalb desselben verlaufen.

Vorstehende Betrachtungen (verbunden mit dem in § 5. über die Lage des Punkts  $H$  Gesagten) begründen vollständig den so lautenden Hauptsatz:

I) Ist  $P$  ein vom Scheitel  $S$  verschiedener Punkt einer Parabel, so hat der zu  $P$  gehörige Krümmungskreis die Eigentümlichkeit, sowohl an der Stelle  $P$ , wo er drei Punkte mit der Parabel gemein hat, diese zu schneiden, als auch einen von  $P$  getrennten (einfachen) Durchschnitt  $J$  mit ihr zu geben. Dieser Punkt  $J$  liegt auf der andern Seite der Axe als  $P$ ; er findet sich auf derjenigen Secante  $PH$ , welche aus  $P$  gegen die Parabelaxe hin unter demselben Winkel wie die Tangente jenes Punkts zu ziehen ist. Von den zwei durch Sehne  $PJ$  getrennten Bogenstücken des Krümmungskreises muss das eine den Parabelbogen  $PSJ$  umschliessen, das andere völlig innerhalb der Parabel sich befinden.

Lässt man den Punkt  $P$  der obigen Darstellung mehr und mehr gegen  $S$  hinstücken, so muss auch der zugehörige  $J$  dies tun; es ergibt sich solches aus dem Umstande, dass (bei der gemachten Annahme) die zu  $P$  gehörige Tangente ihre Abweichung von dem auf die Axe fallenden Lote  $PE$  stetig verkleinert bis zu der Grenze Null, und dass der dem Winkel  $TPE$  gleiche  $JPE$  das entsprechende Schicksal hat. Wenn  $P$  in  $S$  eintrifft, so ergibt sich dasselbe für  $J$ , welcher Punkt von anderer Seite her als  $P$  der Vereinigung mit  $S$  zustrebt. Hiernach gewinnt man von dem am Scheitel  $S$  befindlichen Krümmungskreis der Parabel die Anschauung, dass er an dieser Stelle vier Punkte mit der Parabel gemein habe und nirgends einen durch

messbare Entfernung von  $S$  getrennten. Dasselbe zeigt sich, wenn man erwägt, dass nach § 2. II) der zum Scheitel  $S$  gehörige Krümmungshalbmesser ein Minimum ist; ganz besonders deutlich aber wird es durch Betrachtung eines Kreises, welcher die Parabel in zwei solchen Punkten  $P, O$  berührt, welche zur Axe symmetrisch liegen. Solcher Kreis ist anzusehen als einer, der an jeder der Stellen  $P$  und  $O$  zwei Punkte mit der Parabel gemein habe; und wenn solche Punkte bis zur Vereinigung mit  $S$  geführt werden, so geht der gedachte Kreis in den Krümmungskreis der Stelle  $S$  über. Hiernach kann man zu I) den Satz fügen:

II) Der zum Scheitel einer Parabel gehörige Krümmungskreis ist so anzusehen, dass vier den beiden Curven gemeinschaftliche Punkte an jener Stelle vereinigt seien, und liegt solcher Kreis — abgesehen von der am Scheitel statthabenden Berührung — ganz frei innerhalb der Parabel.

Aus dem Satze I) ergibt sich endlich leicht die einer Umkehrung desselben entsprechende Angabe:

III) Um den Krümmungskreis zu einer vom Scheitel abliegenden Stelle  $P$  einer Parabel zu zeichnen, kann man zu der Tangente  $PT$  des Punkts  $T$  diejenige aus  $P$  zu ziehende Secante nehmen, welche unter demselben Winkel wie jene Tangente gegen die Axe geneigt ist. Ist  $J$  als zweiter Durchschnitt dieser Secante mit der Parabel gewonnen, so kommt die Construction darauf hinaus, denjenigen Kreis zu beschreiben, welcher durch  $J$  geht und die Gerade  $PT$  in  $P$  berührt.

Obige Sätze I) bis III) sind wörtlich ebenso für die anderen Kegelschnitte gültig.

## § 7.

Merkwürdige Umgestaltung der Lehren des vorangehenden §; Herleitung einer weiteren Construction. (Fig. 3.)

Wird die in III) des vorigen § angedeutete Construction wirklich ausgeführt, so ist der Halbierungspunkt  $\mathfrak{B}$  der Parabelsehne  $PJ$  zu benutzen; es ist durch ihn die zu  $PJ$  senkrechte Gerade zu ziehen, welche dann auf der Normale von  $P$  den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt  $N$  liefert. Da nun

$$PJ = 4PH,$$

so ist

$$PL = 2PH;$$

es ist hiernach von  $PH$  aus gerade so zu construiren, wie es nach § 3. II) von  $PF$  aus geschieht, wo man zu  $PF$  die Verdoppelung  $PB$  genommen hat wie hier zu  $PH$  die Verdoppelung  $PL$ . — Fasst man, wie jetzt nahe gelegt ist, die Gerade  $BL$  ins Auge, so zeigt sie sich mit der  $FH$  d. h. mit der Parabelaxe parallel; das von  $P$  auf die  $BL$  fallende Lot  $PO$  fällt in die Richtung  $PE$ ,  $PO$  ist in  $E$  halbt, und  $O$  selbst ist derjenige Parabelpunkt, welcher mit  $P$  symmetrisch gegen die Axe liegt. Auch mit der Normale  $PA$  gibt der nun eingeführte Durchmesser  $OL$  einen bemerkenswerten Durchschnitt  $R$ , wobei

$$PR = 2PA, \quad OR = 2EA,$$

d. h.  $OR$  gleich dem Parameter der Parabel sich zeigt. — Wird nun zu  $OR$  die ihr gleiche Rückverlängerung  $OV$  genommen, und wird  $PV$  gezogen, so bieten sich die zwei gleichschenkligen Dreiecke  $PTH$ ,  $PVR$  in so übersichtlicher Lage dar, dass man sofort

$$\text{Winkel } TPV = RPL,$$

also auch

$$\text{Winkel } VPL = TPR = 90^\circ,$$

also  $VP$  als parallel mit  $NL$ , also Dreieck  $RPV$  als ähnlich mit  $RNL$  erkennt. — Wird vollends durch  $V$  die mit  $PL$  ( $PH$ ) parallele Gerade  $VW$  gezogen, so ergibt sich folgende Betrachtung. Eine um den festen Punkt  $R$  sich drehende Gerade gibt in jeder ihrer Lagen mit  $PL$  und  $VW$  zwei zusammengehörige Durchschnitte  $L_1$  und  $V_1$ , wie von Anfang an  $L$  und  $V$  als solche erscheinen; auch sind dann immer die zwei Dreiecke  $RPV_1$  und  $RNL_1$  einander ähnlich, wie die vorhin bemerkten  $RPV$  und  $RNL$  es sind. Daraus folgt, dass immer  $PV_1$ ,  $NL_1$  parallel sind. Statt also den Punkt  $N$  von  $L$  aus zu construiren mittels der durch  $L$  senkrecht zu  $PL$  zu ziehenden Geraden, so kann man jenen auch erhalten, indem man auf der  $VW$  einen Punkt  $V_1$  beliebig nimmt, von diesem aus sowohl  $V_1P$  als  $V_1R$  zieht, den Durchschnitt  $L_1$  der letzteren mit  $PH$  bestimmt, endlich durch  $L_1$  die Parallele zu  $V_1P$  zieht. Diese zuletzt gezogene giebt mit der Normale von  $P$  den gesuchten Punkt  $N$ .

Die hier eingeführte Gerade  $VW$  ist nichts anderes als die Polare des Punkts  $R$  mit Bezug auf die Parabel: denn die Punkte  $V$ ,  $O$ ,  $R$  und der unendlich entfernte Punkt dieser Curve bilden auf dem Durchmesser  $OR$  eine harmonische Gruppe, wobei  $V$  und  $R$  einander zugeordnet sind; und die durch  $R$  nach dem unendlich entfernten Punkt der Geraden  $VW$  gehende Secante der Curve bietet eben so als eine harmonische Gruppe dar diesen unendlich entfernten Punkt,

den ihm zugeordneten  $R$  und die Endpunkte der zugehörigen (in  $R$  selbst halbirt) Sehne. — Wird nun diese Auffassung der  $VW$  verbunden mit der obigen, so einfachen Bestimmung des Punkts  $R$ , so ergibt sich — in gleichem Range mit Satz III) des vorigen § — der so lautende:

Um den Krümmungsmittelpunkt  $N$  zum Peripheriepunkt  $P$  einer Parabel zu finden, ist auf folgende Art zu verfahren. Man nimmt auf der Normale von  $P$  denjenigen Punkt  $R$ , welcher von ihrem Axenschnitte ebenso weit entfernt ist als  $P$  selbst; zu  $R$  als Pol die zugehörige Polare  $VW$ , zu dieser die durch  $P$  parallel mit ihr zu ziehende Gerade  $PL$ . Diese zwei letzteren Geraden schneidet man mittels einer durch  $R$  beliebig zu führenden, welche somit auf der  $VW$  einen Punkt  $V_1$ , auf der  $PL$  einen Punkt  $L_1$  gibt. Endlich noch die  $V_1P$  einführend zieht man durch  $L_1$  die mit ihr parallele Gerade, welche dann auf der Normale von  $P$  den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt  $N$  liefert.

Anmerkung. So vorgetragen, wie es eben geschehen ist, versagt die Constructionsregel unseres § (ebenso wie die III) des § 6.) in dem besondern Falle, wo  $P$  in den Scheitel der Parabel zu liegen kommt; denn dann ist der Axenschnitt der Normale von  $P$  nicht zur Verfügung, um von ihm aus den Punkt  $R$  und dann den Punkt  $N$  zu construiren, welcher letztere ja selbst als solcher Axenschnitt aufzufassen wäre. Allein die der Aufstellung unserer Regel vorangehende Betrachtung gestattet uns den Punkt  $R$  darnach zu definiren, dass er zu dem Parabelpunkt  $P$  erhalten wird, indem man zu  $P$  den mit ihm gegen die Axe symmetrisch liegenden  $O$  nimmt, dann von  $O$  aus innerhalb der Curve, auf dem zugehörigen Durchmesser das Stück  $OR$  gleich dem Parameter abträgt. Solches kann auch dann geschehen, wenn  $O$  und  $P$  im Scheitel  $S$  sich vereinigen; somit lässt sich auch dann  $R$  vor  $N$  construiren, und man kommt, im Uebrigen nach dem Wortlaute der Regel verfahren, zu einem Resultat, welches mit dem schon in § 2. Gelehrten übereinstimmt.

Der nach Obigem für alle Fälle der Lage des Parabelpunkts  $P$  zu erhaltende, ihm zugehörige Punkt  $R$  zeigt sich nun aber auch identisch mit demjenigen Punkte, durch welchen die Hypotenuse jedes rechtwinkligen Dreiecks geht, welches, der Parabel eingezeichnet, den Scheitel seines rechten Winkels in  $P$  hat. Die Erkenntniss dieser Identität ergibt sich wol am schnellsten, wenn man für gedachtes Dreieck die zwei Grenzgestalten ins Auge fasst: die eine, welche sich ergibt, sofern von den Kathetenlinien die erste mit der Axe parallel

genommen wird, wobei die zweite durch den mit  $P$  symmetrisch liegenden Curvenpunkt  $O$  geht, also die Hypotenusenlinie als der durch  $O$  gehende Durchmesser sich darbietet; die andere Grenzgestalt, welche sich ergibt, sofern die erste Kathete in die Normale von  $P$  einrückt, die zweite Null wird, die Hypotenuse also mit der Normale sich vereinigt.

Ferner ist für jeden Kegelschnitt und für jeden ihm angehörigen Punkt  $P$  zu behaupten, dass alle dem Kegelschnitt eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke, welche den festen Scheitel  $P$  für ihre rechten Winkel gemein haben, ihre Hypotenusen durch Einen Punkt  $R$  gehen lassen. — Diesen allgemeinen Satz hat Staudt in der „Geometrie der Lage“ nach seiner eigentümlichen Methode bewiesen und daraus eine Regel für die Construction des Krümmungsmittelpunkts zu jeder Stelle eines jeden Kegelschnitts hergeleitet (S. 207). Diese Regel ist aber wörtlich übereinstimmend mit der in unserem § gegebenen, wenn nur in der letzteren statt Parabel gesagt wird Kegelschnitt, und wenn die Lage des Punkts  $R$  in dem Staudt'schen Sinne, mit Bezugnahme auf die eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke, definiert wird.

Somit ist der Lehrsatz unseres § als besonderer Fall eines für alle Kegelschnitte giltigen zu erkennen.

### § 8.

#### Rückblick auf die Parabel und Ausblick auf Ellipse und Hyperbel.

In den vorstehenden §§ wird man wol alle Hauptsätze finden, welche für die Krümmungskreise der Parabel bekannt sind; und zwar haben sie alle in Einem Zusammenhange sich ergeben, welcher von dem in § 2. gewonnenen Standpunkte aus vollkommen beherrscht wird. — Es liegt nahe, mit Bezug auf Ellipse und Hyperbel für die ähnliche Untersuchung die ähnliche Grundlage und die ähnliche Entwicklung zu suchen. Diese Arbeit hat bereits Herr Professor C. W. Baur zu Stuttgart (am K. Polytechnikum) mit schönstem Erfolge in Angriff genommen. Nachdem ich das Wesentliche der hier dargelegten Ergebnisse und Methode ihm mitgeteilt hatte, gelang es ihm — was ich freudig anerkenne — sofort für die Ellipse den mir noch nicht bekannt gewesenenen Satz zu finden:

Wenn zwei Peripheriepunkte einer Ellipse auf Einer Seite von ihrer grossen Axe sich befinden, so zeigt sich der Winkel zwischen den zugehörigen Nor-

malen gleich der halben Summe der zwei Winkel, deren jeder sich ergibt zwischen den aus Einem Brennpunkte nach jenen zwei Peripheriepunkten gezogenen Brennstrahlen.

Aus diesem Satze — ähnlich schliessend, wie es hier in § 2. geschehen ist — entwickelte er den von Herrn Gugler (vergl. § 2. Anmkg.) schon längst auf anderem Wege gefundenen und so ausgesprochenen:

Der Krümmungsmittelpunkt  $N$  zu Punkt  $P$  einer Ellipse liegt auf der Normale von  $P$  dermassen, dass die Punkte  $P$  und  $N$  — als einander zugeordnete — eine harmonische Gruppe bilden mit den zwei Punkten, deren jeder erhalten wird, indem man aus einem Brennpunkt  $F$  den Brennstrahl  $FP$  zieht, dann aus  $F$  die zu  $FP$  senkrechte Gerade bis an jene Normale.

Diese beiden Sätze (der letztere auch von mir selbst fast gleichzeitig mit Herrn Baur an den ersteren angeknüpft) lassen sich sofort auf die Hyperbel ausdehnen. Von ihnen aus wird verhältnissmässig leicht (durch rein geometrisches Verfahren) auch für Ellipse und Hyperbel noch derjenige gewonnen, welcher durch die Formel  $\varphi = n : \cos^2 \varphi$  kurz anzudeuten ist, und welcher unserem Satze § 3. II) über die Parabel entspricht. Dagegen scheint der weitere Fortgang auf der betretenen Bahn etwas grössere Schwierigkeiten zu haben; wobei freilich die Hoffnung besteht, dass dieselben — gegenüber den etwa fortgesetzten Bemühungen der genannten Gelehrten — in nicht langer Zeit verschwinden werden.

Ludwigsburg, im Juli 1877.

## XXIX.

Recherche des systèmes de deux polygones réguliers étoilés, inscrits dans le même cercle, qui sont tels que la surface de l'un soit double de la surface de l'autre.

Par

**Georges Dostor.**

Nous avons prouvé, dans ce Journal (Tome LIX, page 385) que

La surface du décagone régulier étoilé est double de la surface du pentagone régulier étoilé, qui est inscrit dans le même cercle.

Cette relation remarquable n'existe pas seulement entre les surfaces de ces deux polygones: elle est une conséquence d'un théorème général, qui a lieu pour les surfaces de certains couples de polygones réguliers, inscrits dans le même cercle et ayant l'un deux fois autant de côtés que l'autre.

Considérons, en effet, deux polygones réguliers inscrits dans le même cercle, et ayant l'un  $n$  et l'autre  $2n$  côtés. Supposons que le premier polygone, qui a  $n$  côtés, soit de l'espèce  $p$ , et que le second, de  $2n$  côtés, soit de l'espèce  $q$ .

Les surfaces de ces deux polygones réguliers seront respectivement (Tome LIX, page 380)

$$S_{n,p} = nR^2 \frac{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{p}{n} \pi}{\cos \frac{p-1}{n} \pi},$$

$$S_{2n,p} = 2nR^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{q}{2n} \pi}{\cos \frac{q-1}{2n} \pi},$$

où  $R$  désigne le rayon du cercle commun circonscrit.

Pour que la seconde surfaces  $S_{2n,q}$  soit double de la première  $S_{n,p}$ , il faut et il suffit que l'on puisse trouver pour  $p$  et  $q$  des valeurs entières telles que les deux fractions

$$\frac{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{p}{n} \pi}{\cos \frac{p-1}{n} \pi}, \quad \frac{\sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{q}{2n} \pi}{\cos \frac{q-1}{2n} \pi}$$

soient identiquement égales, quel que soit le nombre entier  $n$ .

Cette égalité parfaite aura certainement lieu, si l'on a, pour toute valeur entière de  $n$

$$\sin \frac{\pi}{n} = \cos \frac{q}{2n} \pi, \quad \cos \frac{p}{n} \pi = \sin \frac{\pi}{2n},$$

$$\cos \frac{p-1}{n} \pi = \cos \frac{q-1}{2n} \pi,$$

ou si les trois équations

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{q}{2n} \pi, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{p}{n} \pi = \frac{\pi}{2n},$$

$$\frac{p-1}{n} \pi = \frac{q-1}{2n} \pi,$$

sans être incompatibles, admettent des valeurs entières pour  $p$  et  $q$ , respectivement inférieures à  $n$  et à  $2n$ .

Or les deux premières de ces équations donnent les valeurs

$$q = n - 2, \quad p = \frac{n-1}{2},$$

qui, par l'élimination de  $n$ , fournissent précisément notre troisième équation de condition

$$q+2 = 2p+1, \quad \text{ou} \quad q-1 = 2p-2.$$

Ainsi, si  $n$  est impair et que l'on ait  $q = n-2$ ,  $p = \frac{n-1}{2}$ , le premier polygone régulier sera double du second. Nous pouvons donc dire que:

**Théorème.** La surface d'un polygone régulier, d'un



nombre simplement pair  $2n$  de côtés et de l'espèce  $n-2$ , est double de la surface du polygone régulier de  $n$  côtés et de l'espèce  $\frac{n-1}{2}$ , qui est inscrit dans le même cercle; ou d'une manière plus précise

La surface d'un polygone régulier, d'un nombre impair de côtés et de son espèce la plus élevée, est la moitié de la surface du polygone régulier, d'un nombre double de côtés et aussi de son espèce la plus élevée, qui se trouve inscrit dans le même cercle.

Pour nous borner aux polygones réguliers, inscriptibles par la règle et le compas, donnons à  $n$  successivement les valeurs 3, 5, 15, 17, etc.;

pour  $n = 3$ , nous aurons  $2n = 6$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1$ ;

„  $n = 5$ , „  $2n = 10$ ,  $p = 2$ ,  $q = 3$ ;

„  $n = 15$ , „  $2n = 30$ ,  $p = 7$ ,  $q = 13$ ;

„  $n = 17$ , „  $2n = 34$ ,  $p = 8$ ,  $q = 15$ ; etc.

Ainsi l'hexagone régulier est double du triangle équilatéral inscrit dans la même cercle; la surface du décagone régulier étoilé est double de la surface du pentagone régulier étoilé; le polygone régulier de 30 côtés et de la treizième espèce est double du polygone régulier de 15 côtés et de la septième espèce; etc.

## XXX.

## Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe.

Von

R. Hoppe.

## Einige Hilfssätze.

Um Unterbrechung zu vermeiden, will ich vor Stellung der Aufgabe 3 allgemeine Sätze vorausschicken.

Satz 1. Ist  $w(a)$  die Wahrscheinlichkeit, dass eine Variable  $x$  grösser als eine Constante  $a$  sei, so ist die Wahrscheinlichkeit eines  $x$  zwischen  $a$  und  $a + \partial a$

$$= -\partial w(a)$$

Denn die Chancen für  $x > a + \partial a$ , d. i.  $w(a + \partial a)$ , sind um die fragliche Grösse kleiner als die Chancen für  $x > a$ , d. i.  $w(a)$ .

Satz 2. Ist  $v_k$  die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Combination von  $k$  Fällen unter  $k$  möglichen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend einer der  $k$  Fälle stattfinde,

$$V = \Sigma v_1 - \Sigma v_2 + \Sigma v_3 - \Sigma v_4 + \dots \Sigma v_k \quad (1)$$

wo sich die Summen auf alle möglichen Combinationen beziehen.

Beweis. Sei  $v'_k$  die Wahrscheinlichkeit, dass dieselbe Combination von  $k$  Fällen wie in  $v_k$  statthabe, aber kein anderer der  $k$  Fälle ausserdem. Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $V$ , dass irgend einer von allen Fällen stattfinde, die Summe aller  $v'$ . Um nun zu beweisen, dass letztere gleich dem Ausdruck (1) ist, brauchen wir die Combinationen jeder Classe nur ohne Unterschied zu zählen, weil stets alle

Permutationen in ihnen enthalten sein müssen. Entwickeln wir die  $v_k$  in die  $v_k'$ , so sind die Anzahlen der darin enthaltenen  $v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots$  die der Combinationen der  $k-h$  übrigen Fälle, dass ist

$$1, \frac{k-h}{1}, \frac{k-h}{1} \frac{k-h-1}{2}, \dots$$

allgemein ist die Anzahl der  $v'_{k+g}$ , als Binomialcoefficient bezeichnet,

$$= (k-h)_g$$

oder die der  $v_g'$

$$= (k-h)_{g-h}$$

Ferner ist die Anzahl der  $v_k$

$$= (k)_h$$

folglich die aller derjenigen  $v_g'$ , welche  $\Sigma v_k$  enthält,

$$= (k)_h (k-h)_{g-h} = (k)_g (g)_h$$

Hiervon ist für constantes  $g$  und  $k$  bei abwechselnden Vorzeichen gemäss (1) die Summe nach  $h$  von 1 an bis zum Abbrechen der Reihe bei  $h=g$  zu nehmen. Nach dem binomischen Satze ist nun

$$\sum_{h=0}^{h=g} (g)_h (-1)^h = (1-1)^g = 0$$

mithin die Summe von  $h=1$  an  $= -1$ , folglich

$$\sum_{h=1}^{h=g} (-1)^{h-1} (k)_g (g)_h = (k)_g$$

und die Anzahlen der im Ausdruck (1) enthaltenen  $v_1', v_2', v_3', \dots$  werden

$$(k)_1, (k)_2, (k)_3, \dots$$

das ist gleich den Anzahlen aller verschiedenen  $v_k'$  jeder Classe, was allein noch zu beweisen war.

Satz 3. Sind die Wahrscheinlichkeiten von  $n$  Fällen  $w_1, w_2, \dots w_n$  unendlich klein, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt einer von ihnen stattfindet,

$$= w_1 + w_2 + \dots w_n$$

Sind insbesondere alle  $n$  Fälle gleich wahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt einer stattfindet,  $n$  mal so gross als die des einzelnen.

Dass die Behauptung, schon für beliebig grosse Wahrscheinlichkeiten, richtig ist, wenn keine Fälle combinirt vorkommen können,

erhellt von selbst. Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit jeder Combination das Product der Wahrscheinlichkeiten der darin combinirten Fälle, verschwindet also gegen letztere, folglich auch gegen die Summe aller, da sie ja positiv sind, und es bleibt die reine Summe übrig.

### Aufgabe.

Auf einer begrenzten Linie liegen  $n$  Punkte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stück der Linie von gegebener Länge frei von Punkten ist?

Es ist leicht zu sehen, dass diese Aufgabe Anwendung in sehr mannichfaltiger Form zulässt. Die Linien können gerade oder krumm sein; man kann statt ihrer Rechtecke, Winkel und andere einfach variirende Raumgrössen, statt der Punkte geeignete Linien nehmen; die Linien können Zeitintervalle, die Punkte Ereignisse repräsentiren u. s. w. Erweiterungen des Problems sind in vieler Weise möglich.

Wir wollen zuerst voraussetzen, dass das leere Intervall nicht kleiner als die Hälfte der ganzen Linie sei, und die Aufgabe so nach 3 Methoden lösen.

### Erste Methode.

Die ganze Linie  $AB$  sei  $= 1$ , der grösste Abstand zweier successiven Punkte  $= p$ . Es wird die Wahrscheinlichkeit  $w_n(x)$  gesucht, dass

$$p \geq 1 - x$$

sei, wo  $x \leq \frac{1}{2}$  gegeben ist.

Wir nehmen zu den  $n$  Punkten einen  $(n+1)$ ten Punkt  $P$  hinzu und fragen: Wenn für die  $n$  Punkte das leere Intervall  $CD = 1 - x$  ist, wie gross ist nach Zutritt von  $P$  die Wahrscheinlichkeit eines leeren Intervalls  $\geq 1 - y$ , wo  $y \geq x$ ?

Offenbar existirt dasselbe, wenn entweder die Strecke  $CP$  oder die Strecke  $PD < y - x$  ist. Da nun  $AC + DB = x$ , so beträgt die Summe der 2 Weglängen, die  $P$  durchlaufen kann, das ist die Chancen des gedachten Falles,

$$x + 2(y - x) = 2y - x$$

Dieser Wert, wofern er als Factor gebraucht wird, bleibt gültig, wenn  $CD$ , statt genau  $= 1 - x$  zu sein, zwischen  $1 - x$  und  $1 - x - \partial x$

enthalten ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass letzteres stattfindet, ist nach Satz 1.

$$= \partial u_n(x)$$

Combinirt man beide Fälle, so drückt das Product

$$(2y-x) \partial u_n(x)$$

die Wahrscheinlichkeit aus, dass für die  $n$  Punkte

$$1-x \geq p \geq 1-x-\partial x$$

und für die  $n+1$  Punkte das leere Intervall  $\geq 1-y$  ist. Lässt man  $x$  alle möglichen Werte durchlaufen, während  $y$  constant bleibt, und addirt die gesammten Chancen für  $p \geq 1-y$ , so ergibt sich:

$$u_{n+1}(y) = \int_0^y (2y-x) \partial u_n(x) \quad (2)$$

Durch diese recurrirende Gleichung wird die gesuchte Function bestimmt, wenn sie für irgend ein  $n$  bekannt ist.

Nun genügt offenbar derselben die Form

$$u_n(x) = c_n x^{n+\alpha} \quad (3)$$

und zwar ist, da für 0 Punkte die Wahrscheinlichkeit in Gewissheit übergeht,

$$u_0(x) = 1$$

also  $\alpha = 0$ ;  $c_0 = 1$ . Führt man den Wert (3) in (2) ein, so findet man:

$$c_{n+1} y^{n+1} = \frac{n+2}{n+1} c_n y^{n+1}$$

woraus:

$$c_n = \frac{n+1}{n} c_{n-1} = \frac{n+1}{n-1} c_{n-2} = \dots \frac{n+1}{1} c_0 = n+1$$

Demnach ist

$$u_n(x) = (n+1)x^n \quad (4)$$

## Zweite Methode.

Wir betrachten auf  $AB$  eine bestimmte Strecke  $CD = 1-x$ . Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt ausser derselben liegt, gleich dem Reste  $x$ , also die, dass  $n$  Punkte ausserhalb liegen,  $= x^n$ .

Wir verrücken nun  $C$  und  $D$  bei constantem  $CD$   $k$  mal um  $\varepsilon$ , so dass eine Reihe von  $k+1$  gleichen Strecken

$$CD = C_1 D_1 = C_2 D_2 = \dots C_k D_k$$

entsteht. Bezeichnet dann  $v_h$  die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Combination von  $h$  solchen Strecken leer ist, so ist nach Satz 2. die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt eine solche Strecke leer ist,

$$V = \Sigma v_1 - \Sigma v_2 + \Sigma v_3 - \Sigma v_4 + \dots \Sigma v_{k+1} \quad (5)$$

wo sich die Summenzeichen auf alle möglichen Combinationen der Strecken beziehen. Jedes  $v_h$  hängt aber allein vom Gesamtumfang der combinirten Strecken, also von der Differenz des kleinsten und grössten Index ab. Enthält die Combination irgend welche Strecken von der  $a$ ten bis zur  $(a+b)$ ten, so beträgt der Gesamtumfang

$$1 - x + b\varepsilon$$

und man hat:

$$v_h = (x - b\varepsilon)^h$$

Dies ist der gemeinsame Wert von sovielen Termen der Summe  $\Sigma v_h$ , als die zwischenliegenden Reihenglieder mit den Indices

$$a+1, a+2, \dots a+b-1$$

zu  $h-2$  Elementen combinirt werden können; als Binominalcoefficient ausgedrückt ist die Anzahl

$$= (b-1)_{h-2}$$

multiplicirt mit der Anzahl der möglichen  $a$ , das ist

$$k - b + 1$$

Hiernach ist zunächst

$$\Sigma v_1 = (k+1)v_1 = (k+1)x^n$$

indem bei einem einzigen Reihenglied  $b$  nur  $= 0$  sein kann. Die übrigen Teile des Ausdrucks (5) können wir so addiren, dass wir erst  $b$  constant setzen; dann ist

$$(k - b + 1)(x - b\varepsilon)^n$$

gemeinsamer Factor, und dessen Coefficienten

$$-(b-1)_0 + (b-1)_1 - (b-1)_2 + \dots (b-1)_{b-1}$$

geben für  $b > 1$  die Summe 0, während für  $b = 1$  bloss der erste Term  $-1$  bleibt. Folglich ist

$$V = (k+1)x^n - k(x - \varepsilon)^n$$

das ist für unendlich kleines  $\varepsilon$

$$V = x^n + nk\varepsilon x^{n-1} \quad (6)$$

Lässt man nun  $C$  bei constantem  $CD$  die ganze übrige Strecke  $= x$  durch successives Fortrücken durchlaufen, so wird

$$k\varepsilon = x$$

und die Grösse (6) geht über in

$$V = (n+1)x^n$$

Dies ist zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass eine der unendlich vielen gleichen Strecken leer ist. Da sie aber von der Teilungszahl nicht abhängt, so stellt sie auch die Wahrscheinlichkeit irgend einer ebenso langen leeren Strecke überhaupt dar, in Uebereinstimmung mit dem ersten Ergebniss (4).

### Dritte Methode.

Wie im Vorigen gehen wir auch hier von der Bemerkung aus, dass die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten leeren Strecke  $CD = 1 - x$

$$= x^n$$

ist. Die vorhergehende Strecke  $AC$  möge von 0 bis  $y$  variiren können. Dann wächst die Wahrscheinlichkeit der leeren Strecke  $= 1 - x$  stetig mit  $y$ ; es ist das Verhältniss der unendlich kleinen Incremente zu finden.

Die Wahrscheinlichkeit sei  $= w(x, y)$ . Wächst  $y$  um  $\partial y$ , und rückt  $C$  nach  $C'$ , so kommen als Chancen diejenigen Fälle hinzu, wo auf  $CC'$  irgend welche (wir wollen sagen  $m$ ) Punkte liegen, während die Bedingung einer nachfolgenden leeren Strecke  $= 1 - x$  dieselbe bleibt. Da diese Bedingung nur auf  $n - m$  Punkte Bezug hat, so ist die Wahrscheinlichkeit ihrer Erfüllung

$$= x^{n-m}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Punktes auf  $CC'$  ist  $= \partial y$ , die der nachfolgenden leeren Strecke alsdann

$$= x^{n-1}$$

also die der Combination beider Fälle

$$= x^{n-1} \partial y$$

daher nach Satz 3., da alle  $n$  Punkte in gleichem Falle sind, die Zunahme der Chancen der verlangten leeren Strecke

$$\partial w(x, y) = nx^{n-1} \partial y$$

und, da  $y$  überhaupt von 0 bis  $x$  zu variiren hat,

$$w(x, x) - w(x, 0) = \int_0^x nx^{n-1} \partial y = nx^n$$

Nun sind  $w(x, 0)$  und  $w(x, x)$  die Wahrscheinlichkeiten einer leeren Strecke  $CD = 1 - x$  bei festem und beliebigem  $C$ . Erstere ist bekanntermassen  $= x^n$ , letztere die gesuchte Grösse, folglich

$$w_n(x) = (n+1)x^n$$

wie wir hier zum drittenmal finden.

#### Ergänzung.

Die beiden ersten Methoden bauen wiederholt auf die Voraussetzung, dass nicht mehrere leere Strecken  $= 1 - x$  ausser einander existiren. Es ist deshalb  $x < \frac{1}{2}$  angenommen worden. Die dritte Methode ist von dieser Annahme unabhängig; doch bringt sie die Chancen für  $n$  aussereinander liegende leere Strecken  $n$ fach in Anrechnung; nur mit dieser Deutung gilt dann noch die Formel. Die Berechnung der Chancen für die Combinationen von Strecken, welche zu subtrahiren sein würden, damit das Resultat der Aufgabe nach ihrem Wortlaut entspricht, würde äusserst complicirt sein.



## XXXI.

## Untersuchungen über das Dreieck.

Von

Emil Hain.

## I.

## Beziehungen des Umkreises.

1. Bezeichnet  $x_a$  die Normale eines Punktes  $X$  des dem Dreiecke  $ABC$  umschriebenen Kreises auf die Seite  $BC = a$ , so gilt die Relation:

$$ax_bx_c + bx_cx_a + cx_ax_b = 0$$

Ist nun  $P$  ein Punkt in der Ebene des Dreiecks mit den Seitennormalen (trimetrischen Punktcoordinaten)  $p_ap_bp_c$ , und verlängert man  $AP$ , bis der Umkreis zum zweitenmale in  $\mathfrak{P}_a$  getroffen wird; so müssen die Coordinaten von  $\mathfrak{P}_a$  folgenden Gleichungen genügen:

$$ax_bx_c + bx_cx_a + cx_ax_b = 0$$

$$\frac{x_b}{p_b} - \frac{x_c}{p_c} = 0$$

Hieraus erhalten wir die Coordinaten von  $\mathfrak{P}_a$ :

$$\mathfrak{P}_a \equiv -ap_bp_c \quad p_b(bp_c + cp_b) \quad p_c(bp_c + cp_b)$$

und für einen Punkt  $Q \equiv q_a$ :

$$\mathfrak{Q}_a \equiv -aq_bq_c \quad q_b(bq_c + cq_b) \quad q_c(bq_c + cq_b)$$

Die Verbindungsgerade zweier Punkte  $\xi_a, \xi'_a$  hat die Gleichung:

$$\Sigma \begin{vmatrix} \xi_b & \xi'_b \\ \xi_c & \xi'_c \end{vmatrix} x_a = 0$$

Darnach ist:

$$\mathfrak{P}_a \Omega_a \equiv (bp_c + cp_b)(bq_c + cq_b) \quad abp_cq_c \quad acp_bq_b$$

Ist  $\mathfrak{A}$  der Schnittpunkt der  $BC$  mit  $\mathfrak{P}_a \Omega_a$ , so ergibt sich wegen  $BC \equiv 1 \ 0 \ 0$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\equiv 0 \quad acp_bq_b & -abp_cq_c \\ &\equiv 0 \quad c p_b q_b & -b p_c q_c \\ &\equiv 0 \quad c p_b q_b \cdot p_a q_a & -b p_c q_c \cdot p_a q_a \end{aligned}$$

Die  $\mathfrak{A}$  liegen in der Geraden  $ap_bp_cq_bq_c$ , ihr harmonischer Pol in Bezug auf das Urdreieck ist  $Z \equiv bc p_a q_a$ . Dieser Punkt wird sonach auf folgende Weise construiert:

Gegeben das Dreieck  $ABC$ ,  $P \equiv p_a$ ,  $Q \equiv q_a$ .  $AP$ ,  $AQ$  treffen den Umkreis des gegebenen Dreiecks in  $\mathfrak{P}_a$ ,  $\Omega_a$ . Die  $\mathfrak{P}_a \Omega_a$  schneiden die  $BC$  in  $\mathfrak{A}$ . Der vierte harmonische Punkt zu  $\mathfrak{A}$  bezüglich  $BC$  sei  $Z_a$ . Die  $AZ_a$  treffen sich in  $Z \equiv bc p_a q_a$ .

Es ergeben sich nun einige Specialfälle.

Ist  $Q$  der Grebe'sche Punkt  $G$  des Urdreiecks, ist also  $q_a = a$ ; so wird  $Z \equiv bc p_a \cdot a \equiv p_a$  d. h.:

Verzeichnet man über den Seiten eines Dreiecks Quadrate, so bilden die verlängerten äusseren Quadratseiten ein dem ursprünglichen ähnliches Dreieck; der Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke ist der Grebe'sche Punkt. Man verbinde denselben mit den Ecken des Urdreiecks und verlängere diese Ecktransversalen, bis sie den Umkreis zum zweitenmale in  $\mathfrak{G}_a$  schneiden.

$P$  sei ein anderer Punkt des Urdreiecks und  $AP$  treffe den Umkreis noch in  $\mathfrak{P}_a$ . Die  $\mathfrak{P}_a \mathfrak{G}_a$  schneiden die  $BC$  in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen von  $P$  in Bezug auf das Urdreieck.

Im Falle  $p_a = q_a$  fallen  $P$  und  $Q$  zusammen, die Sehne  $\mathfrak{P}_a \Omega_a$  wird Tangente im Punkte  $\mathfrak{P}_a$  und wir haben folgenden Satz:

Ist  $P \equiv p_a$  ein Punkt in der Ebene des Dreiecks  $ABC$  und trifft  $AP$  den Umkreis noch in  $\mathfrak{P}_a$ , so schneiden die Tangenten in  $\mathfrak{P}_a$  an den Umkreis die  $BC$  in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen des Punktes  $Z \equiv bc p_a^2$ . Ist  $P \equiv G$ , so wird auch  $Z \equiv G$ .

Ist  $Q \equiv p_bp_c$ , der reciproke Punkt von  $P$ ; so wird  $Z \equiv bc$ . Ist  $J$  das Inkreiscentrum des Dreiecks  $ABC$ ,  $P$  ein beliebiger Punkt in der Ebene desselben; trifft  $AP$  den Umkreis noch in  $\mathfrak{P}_a$  und construiert man auf der andern Seite von  $AJ$  den Winkel  $\mathfrak{P}_a AJ$ , so dass der neue Schenkel den Umkreis in  $\Omega_a$  trifft: dann schneiden sich die

$AQ_a$  in einem Punkte  $Q$ , dessen Coordinaten denen von  $P$  reciprok sind, also im Punkte  $Q \equiv p_b p_c$ . In diesem Falle sind die  $\mathfrak{P}_a Q_a$ , wie auch unmittelbar die Figur zeigt, den  $BC$  parallel.

2. Es ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_b &\equiv p_a(c p_a + a p_c) & -b p_c p_a & & p_c(c p_a + a p_c) \\ \mathfrak{P}_c &\equiv p_a(a p_b + b p_a) & p_b(a p_b + b p_a) & -c p_a p_b \\ \mathfrak{P}_b \mathfrak{P}_c &\equiv -a p_b p_c & p_a(a p_c + c p_a) & p_a(a p_b + b p_a)\end{aligned}$$

$AP$  treffe  $BC$  in  $P_a$ , dann ist:

$$\begin{aligned}P_a &\equiv 0 & p_b & p_c \\ P_b &\equiv p_a & 0 & p_c \\ P_c &\equiv p_a & p_b & 0 \\ P_b P_c &\equiv -p_b p_c & p_c p_a & p_a p_b\end{aligned}$$

Die  $\mathfrak{P}_b \mathfrak{P}_c$  treffen die  $P_b P_c$  in  $\mathfrak{A}'$ . Man findet:

$$\begin{aligned}\left| \begin{array}{cc} p_a p_c & p_a p_b \\ p_a(a p_c + c p_a) & p_a(a p_b + b p_a) \end{array} \right| &= p_a^3(b p_c - c p_b) \\ \left| \begin{array}{cc} p_a p_b & -p_b p_c \\ p_a(a p_b + b p_a) & -a p_b p_c \end{array} \right| &= b p_a^2 p_b p_c \\ \left| \begin{array}{cc} -p_b p_c & p_a p_c \\ -a p_b p_c & p_a(a p_c + c p_a) \end{array} \right| &= -c p_a^2 p_b p_c \\ \mathfrak{A}' &\equiv p_a(b p_c - c p_b) & b p_b p_c & -c p_b p_c \\ A\mathfrak{A}' &\equiv 0 & c & b\end{aligned}$$

Diese Gerade trifft die  $BC$  im Punkte:  $0 \quad b \quad -c$ . Diese Punkte liegen in der Geraden  $bc$ , der Harmonikalen des Grebe'schen Punktes. Wir haben also den Satz:

Ist  $P$  ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreiecks  $ABC$ , trifft  $AP$  die  $BC$  in  $P_a$ , den Umkreis noch in  $\mathfrak{P}_a$  und schneiden die  $\mathfrak{P}_b \mathfrak{P}_c$  die  $P_b P_c$  in  $\mathfrak{A}'$ ; so liegen die Schnittpunkte der  $A\mathfrak{A}'$  mit den  $BC$  in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen des Grebe'schen Punktes.

3.  $AP$  treffe  $BC$  in  $P_a$ ,  $\Pi_a$  trenne  $BC$  harmonisch von  $P_a$ . Dann ist:

$$\Pi_a \equiv 0 \quad p_b \quad -p_c$$

$A\Pi_a$  schneide den Umkreis zum zweitenmale in  $\mathfrak{P}_a'$ . Die Coordinaten dieses Punktes sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\Sigma a x_b x_c = 0, \quad p_c x_b + p_b x_c = 0$$

Wir bekommen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_a' &\equiv ap_b p_c - p_b(bp_c - cp_b) & p_c(bp_c - cp_b) \\ \mathfrak{P}_a \mathfrak{P}_a' &\equiv \Delta_a & \Delta_b & \Delta_c \end{aligned}$$

Die  $\Delta$  sind der Reihe nach:

$$\begin{vmatrix} p_b(bp_c + cp_b) & p_c(bp_c + cp_b) \\ -p_b(bp_c - cp_b) & p_c(bp_c - cp_b) \end{vmatrix} = 2p_b p_c (b^2 p_c^2 - c^2 p_b^2)$$

$$\begin{vmatrix} p_c(bp_c + cp_b) & -ap_b p_c \\ p_c(bp_c - cp_b) & +ap_b p_c \end{vmatrix} = 2ab p_b p_c^3$$

$$\begin{vmatrix} -ap_b p_c & p_b(bp_c + cp_b) \\ +ap_b p_c & -p_b(bp_c - cp_b) \end{vmatrix} = -2ac p_b^3 p_c$$

Somit ist:

$$\mathfrak{P}_a \mathfrak{P}_a' \equiv b^2 p_c^2 - c^2 p_b^2 \quad ab p_c^2 \quad -ac p_b^2$$

Die  $\mathfrak{P}_a \mathfrak{P}_a'$  treffen  $BC$  in:

$$\mathfrak{A}'' \equiv 0 \quad ac p_b^2 \quad ab p_c^2$$

Die  $\mathfrak{A}''$  schneiden sich im Punkte  $bc p_a^2$ . Die Construction dieses Punktes ist also folgende:

$AP$  ( $P \equiv p_a$ ) treffe den Umkreis noch in  $\mathfrak{P}_a$ .  $\mathfrak{P}_a'$  sei ein solcher Punkt des Kreisumfanges, dass  $A\mathfrak{P}_a'$  den Winkel  $BAC$  mit  $A\mathfrak{P}_a$  harmonisch teilt. Die  $\mathfrak{P}_a \mathfrak{P}_a'$  treffen die  $BC$  in  $\mathfrak{A}''$  und die  $\mathfrak{A}''$  begegnen sich im Punkte  $bc p_a^2$ .

4. Es ist:

$$\begin{aligned} P_a \mathfrak{P}_a' &\equiv 2(bp_c - cp_b) & ap_c & -ap_b \\ \Pi_a \mathfrak{P}_a &\equiv 2(bp_c + cp_b) & ap_c & ap_b \end{aligned}$$

Man findet, dass sich diese beiden Geraden im Punkte

$$\mathfrak{A}''' \equiv -a \quad 2b \quad 2c$$

treffen. Nun ist:  $\mathfrak{A}''' \equiv 0 \quad c \quad -b$ . Die  $\mathfrak{A}'''$  schneiden sich also im Grebe'schen Punkte. Der so erhaltene Satz lautet:

Ist  $P$  ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks  $ABC$ , trifft  $AP$  die  $BC$  in  $P_a$ , trennt  $\Pi_a$  die  $BC$  harmonisch von  $P_a$  und schneiden  $AP_a$ ,  $A\Pi_a$  den Umkreis noch in  $\mathfrak{P}_a$ ,  $\mathfrak{P}_a'$ ; so begegnen sich die  $P_a \mathfrak{P}_a'$ ,  $\Pi_a \mathfrak{P}_a$  in  $\mathfrak{A}'''$  und die  $\mathfrak{A}'''$  im Grebe'schen Punkt.

5. Die  $\mathfrak{P}_b \mathfrak{P}_c$  schneiden die  $BC$  in Punkten einer Geraden, welche die Form  $bp_c + cp_b$  hat, also mit der Umkreispolare des Punktes  $P \equiv p_a$  zusammenfällt. Wir wollen nun die Schnittpunkte der  $\mathfrak{P}_b' \mathfrak{P}_c'$  mit  $BC$  bestimmen. Es ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_b' &\equiv p_a(cp_a - ap_c) & bpcp_a & & -pc(cp_a - ap_c) \\ \mathfrak{P}_c' &\equiv -p_a(ap_b - bp_a) & pb(ap_b - bp_a) & & cp_ap_b \\ \mathfrak{P}_b' \mathfrak{P}_c' &\equiv \Delta_a & \Delta_b & & \Delta_c\end{aligned}$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} bpcp_a & -pc(cp_a - ap_c) \\ pb(ap_b - bp_a) & cp_ap_b \end{vmatrix}$$

$$= ap_bp_c(cp_ap_b + bpcp_a - ap_bp_c)$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} -pc(cp_a - ap_c) & p_a(cp_a - ap_c) \\ cp_ap_b & -p_a(ap_b - bp_a) \end{vmatrix}$$

$$= -p_a(cp_a - ap_c)(cp_ap_b + bpcp_a - ap_bp_c)$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} p_a(cp_a - ap_c) & bpcp_a \\ -p_a(ap_b - bp_a) & pb(ap_b - bp_a) \end{vmatrix}$$

$$= p_a(ap_b - bp_a)(cp_ap_b + bpcp_a - ap_bp_c)$$

Also ist:

$$\mathfrak{P}_b' \mathfrak{P}_c' \equiv ap_bp_c - p_a(cp_a - ap_c) \quad p_a(ap_b - bp_a)$$

Die  $\mathfrak{P}_b' \mathfrak{P}_c'$  trifft die  $BC$  in:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &\equiv 0 \quad ap_b - bp_a & cp_a - ap_c \\ &\equiv 0 \quad (bp_c - cp_b)(bp_a - ap_b) & (cp_a - ap_c)(cp_b - bp_c)\end{aligned}$$

Die  $\mathfrak{A}_1$  schneiden sich im Punkte  $(ap_b - bp_a)(ap_c - cp_a)$ , dem harmonischen Pol der Geraden, welche den Grebe'schen Punkt mit  $P$  verbindet.

6. Es ist:

$$\begin{aligned}B\mathfrak{P}_c &\equiv cp_ap_b & 0 & & p_a(ap_b + bp_a) \\ C\mathfrak{P}_b &\equiv bpcp_a & p_a(cp_a + ap_c) & & 0\end{aligned}$$

Diese beiden Geraden treffen sich in:

$$\mathfrak{A}_2 \equiv -(ap_b + bp_a)(cp_a + ap_c) \quad bpc(ap_b + bp_a) \quad cp_b(cp_a + ap_c)$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{A}_2 \equiv 0 \quad cp_b(cp_a + ap_c) \quad -bpc(ap_b + bp_a)$$

Die  $\mathfrak{A}_2$  treffen sich im Punkte  $R \equiv ap_bp_c(ap_b + bp_a)(ap_c + cp_a)$ . Derselbe wird somit auf folgende Weise construirt:

$AP$  ( $P \equiv p_a$ ) trifft den Umkreis des Urdreiecks noch in  $\mathfrak{P}_a$ . Die  $B\mathfrak{P}_c$ ,  $C\mathfrak{P}_b$  schneiden sich in  $\mathfrak{A}_2$ , die  $\mathfrak{A}_2$  in  $R$ .

Ferner ist:

$$\begin{aligned} B\mathfrak{P}_c' &\equiv cp_a p_b & 0 & & p_a(ap_b - bp_a) \\ C\mathfrak{P}_b' &\equiv bp_c p_a & -p_a(cp_a - ap_c) & 0 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist:

$$\mathfrak{A}_3 \equiv (cp_a - ap_c)(ap_b - bp_a) \quad bp_c(ap_b - bp_a) \quad -cp_b(cp_a - ap_c)$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned} A\mathfrak{A}_3 &\equiv 0 \quad cp_b(cp_a - ap_c) \quad bp_c(ap_b - bp_a) \\ &\equiv 0 \quad q_c & q_b \\ q_a &= ap_b p_c (ap_b - bp_a) (ap_c - cp_a) \end{aligned}$$

Die  $A\mathfrak{A}_3$  treffen die  $BC$  in den Punkten:  $0 \quad q_b \quad -q_c$ , welche in der Geraden  $q_b q_c$ , der Harmonikalen des Punktes  $q_a$ , liegen. Der Punkt  $Q \equiv q_a$  wird also auf folgende Weise construiert:

Die Harmonikale von  $P \equiv p_a$  treffe  $BC$  in  $\Pi_a$ .  $A\Pi_a$  schneide den Umkreis noch in  $\mathfrak{P}_a'$ . Die  $B\mathfrak{P}_c'$ ,  $C\mathfrak{P}_b'$  ergeben den Schnittpunkt  $\mathfrak{A}_3$ . Die  $A\mathfrak{A}_3$  treffen die  $BC$  in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen von  $Q$ .

7. Trifft der zum Strahl  $AQ$  ( $Q \equiv q_a$ ) bezüglich  $AB$ ,  $AC$  vierte harmonische Strahl den Umkreis in  $\mathfrak{Q}_a'$ , so ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_a' &\equiv a q_b q_c & -q_b(b q_c - c q_b) & q_c(b q_c - c q_b) \\ \mathfrak{P}_a' \mathfrak{Q}_a' &\equiv (bp_c - cp_b)(b q_c - c q_b) & ab p_c q_c & ac p_b q_b \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\mathfrak{P}_a \mathfrak{Q}_a \equiv (bp_c + cp_b)(b q_c + c q_b) \quad ab p_c q_c \quad ac p_b q_b$$

Hieraus folgt, dass  $\mathfrak{P}_a' \mathfrak{Q}_a'$  und  $\mathfrak{P}_a \mathfrak{Q}_a$  die  $BC$  in demselben Punkte treffen.

Sind also  $P$ ,  $Q$  zwei beliebige Punkte und treffen  $AP$ ,  $AQ$  den Umkreis noch in  $\mathfrak{P}_a$ ,  $\mathfrak{Q}_a$ ; schneiden ferner die zu  $AP$ ,  $AQ$  bezüglich  $AB$ ,  $AC$  vierten harmonischen Strahlen den Umkreis in  $\mathfrak{P}_a'$ ,  $\mathfrak{Q}_a'$ : so begegnen sich die  $\mathfrak{P}_a \mathfrak{Q}_a$ ,  $\mathfrak{P}_a' \mathfrak{Q}_a'$ ,  $BC$  in denselben Punkten und zwar in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen des Punktes  $bc p_a q_a$ .

## II.

### Der Steiner'sche Kegelschnitt zweier Punkte.

Sind  $P$ ,  $Q$  Punkte in der Ebene eines Dreiecks  $ABC$ ; treffen die Geraden  $PA$ ,  $QA$  die  $BC$  in  $P_a$ ,  $Q_a$ : so liegen nach Steiner die Punkte  $P_a$ ,  $Q_a$  auf einem Kegelschnitt. Er hat die Gleichung:

$$\Sigma p_b q_b p_c q_c x_a^2 - \Sigma p_a q_a (p_b q_c + p_c q_b) x_b x_c = 0$$

wie die Einsetzung der Coordinatenwerte

$$P_a \equiv 0 \quad p_b \quad p_c$$

$$Q_a \equiv 0 \quad q_b \quad q_c$$

bestätigt, wenn

$$P \equiv p_a \quad p_b \quad p_c$$

$$Q \equiv q_a \quad q_b \quad q_c$$

Die Polare eines Punktes  $\xi$  in Bezug auf einen Kegelschnitt  $S$  hat die Form:  $\partial S: \partial \xi_a$ , wenn in  $S$  für die  $x$  die  $\xi$  gesetzt werden. Hier ist:

$$\partial S: \partial \xi_a = 2p_b q_b p_c q_c \xi_a - p_c q_c (p_a q_b + p_b q_a) \xi_b - p_b q_b (p_a q_c + p_c q_a) \xi_c$$

Die Polare von  $P$  hat also die Form:

$$\begin{aligned} 2p_b q_b p_c q_c p_a - p_c q_c (p_a q_b + p_b q_a) p_b - p_b q_b (p_a q_c + p_c q_a) p_c \\ \equiv q_a p_b p_c (p_b q_c + p_c q_b) \end{aligned}$$

Ebenso ist die Polare von  $Q$  die Gerade:

$$p_a q_b q_c (p_b q_c + p_c q_b)$$

Die Polaren von  $P, Q$  treffen sich in:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} q_b p_c p_a (p_c p_a + p_a q_c) & p_b q_c q_a (p_c q_a + p_a q_c) \\ q_c p_a p_b (p_a q_b + p_b q_a) & p_c q_a q_b (p_a q_b + p_b q_a) \end{vmatrix} \\ \equiv p_a q_a (p_c q_a + p_a q_c) (p_a q_b + p_b q_a) (p_c^2 q_b^2 - p_b^2 q_c^2) \\ \equiv p_a q_a (p_b q_c - p_c q_b) \end{aligned}$$

Die Harmonikalen von  $P, Q$  sind die Geraden:  $p_b p_c, q_b q_c$ . Ihr Schnittpunkt hat die Form:

$$\begin{vmatrix} p_c p_a & q_c q_a \\ p_a p_b & q_a q_b \end{vmatrix} = p_a q_a (p_c q_b - p_b q_c)$$

Wir haben also den Satz:

Werden zwei beliebige Punkte in der Ebene eines Dreiecks mit dessen Ecken verbunden, so treffen diese Ecktransversalen die Gegenseiten in sechs Punkten eines Kegelschnittes, in Bezug auf welchen die Polaren der beiden Punkte sich mit ihren Harmonikalen in demselben Punkte treffen.

Setzen wir in der Gleichung:

$$\Sigma p_b q_b p_c q_c x_a^2 - \Sigma p_a q_a (p_b q_c + p_c q_b) x_b x_c = 0$$

$x_a = p_a$ , so bekommen wir:

$$\Sigma p_a q_b q_c = 0$$

Liegt also von zwei Punkten der eine auf der Harmonikale des andern, so liegt jener auch auf der Peripherie des Steiner'schen Kegelschnittes der beiden Punkte.

Der Kegelschnitt:  $\Sigma p_a x_b x_c = 0$  ist dem Urdreieck umschrieben. Die Tangenten in  $A$  schneiden die  $BC$  in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen (geraden Polaren) des Punktes  $P$ . Man nennt diesen Kegelschnitt die konische Polare von  $P$  in Bezug auf das Dreieck  $ABC$ . Wir können also auch sagen:

Der Steiner'sche Kegelschnitt eines Punktes und irgend eines Peripheriepunktes seiner konischen Polare in Bezug auf das Urdreieck geht durch jenen Punkt selbst.

Da  $G \equiv a$  der Grebe'sche Punkt und  $\Sigma a x_b x_c = 0$  die Gleichung des Umkreises ist, so hat man den Specialfall:

Der Steiner'sche Kegelschnitt des Grebe'schen Punktes und eines Peripheriepunktes des Umkreises geht durch den Grebe'schen Punkt.

### III.

#### Ueber den Polarkreis.

Sind  $x_a$  die Normalen eines Punktes  $X$  auf die Seiten  $BC = a$  des Dreiecks  $ABC$ , so liegt  $X$  auf der Peripherie eines Kegelschnittes, wenn:

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Derselbe ist ein Kreis, sobald

$$b^2 g_{cc} + c^2 g_{bb} - 2bc g_{bc} = G = \text{const}$$

und entspricht dem Fundamentaldreieck polar, wenn die  $g_{bc}$  verschwinden.

Wir haben sonach, um die Gleichung des Polarkreises für das Dreieck  $ABC$  zu bilden, folgende Gleichungen aufzulösen:

$$c^2 g_{bb} + b^2 g_{cc} = G$$

$$c^2 g_{aa} + a^2 g_{cc} = G$$

$$b^2 g_{aa} + a^2 g_{bb} = G$$

Wir erhalten:

$$g_{aa} \equiv \begin{vmatrix} 1 & c^2 & b^2 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\equiv a^2(b^2 + c^2 - a^2) \equiv a \cos \alpha$$



wenn wir mit  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel des Urdreiecks bezeichnen. Die Gleichung des Polarkreises lautet also:

$$\Sigma a \cos \alpha x_a^2 = 0$$

Die Polare des Punktes  $\xi$  in Bezug auf diesen Kreis hat die Form:

$$\frac{\partial \Sigma a \cos \alpha \xi_a^2}{\partial \xi_a} \equiv a \cos \alpha \xi_a$$

Für  $\xi_a = \cos \beta \cos \gamma$  erscheint die Polare im Unendlichen. Sonach ist der Höhenschnitt des Urdreiecks der Mittelpunkt des Polarkreises.

Um den Radius zu finden, benutzen wir die Formel, welche den Abstand eines Punktes  $p_a$  von der Geraden:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

gibt. Das Quadrat dieses Abstandes ist:

$$\frac{(a_1 p_a + b_1 p_b + c_1 p_c)^2}{\Sigma a_1^2 - 2 \Sigma b_1 c_1 \cos \alpha}$$

Nun sei  $\xi$  ein Punkt des Polarkreises, dann ist seine Tangente die Gerade:

$$a \cos \alpha \xi_a x_a + b \cos \beta \xi_b x_b + c \cos \gamma \xi_c x_c = 0$$

Für dieselbe ist:

$$\Sigma a_1^2 - 2 \Sigma b_1 c_1 \cos \alpha = \Sigma a^2 \cos^2 \alpha \xi_a^2 - 2 \Pi \cos \alpha \Sigma bc \xi_b \xi_c$$

Die Seitennormalen des Höhenschnittes sind:  $2r \cos \beta \cos \gamma$ , wo  $r$  den Radius des Umkreises bezeichnet. Also ist das Quadrat des Halbmessers des Polarkreises der Ausdruck:

$$\frac{4r^2 \Pi \cos^2 \alpha (\Sigma a^2 \xi_a^2 + 2 \Sigma bc \xi_b \xi_c)}{\Sigma a^2 \cos^2 \alpha \xi_a^2 - 2 \Pi \cos \alpha \Sigma bc \xi_b \xi_c}$$

Der Quotient:

$$\varepsilon = [\Sigma a^2 \cos^2 \alpha \xi_a^2 - 2 \Pi \cos \alpha \Sigma bc \xi_b \xi_c] : [\Sigma a^2 \xi_a^2 + 2 \Sigma bc \xi_b \xi_c]$$

muss von den  $\xi$  unabhängig sein; bei der directen Division hat man sonach zu beachten, dass

$$\Sigma a \cos \alpha \xi_a^2 = 0$$

Man findet dann:

$$\varepsilon = - \Pi \cos \alpha$$

Die indirecte Rechnung gibt:

$$\begin{aligned} & (\Sigma a^2 \xi_a^2 + 2 \Sigma bc \xi_b \xi_c) \times - \Pi \cos \alpha \\ &= - \Pi \cos \alpha \Sigma a^2 \xi_a^2 - 2 \Pi \cos \alpha \Sigma bc \xi_b \xi_c \end{aligned}$$

Addiren wir rechts den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{F}{r} \sum a \cos \alpha \xi_a^2 &= 0 \\ &= \sum \frac{F}{ar} a^2 \cos \alpha \xi_a^2 \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &(\sum a^2 \xi_b \xi_c + 2 \sum bc \xi_b \xi_c) \times -II \cos \alpha \\ &= -II \cos \alpha \sum a^2 \xi_a^2 + \sum (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma) a^2 \cos \alpha \xi_a^2 - 2II \cos \alpha \sum bc \xi_b \xi_c \\ &= \sum a^2 \cos^2 \alpha \xi_a^2 - 2II \cos \alpha \sum bc \xi_b \xi_c \end{aligned}$$

Der Radius des Polarkreises ist somit:

$$2r \sqrt{-II \cos \alpha}$$

Daraus, wie aus der Gleichung für den Polarkreis ergibt sich, dass derselbe für ein spitzwinkliges Dreieck imaginär wird.

Wien, November 1877.

## XXXII.

**Magnetische Influenzversuche.**

Von

**Ludwig Külp.****a) Zur magnetischen Induction weicher Eisenkerne.**

Wenn eine unipolare magnetische Intensität durch „Influenz“ Magnetismus in weichem Eisen erregt, so entsteht die Frage: ist die magnetische Intensität an dem Ende des Eisenkernes, welcher nicht mit dem Influenzpole in Berührung steht, gleich gross mit der inducirten magnetischen Intensität, im Falle das weiche Eisen aus einem Stücke oder aus mehreren gleichen Stücken zu gleicher Länge zusammengesetzt wird. Mit Hülfe der „magnetischen Compensationsmethode“ \*) stellte ich hierüber Versuche mit prismatischen und runden Eisenstücken an, und brachte meine Resultate in der Tabelle P zur näheren Einsicht.

---

\*) Vergl. Poggendorff's Ann. Bd. CXXXIII. u. CXXXV. und Grunert's Archiv. T. 52. u. 53.

Tabelle P.

Abstände der Normal- lamelle in cm.	Abstände der Kernpole in cm.			Relative Intensitäten an den Kernpolen.	
	Zahl der angestosse- nen Kerne.	An einem Stücke.	Dieselbe Länge in mehreren gleichen Stücken.	An einem Stücke.	Dieselbe Länge in mehreren gleichen Stücken.

## Prismatische Eisenkerne.

33.	0.	46.	—	1,94 m.	—
35,1.	1.	46.	—	1,71 m.	—
37,2.	2.	46.	46.	1,53 m.	1,53 m.
39,3.	3.	46.	46.	1,37 m.	1,37 m.
41,4 u. 41 (4 Stücke).	4.	46.	46.	1,23 m. u. 1,25 m.	1,23 m. u. 1,25 m.

## Runde Eisenkerne.

33.	0.	46.	—	1,94 m.	—
35,5.	1.	46.	—	1,67 m.	—
36,9.	2.	46.	46.	1,54 m.	1,54 m.
39,4.	3.	46.	46.	1,36 m.	1,36 m.
41,6.	4.	46.	46.	1,22 m.	1,22 m.

Unter Beachtung obiger Tabelle ergibt sich der Schluss:

Werden prismatische oder runde Eisenkerne in einem Stücke oder in mehreren gleichen Stücken zu gleicher Länge an eine unipolare magnetische Intensität angelegt, so ist die magnetische Intensität (der inducirte Magnetismus) am Ende des Eisens, das mit dem Influenzpole nicht in Berührung steht, in beiden Fällen einander gleich.

Doch ist zu bemerken, dass die Kerne, welche zum Anstosse kamen, an ihren Enden gut eben geschliffen wurden.

**b) Intensitätsänderungen einer unipolaren nicht gesättigten magnetischen Intensität durch Anlegen von weichem Eisen.**

Wenn die Pole eines langen Magnetstabes, welcher magnetisch nicht gesättigt ist, durch Anlegen von weichem Eisen beschäftigt werden, so ist zu untersuchen, welche Aenderungen der eine Pol d. h. seine unipolare magnetische Intensität erleidet, wenn Anlegungen von weichem Eisen stattfinden. Versuche in diesem Sinne habe ich vorgenommen und meine Resultate in der Tabelle Q zusammengestellt.

**Tabelle Q.**

Die Arten der Beschäftigung durch weiches Eisen.	Abstände des Versuchsstabes in cm.	Abstände des Normalstabes in cm.	Intensitäten des Versuchsstabes.
Beide Pole des Versuchsstabes sind unbeschäftigt.	46.	41,8.	1,21 m.
Der abgekehrte (2te) Pol wird beschäftigt.	46.	40,5.	1,29 m.
Der erste Pol wird allein beschäftigt.	46.	43,7.	1,10 m.
Beide Pole werden beschäftigt.	46.	42,4.	1,17 m.

Die Tabelle liefert nachstehende Schlüsse:

1. Wird der Pol eines langen und ungesättigten Magnetstabes, welcher der Nadel abgekehrt ist, durch weiches Eisen beschäftigt, so wird die magnetische Intensität des der Nadel zugekehrten Poles dadurch etwas grösser.

2. Wird auch der Pol, welcher der Nadel zugekehrt ist, nun selbst auf der andern Seite beschäftigt, so wird seine unipolare magnetische Intensität dadurch geringer, und zwar schwächer, als die magnetische Intensität es anfänglich war.

3. Wird alsdann der abgekehrte Pol der Nadel zugleich wieder mitbeschäftigt, so wird die magnetische Intensität des zugekehrten Poles wieder etwas stärker, doch bleibt die Intensität geringer, wie in dem Falle, wenn beide Pole durch weiches Eisen unbeschäftigt sind.

4. Die magnetische Intensität des der Nadel zugekehrten Poles ist am stärksten, wenn der abgekehrte Pol allein durch weiches Eisen beschäftigt wird.

5. Die betreffende magnetische Intensität ist am kleinsten, wenn der der Nadel zugekehrte Pol allein durch Eisen auf der andern Seite beschäftigt wird.

6. Die ursprüngliche magnetische Intensität des Poles (bei keiner Beschäftigung durch weiches Eisen) ist geringer, als die magnetische Intensität, wenn der abgekehrte Pol der Nadel allein, durch weiches Eisen beschäftigt wird.

7. Die magnetische Intensität des Poles, im Falle beide durch weiches Eisen beschäftigt werden, liegt zwischen den magnetischen Intensitäten unter 5. und 6.

---

**c) Ueber Intensitätsänderungen des inducirten Magnetismus in weichen Eisenkernen.**

Weiter wird untersucht, wie die unipolare magnetische Intensität an dem Ende eines weichen Eisenkernes sich ändert, im Falle Magnetismus durch „Influenz“ in demselben erregt, und die Pole des Influenzstabes, entweder nur ein Pol oder beide Pole durch weiches Eisen beschäftigt werden. In diesem Sinne habe ich gleichfalls die kommenden Versuche ausgeführt und die erhaltenen Resultate in der folgenden Tabelle R zusammengestellt.

Tabelle R.

Die Arten der Beschäftigung des Verteilungsstabes.	Abstände des Kernendes in cm.	Abstände des Normalstabes in cm.	Intensitäten an dem Kernende, in dem Magnetismus inducirt wird.
Die Pole des Verteilungsstabes sind unbeschäftigt.	Abstand des Verteilungsstabes. 30.	26,1.	1,32 m.
Die Pole unbeschäftigt; Verteilung findet statt.	30.	31,6.	0,90 m.
Der 2te Pol wird beschäftigt; Influenz findet statt.	30.	31,2.	0,92 m.
Der 1te Pol (Influenzpol) wird beschäftigt; Influenz findet statt.	30.	32,9.	0,82 m.
Beide Pole werden beschäftigt; Influenz findet statt.	30.	32,5.	0,85 m.

Die aus vorstehender Tabelle zu ziehenden Schlüsse sind die folgenden:

1. Wirkt der eine Pol magnetisch verteilend (inducirend) auf weiches Eisen, und der andre (2te) Pol wird durch Anlegen von weichem Eisen beschäftigt (d. h. dass er auch magnetisch verteilend wirkt), so wird die magnetische Intensität am Kernende grösser, wie in dem Falle, wenn der 2te Pol unbeschäftigt ist.

2. Wird der Verteilungspol selbst, jedoch auf der andern Seite durch weiches Eisen beschäftigt, so wird die magnetische Intensität am Kernende wieder etwas kleiner als unter 1.

3. Werden endlich beide Pole durch weiches Eisen beschäftigt, so wird die magnetische Intensität am Kernende wieder etwas grösser, und zwar ist die magnetische Intensität alsdann stärker als unter 2.

4. Die magnetischen Intensitäten am Kernende unter 1., 2. und 3. sind jedoch kleiner, als die ursprüngliche magnetische Intensität des Influenzpoles.

5. Von den magnetischen Intensitäten am Kernende unter 1., 2. und 3. ist die magnetische Intensität unter 1. am grössten, und auch noch grösser als die Intensität, wenn der eine Pol des Influenzstabes nur verteilend, der andre (2te) Pol aber unbeschäftigt ist.

#### d) Der inducirte Magnetismus bei zugespitzten Eisenkernen.

Auch möchte ich die Frage beantworten, wie die inducirten magnetischen Intensitäten an den Enden weicher Eisenkerne sich ändern, wenn Magnetismus in denselben inducirt, und die Enden der verschiedenen Eisenkerne nur auf der einen Seite mehr oder weniger zugespitzt werden. Die Resultate meiner Versuche, welche ich gleichfalls in dieser Richtung erhalten, gibt die kommende Tabelle S, doch ist zu bemerken, dass die Spitzen der Kerne stets mit dem Influenzpole in Berührung kamen.

Tabelle S.

Die Arten der Kerne in Bezug der Zuspitzung.	Abstände der Kernenden in cm.	Abstände des Normalstabes in cm.	Intensitäten an den Kernenden.
Kein Konus.	46.	36,1.	1,62 m.
Sehr schwacher Konus an dem einen Ende.	46.	36,2.	1,53 m.
Schwacher Konus.	46.	36,2.	1,53 m.
Starker Konus.	46.	36,3.	1,53 m.
Sehr starker Konus.	46.	36,8.	1,56 m.



Die zu ziehenden Schlüsse sind die folgenden:

1. Wird in einem weichen Eisenkerne Magnetismus durch eine unipolare magnetische Intensität inducirt, und das Kernende — was den Pol berührt — hat keine Zuspitzung, so ist in diesem Falle die inducirte magnetische Intensität am andern Ende desselben, am grössten.

2. Finden Zuspitzungen an den einen Enden der Kerne statt, so sind die magnetischen Intensitäten unter gleichen Umständen etwas kleiner als unter 1. unter sich — wie die Tabelle zeigt — aber gleich.

3. Ist dagegen das eine Kernende, das den Pol berührt, eine Spitze, so ist die magnetische Intensität am andern Kernende etwas grösser, wie die inducirte Intensität unter 2., aber kleiner jedoch, wie die magnetische Intensität unter 1.



## XXXIII.

## Miscellen.

## 1.

## Producte einiger Factorenreihen.

Ist:

$$\sum_1^n f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n-2) + f(n-1) + f(n)$$

so ist:

$$\sum_1^n f(x-1) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-3) + f(n-2) + f(n-1)$$

also:

$$\sum_1^n f(x) - \sum_1^n f(x-1) = f(n) - f(0)$$

Und weil:

$$\begin{aligned} \sum_1^n [f(x) - f(x-1)] &= [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] \\ &+ [f(4) - f(3)] + \dots + [f(n-2) - f(n-3)] + [f(n-1) - f(n-2)] \\ &+ [f(n) - f(n-1)] = [f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)] - [f(0) + f(1) + f(2) \\ &+ \dots + f(n-1)] = \sum_1^n f(x) - \sum_1^n f(x-1) \end{aligned}$$

daher:

$$\sum_1^n [f(x) - f(x-1)] = f(n) - f(0) \quad (\text{I})$$

Für  $n = \infty$ 

$$\sum_1^\infty [f(x) - f(x-1)] = \lim f(n) - f(0) \quad (\text{II})$$

Nach diesen allgemeineren Summenformeln, erhalten wir leicht die Producten der folgenden Factorenreihen:

a) Ist:

$$\begin{array}{l|l} f(x) = \log \frac{\sin 2^x \alpha}{2^x} & f(n) = \log \frac{\sin 2^n \alpha}{2^n} \\ f(x-1) = \log \frac{\sin 2^{x-1} \alpha}{2^{x-1}} & f(0) = \log \sin \alpha \end{array}$$

so ist:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= \log \frac{\sin 2^x \alpha}{2^x} - \log \frac{\sin 2^{x-1} \alpha}{2^{x-1}} = \log \frac{2^{x-1} \sin 2^x \alpha}{2^x \sin 2^{x-1} \alpha} \\ &= \log \frac{\sin 2^x \alpha}{2 \sin 2^{x-1} \alpha} = \log \frac{2 \sin 2^{x-1} \alpha \cdot \cos 2^{x-1} \alpha}{2 \sin 2^{x-1} \alpha} = \log \cos 2^{x-1} \alpha. \end{aligned}$$

Die Summirungsformel (I) giebt nun:

$$\sum_1^n \log \cos 2^{x-1} \alpha = \log \frac{\sin 2^n \alpha}{2^n} - \log \sin \alpha = \log \frac{\sin 2^n \alpha}{2^n \sin \alpha}$$

oder:

$$\begin{aligned} &\log \cos \alpha + \log \cos 2\alpha + \log \cos 4\alpha + \log \cos 8\alpha + \dots \\ &\quad + \log \cos 2^{n-1} \alpha = \log \frac{\sin 2^n \alpha}{2^n \sin \alpha} \end{aligned}$$

daher:

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha \dots \cos 2^{n-1} \alpha = \frac{\sin 2^n \alpha}{2^n \sin \alpha} \quad (1)$$

Und weil

$$\lim \frac{\sin 2^n \alpha}{2^n} = 0$$

so ergibt sich:

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha \dots = 0 \quad (2)$$

b) Setzt man:

$$\begin{array}{l|l} f(x) = \log 2^x \sin \frac{\alpha}{2^x} & f(n) = \log 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \\ f(x-1) = \log 2^{x-1} \sin \frac{\alpha}{2^{x-1}} & f(0) = \log \sin \alpha \end{array}$$

so ist:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= \log 2^x \sin \frac{\alpha}{2^x} - \log 2^{x-1} \sin \frac{\alpha}{2^{x-1}} = \log \frac{2^x \sin \frac{\alpha}{2^x}}{2^{x-1} \sin \frac{\alpha}{2^{x-1}}} \\ &= \log \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2^x}}{\sin \frac{\alpha}{2^{x-1}}} = \log \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2^x}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^x} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^x}} = -\log \cos \frac{\alpha}{2^x} = \log \sec \frac{\alpha}{2^x} \end{aligned}$$

Wendet man die Summirungsformel (I) an, so erhält man:

$$\sum_1^n \log \cos \frac{\alpha}{2^x} = - \sum_1^n \log \sec \frac{\alpha}{2^x} = \log \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$$

das ist:

$$\log \cos \frac{\alpha}{2} + \log \cos \frac{\alpha}{4} + \log \cos \frac{\alpha}{8} + \dots + \log \cos \frac{\alpha}{2^n} = \log \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$$

$$\log \sec \frac{\alpha}{2} + \log \sec \frac{\alpha}{4} + \log \sec \frac{\alpha}{8} + \dots + \log \sec \frac{\alpha}{2^n} = \log \frac{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}{\sin \alpha}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \cdot \cos \frac{\alpha}{16} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} &= \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} \\ \sec \frac{\alpha}{2} \cdot \sec \frac{\alpha}{4} \cdot \sec \frac{\alpha}{8} \cdot \sec \frac{\alpha}{16} \dots \sec \frac{\alpha}{2^n} &= \frac{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Es ist aber für  $n = \infty$

$$\lim \left[ 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \right] = \lim \left[ \frac{\sin \frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}} \right] = \alpha$$

also:

$$\log \cos \frac{\alpha}{2} + \log \cos \frac{\alpha}{4} + \log \cos \frac{\alpha}{8} + \dots = \sum_1^\infty \log \cos \frac{\alpha}{2^x} = \log \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\log \sec \frac{\alpha}{2} + \log \sec \frac{\alpha}{4} + \log \sec \frac{\alpha}{8} + \dots + \sum_1^\infty \log \sec \frac{\alpha}{2^x} = \log \frac{\alpha}{\sin \alpha}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \cdot \cos \frac{\alpha}{16} \dots &= \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ \sec \frac{\alpha}{2} \cdot \sec \frac{\alpha}{4} \cdot \sec \frac{\alpha}{8} \cdot \sec \frac{\alpha}{16} \dots &= \frac{\alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\log \cos \frac{\pi}{4} + \log \cos \frac{\pi}{8} + \log \cos \frac{\pi}{16} + \dots = \sum_1^\infty \log \cos \frac{\pi}{2^{x-1}} = \log \frac{2}{\pi}$$

$$\log \sec \frac{\pi}{4} + \log \sec \frac{\pi}{8} + \log \sec \frac{\pi}{16} + \dots = \sum_1^{\infty} \log \sec \frac{\pi}{2^{x-1}} = \log \frac{\pi}{2}$$

welche zur Berechnung der Zahl  $\pi$ , dienen kann.

Diese Reihen kann man auch schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{32} \dots &= \frac{2}{\pi} \\ \sec \frac{\pi}{4} \cdot \sec \frac{\pi}{8} \cdot \sec \frac{\pi}{16} \cdot \sec \frac{\pi}{32} \dots &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

c) Man setze:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\log[2 \sin 2^x \alpha]}{2^{x-1}} & f(n) &= \frac{\log[2 \sin 2^n \alpha]}{2^{n-1}} = \log \sqrt[n-1]{2 \sin 2^n \alpha} \\ f(x-1) &= \frac{\log[2 \sin 2^{x-1} \alpha]}{2^{x-2}} & f(0) &= \frac{\log[2 \sin \alpha]}{2^{-1}} = \log [2 \sin \alpha]^2 \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= \frac{\log[2 \sin 2^x \alpha]}{2^{x-1}} - \frac{\log[2 \sin 2^{x-1} \alpha]}{2^{x-2}} \\ &= \frac{\log[2 \sin 2^x \alpha] - 2 \log[2 \sin 2^{x-1} \alpha]}{2^{x-1}} = - \frac{\log[2 \sin 2^{x-1} \alpha]^2 - \log[2 \sin 2^x \alpha]}{2^{x-1}} \\ &= - \frac{\log \frac{[2 \sin 2^{x-1} \alpha]^2}{2 \sin 2^x \alpha}}{2^{x-1}} = - \frac{\log \frac{[2 \sin 2^{x-1} \alpha]^2}{2 \sin 2^{x-1} \alpha \cos 2^{x-1} \alpha}}{2^{x-1}} = - \frac{\log \frac{\sin 2^{x-1} \alpha}{\cos 2^{x-1} \alpha}}{2^{x-1}} \\ &= - \frac{\log \tan 2^{x-1} \alpha}{2^{x-1}} = - \log \sqrt[n-1]{\tan 2^{x-1} \alpha} \end{aligned}$$

Die Summirungsformel (I), giebt nun:

$$\sum_1^{n-1} \log \sqrt[n-1]{\tan 2^{x-1} \alpha} = \log [2 \sin \alpha]^2 - \log \sqrt[n-1]{2 \sin 2^n \alpha} = \log \frac{[2 \sin \alpha]^2}{\sqrt[n-1]{2 \sin 2^n \alpha}}$$

$$\begin{aligned} &\log \tan \alpha + \frac{1}{2} \log \tan 2\alpha + \frac{1}{4} \log \tan 4\alpha + \frac{1}{8} \log \tan 8\alpha + \dots \\ &+ \frac{1}{2^{n-1}} \log \tan 2^{n-1} \alpha = \log \frac{[2 \sin \alpha]^2}{\sqrt[n-1]{2 \sin 2^n \alpha}} \end{aligned}$$

oder:

$$[\tan \alpha] \cdot \sqrt[n-1]{\tan 2\alpha} \cdot \sqrt[n-1]{\tan 4\alpha} \dots \sqrt[n-1]{\tan 2^{n-1} \alpha} = \frac{[2 \sin \alpha]^2}{\sqrt[n-1]{2 \sin 2^n \alpha}} \quad (6)$$

Der Nenner dieses Ausdrucks lässt sich in folgender Reihe entwickeln:

$$\sqrt[n]{\sin 2^n \alpha} = \sqrt[n]{1 - [\cos 2^n \alpha]^2} = 1 - \frac{1}{2^n} [\cos 2^n \alpha]^2 \\ + \frac{\frac{1}{2^n} \left( \frac{1}{2^n} - 1 \right)}{1 \cdot 2} [\cos 2^n \alpha]^4 - \frac{\frac{1}{2^n} \left( \frac{1}{2^n} - 1 \right) \left( \frac{1}{2^n} - 1 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [\cos 2^n \alpha]^6 + \dots$$

und für  $n = \infty$

$$\lim \sqrt[n]{\sin 2^n \alpha} = 1$$

so ist auch:

$$\lim \sqrt[n]{2 \sin 2^n \alpha} = \lim 2^{\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\sin 2^n \alpha} = 1$$

daher:

$$\log \tan \alpha + \frac{1}{2} \log \tan 2\alpha + \frac{1}{4} \log \tan 4\alpha + \frac{1}{8} \log \tan 8\alpha + \dots = \log [2 \sin \alpha]^2$$

oder:

$$[\tan \alpha] \cdot \sqrt[4]{\tan 2\alpha} \cdot \sqrt[4]{\tan 4\alpha} \cdot \sqrt[8]{\tan 8\alpha} \dots = [2 \sin \alpha]^2 \quad (7)$$

G. Dobiński,

Techniker der Warschau-Bromberger  
Eisenbahn.

Kutno, d. 7. Febr. 1877.

## 2.

### Allgemeinster Ausdruck der Richtungscosinus einer Geraden in rationalen Brüchen.

Die Aufgabe ist, die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \quad (1)$$

durch ganze Zahlen  $x, y, z, u$  zu erfüllen. Schreibt man dafür

$$x^2 + y^2 = (u + z)(u - z)$$

so zeigt sich, dass  $u + z$  und  $u - z$  Factoren von  $x^2 + y^2$  sind. Nun ist bekannt, dass eine Quadratsumme  $x^2 + y^2$  ausser gemeinsamen

Factoren von  $x$  und  $y$  keinen Factor von der Form  $4n-1$  haben kann. Jeder gemeinsame Primfactor von  $x$  und  $y$  ist aber in gerader Potenz in  $x^2+y^2$  enthalten, folglich gleichzeitig in gerader oder gleichzeitig in ungerader Potenz in  $u+z$  und  $u-z$ ; die niedrigere Potenz steckt dann in  $u+z$  und  $u-z$ , also in  $x, y, z$  und  $u$ , so dass sich Gl. (1) durch deren Quadrat dividiren lässt. Nach geschehener Reduction haben dann  $u+z$  und  $u-z$  Factoren  $4n-1$  nur in gerader Potenz.

Es ist ferner bekannt, dass jede Zahl, die Primfactoren  $4n-1$  nur in gerader Potenz enthält, eine Summe zweier Quadrate ist; folglich kann man setzen:

$$u+z = a^2+b^2; \quad u-z = c^2+d^2$$

Dies eingeführt giebt:

$$x^2+y^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

und man hat die Lösung:

$$\begin{aligned} x &= ac+bd \\ y &= ad-bc \\ z &= \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2) \\ u &= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) \end{aligned}$$

wo 3 der Grössen  $a, b, c, d$  alle ganzen Zahlen, die vierte teils die geraden, teils die ungeraden Zahlen zu durchlaufen hat, damit alle möglichen Wertsysteme von  $x, y, z, u$  darin enthalten sind. Die Frage nach den identischen Lösungen und deren Ausschliessung bleibt natürlich offen.

R. Hoppe.

### 3.

#### Bestimmung der Vielecke durch die Winkel zwischen Seiten und Diagonalen.

##### §. 1. Zählung der Winkelrelationen.

Zieht man in einem  $n$ eck alle Diagonalen, so gehen von jeder Ecke aus  $n-1$  Gerade, welche

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ Winkel}$$

mit einander bilden. Es entstehen also an den Ecken

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2) \text{ Winkel}$$

Von den Winkeln an einer Ecke sind nur  $n-2$  von einander unabhängig, daher existiren an jeder Ecke zwischen den Winkeln

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (n-2) = \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ lineare Relationen,}$$

an allen Ecken

$$\frac{1}{2}n(n-2)(n-3) \text{ lineare Relationen.} \quad (1)$$

Je 3 Ecken des Vielecks sind die Ecken eines besondern Dreiecks, folglich entstehen

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \text{ Dreiecke.}$$

In jedem Dreieck existirt 1 lineare Relation zwischen den Winkeln, in allen Dreiecken

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \text{ lineare Relationen.}$$

Diese zu den an den einzelnen Ecken stattfindenden (1) gezählt giebt

$$\frac{1}{6}n(n-2)(2n-5) \text{ lineare Relationen,}$$

ausser welchen keine weiteren existiren.

Unter ihnen mögen  $m$  Relationen Folge der übrigen sein. Dann bleiben nach Elimination mittelst aller linearen Relationen

$$\{m - \frac{1}{6}n(n-2)(n-7)\} \text{ Winkel} \quad (2)$$

die durch keine lineare Relation von einander abhängen.

Dieselbe Zahl lässt sich auf anderem Wege bestimmen. Das Vieleck ist bestimmt, wenn die von 2 benachbarten Ecken ausgehenden Geraden nach ihren Neigungen gegen die verbindende Seite gegeben sind. Diese

$$2(n-2) \text{ Winkel} \quad (3)$$

sind offenbar von einander unabhängig. Mittelst linearer Relationen lassen sich aus ihnen alle von diesen Geraden gebildeten Winkel finden, dagegen kein einziger Winkel, welcher einen in vorstehender Figur nicht enthaltenen Schenkel hat. Jeder solche Schenkel wird durch 1 Winkel bestimmt. Nun sind sämtliche in diesem Falle befindliche Linien die Verbindungen der  $n-2$  übrigen Ecken; folglich sind

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ Winkel} \quad (4)$$

durch nicht lineare Relationen bestimmt.

Zählt man hierzu die unabhängigen Winkel (3), so giebt es

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ Winkel,}$$



die durch keine lineare Relation von einander abhängen, und man hat nach Vergleichung mit (2):

$$m = \frac{1}{2}n(n-2)(n-7) + \frac{1}{2}(n+1)(n-2) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3)$$

Es hat sich ergeben:

Unabhängig sind

$$2(n-2) \text{ Winkel.}$$

Durch sie sind alle

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2) \text{ Winkel}$$

bestimmt. Hierzu sind

$$\frac{1}{2}(n-2)(n^2-n-4) \text{ Relationen}$$

erforderlich, unter denen

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ Relationen} \quad (4)$$

nicht linear, die übrigen

$$\frac{1}{2}(n-2)(n^2-2n-1) \text{ Relationen}$$

linear sind. Unter den linearen giebt es

$$\frac{1}{2}n(n-2)(n-3) \text{ Relationen}$$

zwischen Winkeln mit gemeinsamem Scheitel; die übrigen

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ Relationen}$$

sind Relationen zwischen Dreieckswinkeln. Dreiecksrelationen giebt es überhaupt

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$$

unter denen

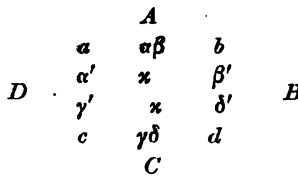
$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3) \text{ Relationen}$$

Folgen der übrigen sind.

## §. 2. Transcendente Vierecksrelation.

Nach (4) existirt beim Viereck zwischen den bezeichneten Winkeln 1 nicht lineare Relation. Im Vieleck aber bildet jede Gerade, deren Richtung durch lineare Relationen nicht bestimmbar ist, mit 3 Geraden, deren Richtungen es sind, ein Viereck. Folglich reicht jene eine nicht lineare Relation, angewandt auf alle solche Vierecke, zur Bestimmung aller Winkel hin. Wir wollen sie die Vierecksrelation nennen und demnächst berechnen.

In einem Viereck  $ABCD$  seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  die Cotangenten der Winkel an der Diagonale  $AC = 1$ ,  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  an der andern (die Winkel selbst bezeichnet durch  $(\alpha), (\beta)$ , etc.), geordnet wie folgt



forner  $a, b, c, d$  die Seiten,  $\kappa$  die Cotangente des Winkels zwischen beiden Diagonalen, und wir betrachten alle Winkel als bestimmt durch die 4 unabhängigen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Die Beziehungen sind sämtlich einfach, sobald der Wert von  $\kappa$  bekannt ist. Man hat:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\beta')}{\sin(\alpha')} = \frac{\sin(\kappa - \beta)}{\sin(\kappa + \alpha)} = \frac{\beta - \kappa \sin(\beta)}{\alpha + \kappa \sin(\alpha)}$$

$$a = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{1}{[\alpha + \gamma] \sin(\alpha)}; \quad b = \frac{\sin(\delta)}{\sin(\beta + \delta)} = \frac{1}{[\beta + \delta] \sin(\beta)}$$

also nach Elimination von  $a$  und  $b$ :

$$\frac{\beta - \kappa}{\alpha + \kappa} = \frac{\beta + \delta}{\alpha + \gamma}$$

woraus:

$$\kappa = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \quad (5)$$

Nun ist

$$\left. \begin{aligned} (\alpha') &= 2R - [(\kappa) + (\alpha)]; & (\beta') &= (\kappa) - (\beta) \\ (\gamma') &= (\kappa) - (\gamma); & (\delta') &= 2R - [(\kappa) + (\delta)] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Nachdem also  $(\kappa)$  allein transcendent durch (5) bestimmt ist, ergeben sich alle Winkel linear.

Um ebenso wie  $\kappa$  auch  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  rational in  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  darzustellen, gewinnt man aus (6):

$$\alpha' = \frac{1 - \kappa\alpha}{\alpha + \kappa}; \quad \beta' = \frac{1 + \kappa\beta}{\beta - \kappa}$$

$$\gamma' = \frac{1 + \kappa\gamma}{\gamma - \kappa}; \quad \delta' = \frac{1 - \kappa\delta}{\delta + \kappa}$$

Bei umgekehrter Darstellung von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  in  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  geht nur  $\kappa$  in  $-\kappa$  über, die Lage der gleichbenannten Winkel in der Figur ist aber verschieden.

### §. 3. Anwendung auf das Vieleck.

Beim Viereck war es für die Symmetrie und in mancher andern Beziehung die günstigste Wahl, die Winkel an einer Diagonale als

gegeben zu betrachten. Ein gleiches lässt sich beim Vieleck nicht durchführen, ohno dass die Einfachheit der Bestimmungen verloren geht. Kehren wir daher zur Anordnung von §. 1. zurück.

In dem Vieleck  $ABCDE \dots$  bezeichne die Reihenfolge der Buchstaben die positive Richtung der Seiten und Diagonalen. Die Winkel an den Ecken  $A$  und  $B$  seien gegeben, der erste Schenkel sei gemeinsam  $AB$  und die Verlängerung über  $B$  hinaus bzw. für die Scheitel  $A$  und  $B$ , der zweite gehe vom Scheitel in positiver Richtung nach den respectiven übrigen Ecken. Im convexen Vieleck sind dann alle Winkel positiv und  $< 2R$ .

Wir verbinden nun  $AB$  mit allen Seiten und Diagonalen des  $(n-2)$ ecks  $CDE \dots$  zu ebensovielen Vierecken. Das erste Viereck wird  $ABCD$  sein. Die Bestimmung über die Winkel bei  $C$  und  $D$  ist dann die gleiche wie bzw. bei  $A$  und  $B$ . Ebenso bei den übrigen Vierecken.

Ferner verlängern wir alle jene Vierecks-Gegenseiten von  $AB$  bis zum Durchschnitt mit dem verlängerten  $AB$  in  $N$  und führen die daselbst gebildeten Winkel ( $\lambda$ ), deren erster Schenkel  $AB$  ist, die demnach von 0 bis  $4R$  (oder von 0 bis  $2R$ , dann von  $-2R$  bis 0) variiren, als Hülfswinkel ein.

Diese veränderte Bestimmung erfordert eine Modification der Formeln von §. 2., welche deren Form bestehen lässt und nur einige Vorzeichen der Cotangenten, bedingt durch die Lage der Winkel, deren manche durch ihre Nebenwinkel ersetzt werden, beeinflusst. Die Formeln würden sich durch eine blosse Substitution dem Zwecke gemäss unmittelbar transformiren lassen; doch würde dieser hinsichtlich algebraischer Rechnung kürzere Weg doch wegen complicirter Vorzeichenfragen der schwierigeren sein. Wir ziehen es deshalb vor die Gl. (5) algebraisch nach  $\lambda$  aufzulösen.

Die Winkel, welche  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $BD$  mit der Richtung  $AB$  machen, seien  $(\epsilon)$ ,  $(\zeta)$ ,  $(\eta)$ ,  $(\theta)$ , diejenigen, welche  $CA$ ,  $CB$ ,  $DA$ ,  $DB$  mit der Richtung  $CD$  machen,  $(\epsilon')$ ,  $(\zeta')$ ,  $(\eta')$ ,  $(\theta')$ . Dann ist identisch (als sich deckend oder als Nebenwinkel)

$$\begin{aligned} (\alpha) &= (\zeta) - (\epsilon) & (\alpha') &= (\theta') - (\eta') \\ (\beta) &= (\epsilon) & (\beta') &= 2R - (\theta) \\ (\gamma) &= (\epsilon') & (\gamma') &= 2R - (\theta') \\ (\delta) &= (\zeta') - (\epsilon') & (\delta') &= (\theta) - (\eta) \end{aligned}$$

und als Dreiecksinnen- oder -ausseiwinkel

$$(\kappa) = 2R + (\epsilon) - (\theta)$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda) &= 2R + (\varepsilon) - (\varepsilon') = 2R + (\eta) - (\zeta') \\ &= 2R + (\zeta) - (\eta') = 2R + (\vartheta) - (\vartheta') \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

woraus nach Elimination von  $\varepsilon'$ ,  $\zeta'$ ;

$$(\gamma) = 2R + (\varepsilon) - (\lambda)$$

$$(\delta) = (\eta) - (\varepsilon)$$

daher, übergehend zu den Cotangenten:

$$\alpha = \frac{\varepsilon\zeta + 1}{\varepsilon - \zeta}; \quad \beta = \varepsilon; \quad \gamma = \frac{\varepsilon\lambda + 1}{\lambda - \varepsilon}; \quad \delta = \frac{\varepsilon\eta + 1}{\varepsilon - \eta}$$

$$\kappa = \frac{\varepsilon\vartheta + 1}{\vartheta - \varepsilon}$$

Führt man diese Werte in (5) ein und löst die nach Reduction in  $\lambda$  lineare Gleichung auf, so kommt:

$$\lambda = \frac{\varepsilon\vartheta - \zeta\eta}{\varepsilon - \zeta - \eta + \vartheta}$$

In dieser Form lässt sich die transcendente Vierecksrelation nun leicht auf alle  $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$  Vierecke anwenden, indem man bloss die Ecken  $C$ ,  $D$  einzeln mit den übrigen  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ... vertauscht. Sind sämtliche  $(\lambda)$  bekannt, so ergeben die Gl. (7) linear alle  $2(n-2)(n-3)$  durch die gegebenen  $2(n-2)$  Winkel mitbestimmten Winkel, welche nicht unmittelbar mit ihnen linear verbunden waren.

Der Fall  $\frac{1}{\lambda} = 0$  macht keine Schwierigkeit.

R. Hoppe.

#### 4.

##### Ein neuer Satz von den Kegelschnitten.

Fällt man von den Brennpunkten einer Ellipse oder Hyperbel Perpendikel auf die Tangenten dieser Curven, so ist bekanntlich ihr Product constant. Dieser Satz lässt sich wie folgt erweitern:

1. „Wählt man auf der Hauptaxe einer Ellipse oder Hyperbel zwei Punkte, deren Abstände vom Mittelpunkte der Curve resp.  $= +u$  und  $= -u$  sind, und fällt man von denselben Senkrechte auf eine beliebige Tangente, so ist stets

$$u^2(k+l)^2 - c^2(k-l)^2 = 4b^2u^2$$

wobei  $k$ ,  $l$  die erwähnten Senkrechten,  $2c$  die Excentricität und  $2b$  die Nebenaxe des Kegelschnitts bezeichnen.“

2. „Ebenso findet man für zwei Punkte der Nebenaxe, deren Abstände vom Mittelpunkte wieder  $= +u$  und  $-u$  sind, dass

$$u^2(k+l)^2 + c^2(k-l)^2 = 4a^2u^2$$

ist, wobei  $2a$  die Hauptaxe ist.“

Wählt man auf der Nebenaxe zwei Punkte, welche denselben Abstand vom Mittelpunkte haben, wie die Brennpunkte, d. h. wenn wir  $u = c$  annehmen, so erhalten wir

$$k+l^2 = 2a^2$$

d. i.: „die Summe der Quadrate der von diesen Punkten auf die Tangente gefällten Senkrechten ist eine constante Grösse.“

Anton Sýkora.

## 5.

### Summation zweier Reihen.

Die Summation der Reihen

$$S = \sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \dots + \sin[\varphi + (n-1)\alpha]$$

$$C = \cos \varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \dots + \cos[\varphi + (n-1)\alpha]$$

geschieht am einfachsten, wenn man die erste mit  $\cos \alpha$ , die zweite mit  $\sin \alpha$  (oder auch umgekehrt) multiplicirt, und die Producte addirt und subtrahirt. Man findet dadurch

$$S \cos \alpha + C \sin \alpha = \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \dots + \sin(\varphi + n\alpha)$$

$$S \cos \alpha - C \sin \alpha = \sin(\varphi - \alpha) + \sin \varphi + \dots + \sin[\varphi + (n-2)\alpha]$$

oder

$$S \cos \alpha + C \sin \alpha = S + \sin(\varphi + n\alpha) - \sin \varphi$$

$$S \cos \alpha - C \sin \alpha = S - \sin[\varphi + (n-1)\alpha] + \sin(\varphi - \alpha)$$

oder

$$S(1 - \cos \alpha) - C \sin \alpha = \sin \varphi - \sin(\varphi + n\alpha)$$

$$S(1 - \cos \alpha) + C \sin \alpha = \sin[\varphi + (n-1)\alpha] - \sin(\varphi - \alpha)$$

Hieraus ergibt sich, wenn man wieder addirt und subtrahirt, nach einfacher Reduction

$$S = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \left( \varphi + \frac{n-1}{2} \alpha \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$C = \frac{\cos \left( \varphi + \frac{n-1}{2} \alpha \right) \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Anton Sýkora.

## 6.

**Zerlegung einer Zahl in die Differenz zweier Quadrate.**

Setzt man in die identische Gleichung

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

 $m, n$  statt  $x+y, x-y$ , so erhält man

$$mn = \left( \frac{m+n}{2} \right)^2 - \left( \frac{m-n}{2} \right)^2 \quad \dots \dots \dots (A)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass eine Zahl in die Differenz zweier Quadrate zerlegt werden kann, wenn sie sich in zwei gerade oder zwei ungerade Factoren auflösen lässt; denn alsdann sind  $m+n$ ,  $m-n$  gerade, und  $\frac{m+n}{2}$ ,  $\frac{m-n}{2}$  ganze Zahlen.

Z. B.

$$15 = 3 \cdot 5 = \left( \frac{3+5}{2} \right)^2 - \left( \frac{5-3}{2} \right)^2 = 4^2 - 1^2$$

$$40 = 4 \cdot 10 = \left( \frac{10+4}{2} \right)^2 - \left( \frac{10-4}{2} \right)^2 = 7^2 - 3^2$$

Daraus ergibt sich, dass jede ungerade Zahl in die Differenz zweier Quadrate aufgelöst werden kann, da man die Zahl selbst als den einen, die Einheit als den zweiten ungeraden Factor derselben ansehen kann.

$$7 = 7 \cdot 1 = \left( \frac{7+1}{2} \right)^2 - \left( \frac{7-1}{2} \right)^2 = 4^2 - 3^2$$

Dasselbe gilt auch von jeder durch 4 teilbaren Zahl, indem dieselbe die Zerfallung in zwei gerade Factoren gestattet.

Obige Gleichung (A) liefert alle möglichen Zerlegungen einer Zahl in die Differenz zweier Quadrate, wenn man dieselbe auf alle möglichen Arten in zwei Factoren zerfällt, die entweder beide gerade oder beide ungerade sind.

Denn wenn eine Zahl die Auflösung in die Differenz zweier Quadrate  $x^2 - y^2$  gestattet, so ist dieselbe auch gleich  $(x+y)(x-y)$ ; da aber die Factoren  $x+y$ ,  $x-y$  entweder beide gerade, oder beide ungerade sind, so entspricht dieser Auflösung in die Differenz zweier Quadrate eine Zerlegung in zwei gerade oder zwei ungerade Factoren, und dieser umgekehrt jene, da  $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ .

Die Zahl  $420 = 2.210 = 6.70 = 10.42 = 14.30$  z. B. bietet also nur folgende Zerlegungen in die Differenz zweier Quadrate:

$$420 = 106^2 - 104^2, = 38^2 - 32^2, = 26^2 - 16^2, = 22^2 - 8^2.$$

Gleichzeitig ergibt sich, dass eine Zahl, die durch 2, nicht aber durch 4 teilbar ist, in die Differenz zweier Quadrate nicht zerlegt werden kann, da dieselbe eine Zerlegung in zwei gerade oder zwei ungerade Factoren nicht gestattet.

Anton Sýkora.

## 7.

### Neue Ableitung der Pythagoräischen Lehrsätze.

Die Flächeninhalte der ähnlichen Dreiecke  $ABC$ ,  $ADC$  und  $DBC$  welche entstehen, wenn man in dem bei  $C$  rechtwinkligen Dreiecke  $ABC$  die Senkrechte  $CD$  auf die Hypotenuse fällt, gestatten eine doppelte Vergleichung.

Erstens verhalten sich diese Flächeninhalte wie die Quadrate der homologen Seiten  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ , d. h. es ist

$$\text{Fl.: } ABC:ADC:DBC = AB^2:AC^2:BC^2.$$

Zweitens haben diese Dreiecke gleiche Höhe, wenn wir resp.  $AB$ ,  $AD$ ,  $DB$  als ihre Grundlinien ansehen; deshalb ist auch

$$\text{Fl.: } ABC:ADC:DBC = AB:AD:DB$$

und somit

$$AB^2:AC^2:BC^2 = AB:AD:DB$$

daher

$$\text{I. . . . } AB:AC = AC:AD \quad \text{und} \quad AB:BC = BC:DB$$

Die Flächen der kleineren zwei Dreiecke gestatten aber noch folgende Vergleichungen:

$$ADC:DBC = AD^2:DC^2 \text{ (oder auch } = DC^2:DB^2)$$

so wie auch

$$ADC:DBC = AD:DB,$$

woraus sich

$$AD^2:DC^2 = AD:DB$$

oder

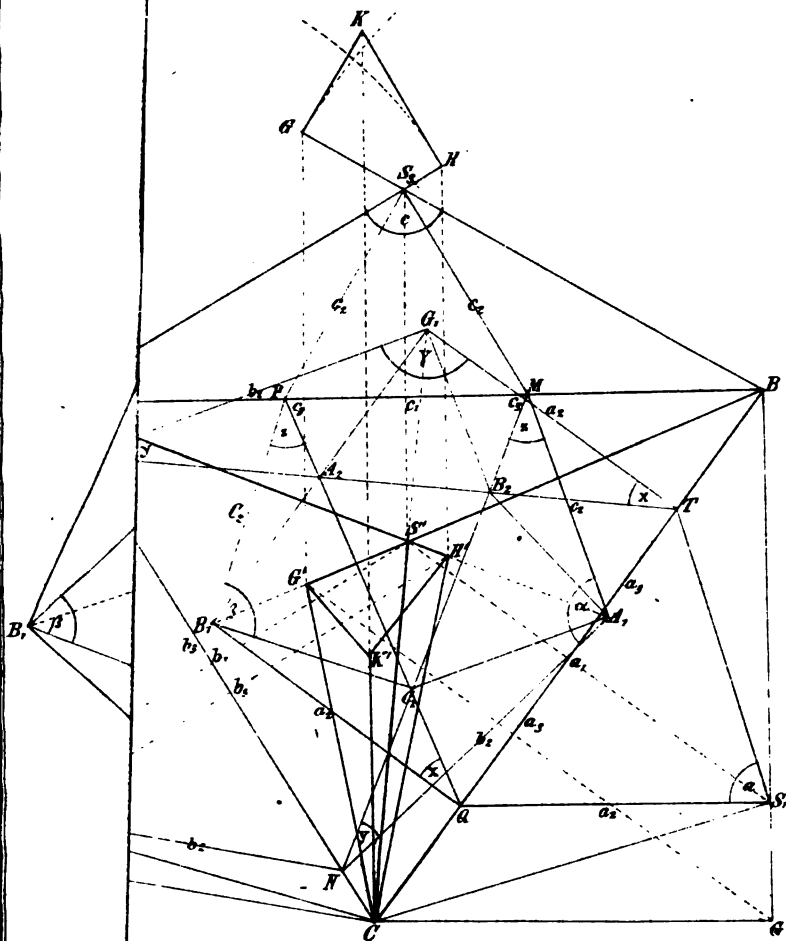
$$\text{II.} \dots \dots \dots AD:DC = DC:DB$$

ergibt.

Anton Šýkora.



*Fig. 1b.*



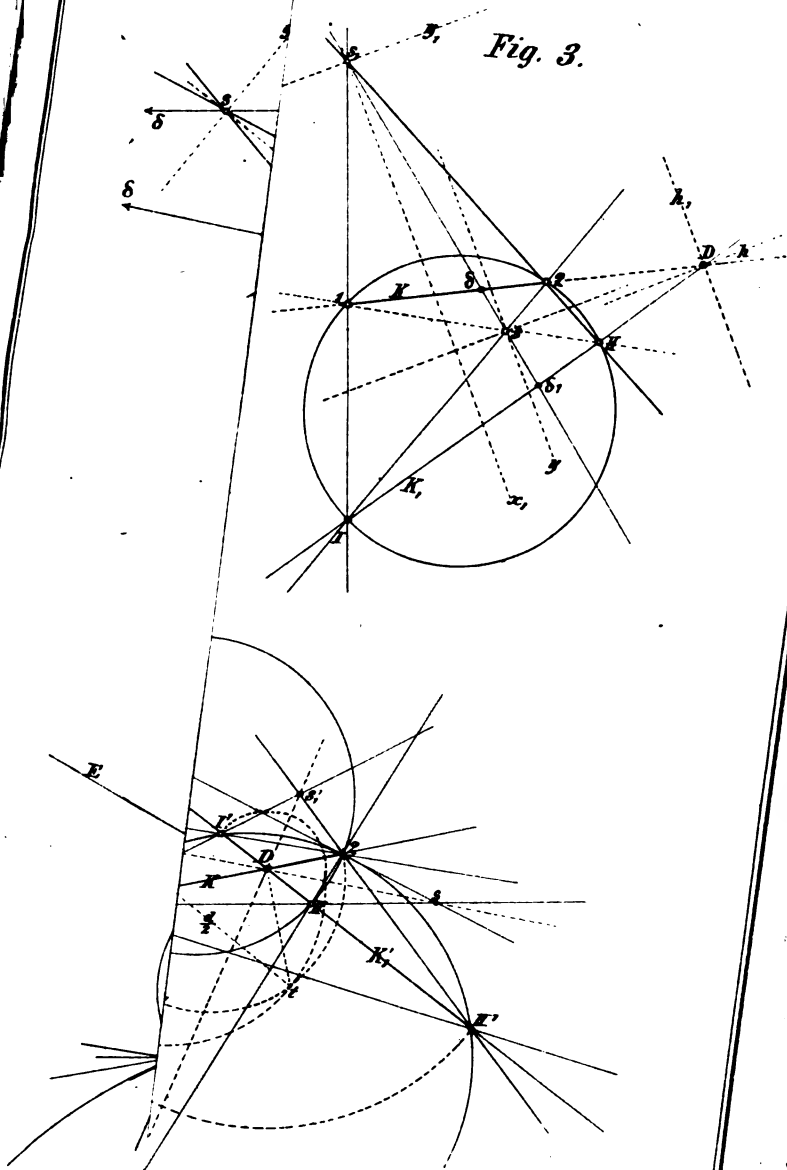
### Le zur Auflösung des Dreikants.







Fig. 3.



XXIV.



Fig. 1.

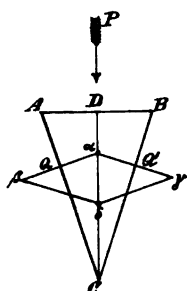


Fig. 2.

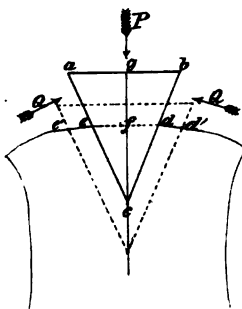
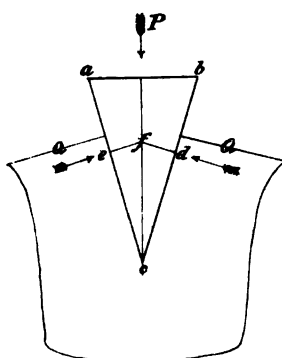


Fig. 3.



XXIII. Meutzner:  
Zur Theorie des Keils.









Verlag von **Maruschke & Berendt** in Breslau.

---

# Theorie der Wärme

von

**J. C. Maxwell,**

Professor an der Universität in Cambridge.

Nach der vierten Auflage des Originals in's Deutsche übertragen

von

**Dr. F. Auerbach,**

Assistent am physikalischen Cabinet der Universität in Breslau.

Mit 41 Holzschnitten.

**Geh. Preis 6 Mark.**

---

Durch jede Buchhandlung ist zu beziehen:

## Zeitschrift für populäre Mittheilungen

aus dem Gebiete der **Astronomie** und verwandter Wissenschaften.

Altona 1858/1869. 3 Bände.

**Preis 6 Mark (früher 9 Mark).**

Leipzig, November 1877.

**Wilhelm Mauke.**

---

**Cremona, Dr. Ludwig,** Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven. In's Deutsche übertragen von **Dr. Maximilian Curtze.** Mit 1 lithogr. Tafel. gr. 8. 1865. Geh. Preis 5 Mk.

**Fahland, H.,** Leitfaden für den planimetrischen Unterricht in Gymnasien und Realschulen. gr. 8. 1857. Geh. Preis 1 Mk. 20 Pf.

**Martus, H. C. E.,** Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Classen höherer Lehranstalten. 1. Thl. Aufgaben. 3. Aufl. gr. 8. 1873. Geh. 3 Mk. 60 Pf.  
— 2. Thl. Resultate. 2. Aufl. gr. 8. 1875. Geh. 4 Mk.

*Von Fachmännern auf das Günstigste beurtheilt.*

Leipzig.

**C. A. Koch's** Verlagsbuchhandlung.

# INHALT.

	Seite.
XXII. Neue Methode zur Auflösung des Dreikants. Von Herrn Karl Klekler, Professor an der k. k. Marine-Akademie in Fiume . . . . .	337
XXIII. Zur Theorie des Keiles. Von P. Meutzner . . . . .	344
XXIV. Kegelflächen zweiter Ordnung mit einer Symptosenaxe. Von Emanuel Czuber in Prag . . . . .	351
XXV. Sur une représentation des points imaginaires en géométrie plane. Par Paul Appell . . . . .	359
XXVI. Ueber die Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren. Von Herrn Leopold Klug, Realschullehrer in Pressburg . . . . .	36
XXVII. Eclaircissements sur une Note relative à la fonction $\log x$ . Par Monsieur Genocchi, Professeur à l'Université de Turin . . . . .	366
XXVIII. Ueber die Krümmungskreise der Parabel. Neue Grundlage für die Theorie derselben und entsprechende Ausführungen. Von Herrn Prof. Dr. Mack zu Ludwigsburg . . . . .	385
XXIX. Recherche des systèmes de deux polygones réguliers étoilés, inscrits dans le même cercle, qui sont tels que la surface de l'un soit double de la surface de l'autre. Par Georges Dostor . . . . .	407
XXX. Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe. Von R. Hoppe . . . . .	410
XXXI. Untersuchungen über das Dreieck. Von Emil Hain . . . . .	417
XXXII. Magnetische Influenzversuche. Von Ludwig Kulp . . . . .	427
XXXIII. Miscellen.	
1. Producte einiger Factorenreihen. Von G. Dobinski . . . . .	434
2. Allgemeinster Ausdruck der Richtungs-cosinus einer Geraden in rationalen Brüchen. Von R. Hoppe . . . . .	438
3. Bestimmung der Vielecke durch die Winkel zwischen Seiten und Diagonalen. Von R. Hoppe . . . . .	439
4. Ein neuer Satz von den Kegelschnitten. Von Anton Sy'kora . . . . .	444
5. Summation zweier Reihen. Von Anton Sy'kora . . . . .	445
6. Zerlegung einer Zahl in die Differenz zweier Quadrate. Von Anton Sy'kora . . . . .	446
7. Neue Ableitung der Pythagoräischen Lehrsätze. Von Anton Sy'kora . . . . .	447

# Litterarischer Bericht

CCXLI.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo IX. Roma 1876. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der letzten 6 Hefte ist folgender.

7. Heft. G. B. Biadego. Ueber das Leben und die Schriften des Gianfrancesco Malfatti, Mathematikers des 18. Jahrhunderts. Verzeichniss seiner und der auf das Malfatti'sche Problem bezüglichen Arbeiten, 67 ungedruckte Briefe von ihm an Anton-Maria Lorgna (unvollendet).

8. Heft. Fortsetzung der Briefe an Lorgna, 9 fernere an Cav. Ab. Girolamo Tiraboschi, und 4 an verschiedene Personen.

9. Heft. Alfonso Sparagna. Italienische Uebersetzung von Moritz Cantor's Schrift: Gottfried Friedlein. Nekrolog. B. Boncompagni. Verzeichniss von Friedlein's Arbeiten. O. Abria und J. Houël. Notiz über das Leben und die Arbeiten von Victor-Amédée Le Besge nebst Verzeichniss seiner Arbeiten und einer von ihm selbst redigirten Notiz über die hauptsächlichsten derselben, V. A. Le Besge. Bemerkungen zu den Schriften von Léonard de Pise.

10. Heft. Moritz Steinschneider. Des jüdischen Astronomen Prophanus in Montpellier aus Marseille (u. J. 1300) Vorrede zum astronomischen Kalender, bisher ungedruckt, aus zwei alten Ueber-

setzungen (deren eine auch interpolirt) nebst hebräischem Text zum erstenmal herausgegeben und mit eigener wörtlicher lateinischer Uebersetzung versehen.

11. Heft. C. E. Sédillot. Brief an D. B. Boncompagni über das Leben und die Arbeiten von Louis-Amélie Sédillot. B. Boncompagni. Verzeichniss seiner Arbeiten.

12. Heft. Moritz Cantor. Ueber die Nationalität des Copernicus, ins Italienische übersetzt von Alfouso Sparagna.

Publicationsverzeichnisse im 8., 10. und 12. Heft.

Besonders herausgegeben ist der Nekrolog von Gottfried Friedlein. H.

Caroline Herschel's Memoiren und Briefwechsel. (1750—1848.) Herausgegeben von Frau John Herschel. Aus dem Englischen von A. Scheibe. Autorisirte Uebersetzung. Mit Caroline Herschel's Portrait. Berlin 1877. Wilhelm Hertz. 364 S.

Das Buch enthält chronologisch geordnete Documente zur Lebensgeschichte der drei um die Fortschritte der Astronomie hauptsächlich verdienten Familienglieder Wilhelm, seiner Schwester Caroline und seines Sohnes John, nur in wenigen Stellen ergänzt und verbunden durch die Erzählung der Herausgeberin. Charakteristisch für die Aufzeichnungen sowol als für die Briefe Caroline's, letztere wenigstens in der ersten Hälfte, ist es, dass man darin nur fertige Tatsachen findet, während die Wege, auf denen so Ausserordentliches *hat* zustande gebracht werden können, mit keinem Worte erwähnt werden. Nachdem wir Wilhelm bis S. 36 ausschliesslich als Musiker kennen gelernt haben, seine Zeit anscheinend völlig durch musikalische Veranstaltungen in Beschlag genommen, folgt unmittelbar die Errichtung des 18füssigen Spiegelteleskops, bei welcher er als vollendeter Astronom, Optiker, Constructeur und Bankundiger auftritt, die von ihm zugezogenen zahlreichen Techniker und Arbeiter beaufsichtigend, deren Leistungen er sehr ungenügend findet und mit eigener Hand ergänzen muss. Einleitend erwähnt zwar hier die verbindende Erzählung seines Interesses an der Astronomie, doch giebt auch diese keinen Aufschluss, wo er die Ausbildung so eminenten, alles Frühero überragender Fähigkeiten in so mannichfacher Beziehung gewonnen hat. Der nun folgende, die Lebenszeit Wilhelm's umfassende Abschnitt, und zwar mehr die Briefe als das Tagebuch, lässt erkennen, welchen Anteil die Schwester an seinen Arbeiten hatte. Ausser Handdiensten fielen ihr zu Aufzeichnungen und Berechnungen seiner Beobachtungen

sowie deren Fortsetzung in seiner Abwesenheit, Arbeiten an den von Flamsteed vorliegenden, von Herschel fortgesetzten Katalogen der Fixsterne und Nebel, Aufsuchung und Verfolgung der Kometen. Bei dieser Beschäftigung hatte sie das Glück unter 8 von ihr neu entdeckten, teilweise auch hier näher beschriebenen Kometen denjenigen bei seiner zweiten Erscheinung zu entdecken, welchen nachher bei vierter Erscheinung Encke identificirte. In einem weit befriedigenderem Zusammenhange steht der nachherige Briefwechsel Caroline's mit ihrem Neffen John, welcher einen steten Einblick in die Tätigkeit des letzteren, die Erlebnisse beider und ihre Verhältnisse zu den Fachgenossen und gelehrten Gesellschaften gestattet. Ihre eigne litterarische Tätigkeit aus dieser Zeit beschränkt sich auf Vollendung des Begonnenen. Das Ganze umfasst die Lebenszeit Caroline's, d. i. die Geschichte eines Zeitraums von fast 100 Jahren.

Geschichte des Principis der kleinsten Action. Akademische Antrittsvorlesung von Dr. Adolph Mayer, a. o. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Leipzig 1877. Veit u. C. 31 S.

An der Entdeckung und Gestaltung des Principis sind, soweit die Schrift es erwähnt, beteiligt Euler, Dan. Bernoulli, Maupertuis, König, d'Arcy, Lagrange, Jos. Bertrand und Jacobi, ob Leibnitz bleibt zweifelhaft. Der Vortrag beginnt mit der definitiven Aufstellung nach Jacobi bezüglich auf ein Massensystem. Euler ist der Entdecker des Principis, jedoch in dessen Beschränkung auf einen Punkt. Dem Maupertuis bestreitet der Verfasser Verdienste um die Fortbildung, und schreibt ihm vielmehr Entstellung durch Einführung vieler Willkür zu. König kritisiert ihn und behauptet die Priorität von Leibnitz; Euler erkennt Maupertuis in dessen präsumtiver höherer Leistung an und tritt in jenem Streit auf seine Seite; Hauptgrund war, dass ihm der täuschende aprioristische Schein imponirte. Hiergegen richtet sich Bernoulli's Streben. Lagrange fasst das Princip allgemeiner, doch vermag der Verfasser dessen Aufstellung, welche den Worten nach sinnlos sei, nur auf eine Art zu interpretiren, derzufolge eine Verwechslung mit dem Hamilton'schen Princip vorliege. Im gesammten Hergang sind also manche Punkte der Unklarheit enthalten; die Geschichte hat an deren Beleuchtung eine würdige Aufgabe zu lösen.

H.

Die römischen Grundsteuervermessungen. Nach dem lateinischen Texte des gromatischen Codex, insbesondere des Hyginus, Frontinus und Nipsus bearbeitet von E. Stoeber, Königl. Bayerischem Bezirksgeometer. Mit einem Vorwort von Dr. C. M. v. Bauernfeind. München 1877. Theodor Ackermann. 149 S.

Das Vorliegende ist vor dem Erscheinen des Werks von Cantor über die römischen Agrimensoren bearbeitet, also ohne Bezugnahme auf dasselbe. Bauernfeind findet den Unterschied zwischen den Gesichtspunkten beider, dass es in jenem darauf ankam zu zeigen, woher die römischen Geometer ihre geodätischen Kenntnisse erhalten, und wie sich dieselben bis in das Mittelalter fortgepflanzt haben, dass es dagegen vornehmster Zweck des Gegenwärtigen sei, neben einer kurzen Darlegung des Entwicklungsgangs der praktischen Geometrie bis auf die Zeit der römischen Kaiser eine vollständige Uebersicht der römischen Grundsteuervermessungen, deren Regelung eben jenen Agrimensoren oder Gromatikern anvertraut war, zu geben. In der Einleitung wird die geometrische Praxis der alten Aegypter und Griechen in Aegypten, dann der Römer, im Dienste des Staats, erörtert, die Messinstrumente beschrieben und die in Lachmann's Ausgabe des gromatischen Codex enthaltenen 17 Schriften aufgeführt. Die 2 ersten Capitel handeln vom römischen Landgebiet, dem Verfahren bei Colonisirung der eroberten Länder und der Vermarkung, das dritte von den römischen Agrimensoren und ihren Instrumenten; das vierte beschreibt ausführlicher die Messungsmethoden; der Gegenstand des letzten ist das Steuerwesen der Römer. II.

### Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra an Gymnasien und verwandten Anstalten. Von Dr. Joh. Chr. Walberer, Professor am königlichen Gymnasium in Hof. München 1876. Theodor Ackermann. 114 S.

Der Umfang des Lehrbuchs entspricht dem gesamten Pensum der Gymnasien. In Erfüllung der logischen Anforderungen ist es in vielfacher Hinsicht mangelhaft, doch bleibt auch bei Abschen von der Strenge mancherlei an der Behandlungsweise auszusetzen. Der Anfang macht durch einen einfachen, concininen, wolgeordneten Vortrag bei klarer Auffassung einen guten Eindruck; um so greller stechen dagegen die häufigen handgreiflichen und leicht zu verbessernden Unrichtigkeiten ab. So wird z. B. „algebraische Summe“ so definiert, dass der Schüler  $a - b$  für die Summe von  $a$  und  $b$  halten muss. Die Methode ist die rein arithmetische; die Erweiterung des Zahlengebiets wird erwähnt, jedoch nicht hinreichend zur Deutlichkeit gebracht; von ihren Consequenzen ist gar nicht die Rede. Von der Inversion der Operationen wird kein Gebrauch gemacht, vielmehr der Subtraction, Division und Radicirung durch gesonderte Betrachtung er-



klärt, die der einfachen Auffassung im Wege steht, und die Bedeutung der Division nur einseitig zu erkennen giebt. In den späteren Abschnitten gleichen die allgemeinen Erläuterungen mehr und mehr dem Vortrag eines Gelehrten, welcher dem Standpunkt des Anfängers so fern steht, dass er nicht zu beurteilen vermag, was dem Schüler vor allem zu wissen notwendig ist. Die wichtigsten Erklärungen sind unzureichend und verstecken sich hinter vielem Ueberflüssigen. Nach allem ist das Buch weder pädagogisch noch wissenschaftlich betrachtet zu empfehlen.

H.

Lehrbuch der besondern Arithmetik für den Schulgebrauch bearbeitet von Carl Kieseritzky, Oberlehrer an der St. Annenschule zu St. Petersburg. Dorpat 1876. G. Hässel. 116 S.

Das Buch ist eine Anweisung zum bürgerlichen Rechnen, welches sich auf Zins-, Disconto-, Termin-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung erstreckt. Die Erläuterungen sind sorgfältig ohne jedoch auf einen Einblick in die Gründe des Verfahrens gerichtet zu sein; dagegen ist für die Anschauung manches anerkennenswerthe getan, z. B. durch die Darstellung der Brüche in getheilten Linien. Da sich ein beträchtlicher Teil des Buchs mit den russischen Massen, Gewichten u. s. w. und den darauf bezüglichen Reductionen beschäftigt, so ist natürlich an eine Verwendung in Schulen anderer Länder nicht zu denken.

H.

Lehrbuch der Algebra für Industrie- und Gewerbeschulen, sowie zum Selbstunterricht. Von Johannes Orelli, Professor am eidgenössischen Polytechnikum. Dritte, umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage in 2 Theilen. Zürich 1877. Caesar Schmidt. 304 S.

Der Vortrag ist ein erläuternder mit unbegrenzter Freigebigkeit an Worten; dabei wird jedoch die Orientirung durch vorgängige Disposition und nachfolgende Formulirung des Resultats nicht verabsäumt, und selbst der Wortüberfluss ist geeignet die Auffassung leicht zu machen, wozu auch die beständige Begleitung mit ausgeführten Beispielen viel beiträgt. Bei der grossen Langsamkeit des Fortschritts war es natürlich möglich auf manche nützliche Dinge näher einzugehen, welche Lehrbücher von kleinerem Umfang bei Seite

lassen müssen; dies ist jedoch in den 4 ersten Abschnitten, welche die Operationen behandeln, nur in sehr geringem Masse geschehen. Wo die Division der Polynome so ausführlich erörtert wird, kommt auch ausser der Erniedrigung der höchsten Potenz die zur Zerfallung in Partialbrüche gebrauchte Erhöhung der niedrigsten, die Auffindung des gemeinsamen Teilers, die Addition der Brüche mit polynomischen Nennern und manches damit verbundene gezeigt werden, was von praktischer Anwendung ist. Auch zu reiferer Begriffsentwicklung, z. B. in Bezug auf Multiplication entgegengesetzter Grössen, war durch die Ausführlichkeit der Besprechung reichlich Gelegenheit geboten. Doch ist wenigstens anzuerkennen, dass das Aufgestellte correct und nirgends irreleitend ist. Die Behandlung der Gleichungen zeichnet sich durch Sorgfalt aus. Es sind die Determinanten und die unendlichen Grössen in den Kreis der Erörterung gezogen, und zum Ansatz von Aufgaben, sowie zur Beurteilung ihrer Bestimmtheit eine recht eingehende Anweisung erteilt. Die Determinantenlehre leitet durch specielle Beobachtung ein, doch ist die nachherige allgemeine Theorie davon unabhängig erhalten. Die Besprechung der unendlichen Grössen überspringt, sehr zum Nachteil der Deutlichkeit, die Begriffserklärung und ermangelt infolge dessen fester Principien, wenn gleich das Aufgestellte an sich correct ist. Die Lehre von den Gleichungen schliesst mit dem 2. Grad; es folgen dann noch 4 Abschnitte: Sätze über Zahlen und Wurzelgrössen, Theorie der Logarithmen, arithmetische und geometrische Progressionen, Kettenbrüche. Imaginäre Grössen werden im 1. Teil nur bei den Gleichungen 2. Grades, und nur ganz kurz besprochen.

Der 2. Teil enthält, was man sonst wol algebraische Analysis nennt, die unbestimmte Analytik, die Combinationslehre, den binomischen Satz, die Lehre von Functionen, Grenzwerten und incommensurablen Zahlen, von imaginären Zahlen, die Auflösung der Gleichungen 3. Grades, die Lehre von den unendlichen Reihen und von den höhern Gleichungen. Der Vortrag zeichnet sich, sehr im Gegensatz zu einer gewissen viel beliebten Oberflächlichkeit, aus durch eine Darstellungsweise, welche bei strenger Beobachtung exacter Forderungen doch das Verstehen leicht macht. Der 4. Abschnitt giebt einen Teil einer Infinitesimaltheorie, welcher wesentliche Fortschritte im Vergleich mit den früheren nachlässigen Methoden, aber auch noch manche Ueberbleibsel derselben zeigt. Das Unendlichkleine ist correct als Variable erklärt; aber warum musste erst der Grenzwert mit Anwendung des (freilich nicht so genannten) Unendlichkleinen, dann wieder dieses durch jenen definirt werden? Wichtiger ist das Fehlen des Hauptsatzes: Zwei Constante sind gleich, wenn sie von einer Variablen unendlich wenig differiren. Dieser Mangel äussert sich sehr

bemerklich bei Erklärung der incommensurablen Zahlen. Hier wird aufgestellt: Wir wollen 2 incommensurable Grössen gleich nennen, wenn ihr Unterschied nachweisbar kleiner ist als jede noch so kleine angebbare Zahl. Dies ist nun eine offenbare Verwechslung der variablen, commensurablen Zahl, d. i. des unendlichen Decimalbruchs, mit deren Grenzwert; denn nur letzterer ist incommensurabel, und nur erstere kann unendlich wenig differiren. Der obige Hauptsatz schlichtet die Verwirrung in einfachster Weise. Auch die Erklärung des Functionsbegriffs ist mangelhaft: es fehlt die Bedingung, dass der Functionswert durch den Argumentwert bestimmt sei; das erste Beispiel, das in der That unrichtig ist, zeigt, dass der Mangel nicht bloss in den Worten, sondern auch im Gedanken liegt. Vortrefflich ist die Methode und Darstellungsweise des letzten Abschnitts.

H.

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra mit mehr als 1500 Uebungsaufgaben. Zum Gebrauch an Seminarien und höheren Lehranstalten, wie auch für den Selbstunterricht bearbeitet von W. Adam, Königl. Seminarlehrer in Neu-Ruppin. Erster Theil: Die vier Species mit der Bruchrechnung, Verhältnisse und Proportionen, Potenzen und Wurzeln. Die Gleichungen vom ersten und zweiten Grade. Höhere Gleichungen, welche auf die Form einer quadratischen Gleichung gebracht werden können. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Neu-Ruppin 1877. Rud. Petrenz. 248 S.

Das Lehrbuch zeichnet sich durch Vollständigkeit und Sorgfalt aus. Von ersterer überzeugt sich nicht allein der Kundige, sofern er keinen für ein umfassendes Studium wichtigen Punkt übergangen findet, sondern es wird auch durch ausführliche Discussionen dem Lernenden das Bewusstsein davon erteilt. Die Discussionen sind jedoch das Einzige, worin der Vortrag der Lehren keinen Raum spart; in jeder andern Beziehung ist er angemessen kurz gefasst. Die Sorgfalt ist getübt in der streng logischen Auffassung und dem correcten und leicht verständlichen Ausdruck. Hierbei muss man vom Anfang des Buchs absehen, welcher nur als Anknüpfung an Bekanntes zu betrachten ist. Im einzelnen sind folgende Ausstellungen zu machen. S. 32. steht der unrichtige Satz: „Die Null multiplicirt nicht“. Das würde heissen, den Factor 0 könnte man beliebig hinzufügen oder weglassen. — Der Ausdruck „indirecte Operationen“ (von Subtraction Division gesagt) und „indirecte Verhältnisse“ ist ungeeignet; nicht die Operation, sondern die gewählte Erklärungsmethode ist indirect (warum nicht „inverse, umgekehrte“?) — Bei den Proportionen kommen Quadratwurzeln in Anwendung, die erst im spätern Abschnitt

erklärt werden. — Bei den Gleichungen werden zu Anfang identische und analytische nominell unterschieden, sachlich ergibt sich nachher kein Unterschied. — Die sog. englische und französische Eliminationsmethode sind genau dieselbe, nur ist bei ersterer das Verfahren den Multiplicator zu finden hier verschwiegen. Gleichwol werden beide nicht nur als verschieden aufgeführt, sogar die erstere, mangelhafte, für Anfänger empfohlen. — Die genannten Punkte sind im Vergleich zum Ganzen geringfügig, gegen dessen Vortrefflichkeit sie verschwinden. Die neue Auflage unterscheidet sich extensiv durch Hinzunahme der trigonometrischen Auflösung der quadratischen Gleichungen, der Lösung höherer Gleichungen, die auf quadratische zurückführbar sind, und des verkürzten Verfahrens der Wurzelausziehung, sowie durch Vermehrung der Aufgaben. Den Aufgaben gehen stets durchgerechnete Beispiele voraus. Die Anweisung zum Ansatz der Gleichungen ist die für den denkenden Schüler selbstverständliche, kunstlose; es ist sehr zu billigen, dass das unumwundene Aussprechen der Regel eine solche Auffassung in natürlicher Einfachheit zum Ziele nimmt.

H.

**Kritische Beleuchtung der Euklidischen Geometrie.** Von Dr. Carl Heinze, Vorsteher eines Militair-Bildungsinstituts und Städtischem Lehrer. Einleitung zu der von demselben Verfasser und in demselben Verlage erschienenen „Elementar-Geometrie für den Schulgebrauch“. Berlin 1876. Friedberg u. Mode. 24. S.

Die Elementar-Geometrie, für den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. Carl Heinze, Vorsteher eines Militair-Bildungsinstituts und städtischem Lehrer. Mit Figuren auf 4 Tafeln. Berlin 1877. Friedberg u. Mode. 74 S.

Die „kritische Beleuchtung“ nennt der Verfasser eine nur aus dem Grunde, um den neuen Elementen Eingang zu verschaffen, versuchte und darum abgedrungene. In der Tat ist sie nichts weiter als eine Bemängelung der Wortfassung, aber nicht einmal der Euklidischen, sondern zum grössten Teil der in neuern Autoren angetroffenen. Sachlich ist allein die Behauptung, die Congruenz durch Deckung zu erklären sei unmöglich, was ziemlich einseitig erörtert wird. Die letztere Schrift bietet weder dem Bericht noch der Kritik einen nennenswerten Gegenstand dar. Im Vorwort wird die Euklid'sche Methode gelästert, die versprochene gelobt ohne beide zu kennzeichnen. In der Ausführung ist von Methode keine Spur; der Verfasser giebt sich nicht die Mühe, auch nur den Anschein der vorher gepriesenen Vorzüge zu wecken. Eine Probe der Unklarheit giebt der Anfang (überschrieben „Lehrsatz“, gewöhnlich nennt man's „Er-

klärung“): „Der Ort, in welchem ein allmählig abnehmendes Ding aufhört Raum einzunehmen, ist der geometrische Punkt“. Was dem weiter hinzugefügt wird, dient nur dazu die Verwirrung zu vermehren.  
H.

Geometrische Anschauungslehre. Eine Vorschule und Ergänzung der reinen Geometrie mit 600 Fragen und Aufgaben. Von Dr. E. Kretschmer, Oberlehrer am Kgl. Friedr.-Wilh.-Gymn. zu Posen. Posen 1877. Joseph Jolowicz. 62 S.

Von diesem Buche lässt sich sagen, dass, was es sein will, es auch ganz ist. Die Idee einer instructiven, zweckgemässen Beschäftigung der Kinder mit Gegenständen der theoretischen und praktischen Geometrie mit Ausschluss der zwei logischen Tätigkeiten, Begriffsbestimmung und Schlussfolgerung, ist hier in voller Reinheit verwirklicht. Was sie üben, ist Darstellung der Gebilde, deren Beobachtung hauptsächlich in qualitativer Beziehung und Rechenschaft über dieselbe. Sie werden dadurch äusserlich vertraut mit der Welt, in welcher sie später beim Betreiben der exacten Geometrie zu leben haben, und lernen die Namen, vorläufig als Merkzeichen, kennen. Beachtung der Quantitäten findet nur in sehr engen Grenzen statt, von Winkeln werden, abgesehen von den letzten Abschnitten, nur rechte zugezogen, wiederholt aber auf die Gleichheit von Längen hingewiesen; hieran knüpft sich die Lehre vom Messen, welche besonders ausführlich auf das Feldmessen eingeht.  
H.

Die Elemente der Mathematik für Seminarien und Mittelschulen. Von Martin Schneider, ordentlichem Lehrer am herzoglichen Lehrerseminar zu Cöthen. Erster Theil: Planimetrie. Cöthen 1877. Otto Schulze. 128 S.

Das Lehrbuch nimmt Bezug auf einen Vorcursus des Anschauungsunterrichts. Zu Anfang jedes Abschnitts werden die Ergebnisse desselben geordnet aufgestellt. Diese werden dann, gleichsam als Axiome, zum Ausgangspunkt der Argumentation genommen. Blieb es hierbei unausgesprochen, dass unbewiesene Sätze definitive Gültigkeit haben sollen, so hätte der stillschweigende Uebergang zur Argumentation wenigstens nicht zum verhüllten Trugschluss benutzt werden sollen, wie es namentlich hier beim Parallelsatz geschieht. Correcerweise musste dieser schon im Vorcursus enthalten sein, wenn die Auffassung des Winkels als Richtungsunterschied Ergebniss sein sollte. Es musste vorher ausführlich die Transponibilität der Figuren erst one, dann mit Stellungsänderung gelehrt werden; dann erst hatte der Richtungsunterschied einen Sinn; dann aber waren auch alle Parallelsätze

gleichzeitiges Resultat der Beobachtung. Das Vorliegende verkehrt den Zusammenhang und baut einen Scheinbeweis auf einen unerklärten Begriff. Es ist noch zu erwähnen, dass jedem Abschnitt zahlreiche leichte Aufgaben beigelegt sind, und ein besonderer Abschnitt die rechnende Geometrie behandelt. H.

Lehrbuch der Physik. Von Peter Münch, Director der Realschule erster Ordnung zu Münster. Mit 301 in den Text gedruckten Abbildungen und einer Spectraltafel in Farbendruck. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit einem Anhang: Die Grundlehren der Chemie. Freiburg im Breisgau 1876. Herder. 339 S.

Vierte, verbesserte Auflage 1877.

Die zweite Auflage ist im litt. Ber. 217. besprochen. Die Vermehrung, mit welcher die gegenwärtige erscheint, besteht in der Spectraltafel und dem Anhang über Chemie, letzterer bestimmt für Gymnasien und solche Aultalten, in deren Lehrplan ein systematischer Unterricht in der Chemie nicht aufgenommen ist. Wenn ausserdem die Vorrede eine nicht unerhebliche Anzahl von Verbesserungen und kleineren Zusätzen ankündigt, so sind erstere entschieden wesentliche zu nennen. Der Vortrag ist jetzt ein gründlich durchgearbeiteter; er führt namentlich bei Beginn der Behandlung des einzelnen Themas sofort zur exacten Auffassung der Hauptpunkte. Was über Mängel in der 2. Auflage im Bericht gesagt ist, hat auf die dritte keine Anwendung. Es lässt sich das Lehrbuch jetzt zu den empfehlenswerthesten für Gymnasien zählen. — Die vierte Auflage ist bis auf wenige kleine Aenderungen, z. B. Abkürzung der Deduction der Wellenbewegung, übereinstimmend. H.

Grundriss der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Im Auftrage der Königlichen Kommission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg ausgearbeitet von Dr. Ludwig Blum, Professor an der K. Realanstalt in Stuttgart. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 99 Abbildungen in Holzschnitt. Leipzig und Heidelberg 1876. C. F. Winter. 155 S. kl. 8°.

Dies kleine Buch giebt in gedrängter Kürze aus den Lehren der Physik das Notwendigste zur Ausbildung für gewerbliche Berufszweige. Den grössten Teil macht die Mechanik aus, doch begreift es auch Schall, Wärme, Elektrizität nebst Magnetismus und Galvanismus, sowie einiges über das Licht. Die technische Verwendung ist stets mit theoretischen Vortrag in unmittelbarem Anschluss. Die allgemeinen Erklärungen sind grossenteils sehr ungenügend; oft nichts weiter als

Namenaufstellung mit Hinweisung auf die Erscheinung ohne Bezeichnung der Punkte, in welchen die Auffassung stattfinden muss. So ist z. B. die Erklärung von specifischem und absolutem Gewicht derart, dass gar kein Unterschied daraus erhellt. Weit besser sind die Zusammenstellungen von Gesetzen; diese zeichnen sich sogar vor manchen Lehrbüchern durch correcte Fassung aus; letzteres gilt insbesondere von den allgemeinen Bewegungsgesetzen, nur hätte hier, zur Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden, der Fall der Nichtbewegung infolge der Reibung nicht fehlen dürfen. Im ganzen lässt sich das Buch als vielfach besserungsfähig bezeichnen. H.

Lehrbuch der Physik. Einschliesslich der Physik des Himmels (Himmelskunde), der Luft (Meteorologie) und der Erde (Physikalische Geographie). Gemäss der neueren Anschauung für Gymnasien, Realschulen und ähnliche Lehranstalten bearbeitet von Professor Dr. Paul Reis, Gymnasiallehrer in Mainz. Dritte, stark vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 276 in den Text gedruckten Holzschnitten und 829 Aufgaben nebst Lösungen. Leipzig 1876. Quandt u. Händel. 740 S.

In diesem Lehrbuch ist keine Methode vorwaltend, vielmehr von allen Methoden der beste Gebrauch gemacht um den physikalischen Unterricht so ergiebig als möglich werden zu lassen. Als erster Gesichtspunkt zeigt sich überall die Orientirung in der Erscheinung und deren Gesetzen. Die Begründung hat sich das Lehrbuch nicht zur allgemeinen Vorschrift genommen, wol aber alle aus dem Schulunterricht zu Gebote stehenden Mittel der elementaren Rechnung und der leichteren Experimente in Anwendung gebracht, welche zur Begründung beitragen können. Demgemäss kommt keine Differential- und Integralrechnung vor, doch ist auch kein Versuch gemacht, umständliche algebraische Deductionen an deren Stelle zu setzen, vielmehr genügt, wo kein einfacher bündiger Beweis möglich ist, die Erläuterung des Sachverhalts. Ein solches Verfahren begegnet einer nicht unbedeutenden Schwierigkeit. Das Lehrbuch unternimmt es alle Theorien auf neuestem Standpunkte vorzutragen. Hierdurch wird der Schüler mit ausgedehnten Gebieten bekannt gemacht, auf denen noch in unzähligen Punkten grosse Ungewissheit herrscht, wo aber für ihn alle Fähigkeit der Controle längst aufgehört hat. Unter diesen Umständen ist es nicht leicht eine unklare und irreleitende Mischung von halbreifen Ideen fernzuhalten, welche allen Zweck des Unterrichts zunichte macht. Der Verfasser hat es aber verstanden in solchen Theorien die Hauptsache derart in den Vordergrund zu stellen und denjenigen Lehren, welche wol als sicher gelten dürfen, soviel instructive Seiten abzugewinnen, dass die ungewissen Punkte

als unerheblich dagegen verschwinden. Die exacte Fassung der Grundbegriffe und Grundlehren, namentlich in der Mechanik, ist zufriedenstellend, wenn auch die Möglichkeit einer Verbesserung im einzelnen nicht ausgeschlossen sein soll; jedenfalls zeichnet sie sich im Vergleich mit den meisten Lehrbüchern aus. Hervorzuheben ist noch, dass jede Gelegenheit zu Uebungsaufgaben reichlich benutzt wird. H.

Lehrbuch der Physik für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. Von Dr. Johann Robert Boymann, Professor am Königlichen Gymnasium zu Coblenz. Mit 305 in den Text eingedruckten Holzschnitten und einer Spectraltafel. Dritte, verbesserte Auflage. Köln und Neuss 1877. L. Schwann. 442 S.

Nach der Lehre von den allgemeinen Eigenschaften der Körper folgt hier zuerst die Chemie, dann die Mechanik, die Lehre vom Magnetismus, der Elektrizität, dem Schall, dem Licht und der Wärme. Der Vortrag ist ein ziemlich trockener, der zum technischen Ausdruck der Lehren wenig hinzutut. Obwol erhebliche Ausstellungen nicht zu machen sind, so ist doch auch andererseits kein rechter pädagogischer Gedanke, kein Bestreben zum klaren Verständniss und zur exacten Auffassung hinzuführen, darin zu erkennen, und die im Ganzen enthaltene methodische Arbeit eben nicht gross. Es macht vielmehr den Eindruck, als ob die Erörterung jedes Punktes nur der Erfüllung gegebener Vorschrift dienen, nichts was etwa gefordert werden könnte vermissen lassen solle. Eine solche Bedeutung scheinen namentlich die zahlreichen Beweise (wenn man sie so nennen darf) zu haben, die, da sie grossenteils nicht streng bündig, ziemlich zwecklos in pädagogischer Hinsicht sind. Geradezu unrichtig ist z. B. die Deduction der Gesetze der Centralbewegung mit Statuirung einer Tangentialkraft, da ja die Centralanziehung als einzig wirkende Kraft angenommen war. H.

Elementarbuch der Physik. Von Dr. R. Caspar, Oberlehrer am Königlichen Gymnasium zu Bonn. Freiburg i. Br. 1876. Herder. 225 S.

Der Verfasser bestimmt das Buch, ohne den Gebrauch an Schulen auszuschliessen, zunächst und hauptsächlich für den Selbstunterricht von Lesern ohne besondere mathematische Vorbildung, die es ohne feste Aufmerksamkeit, ohne selbsteigenes Nachdenken sollen gebrauchen können. Es wird deshalb nicht bloss auf die höhere Analysis, sondern auch auf die Trigonometrie nirgends Bezug genommen, und nur Addition und Multiplication in einfachster Gestalt in Anwendung gebracht. Dass man mit so beschränkten Hilfsmitteln bei gehörigem Geschick



eine wirkliche, richtige Naturerklärung in ziemlichem Umfang geben kann, ist bekannt und durch manche Bearbeitungen dargetan. Eine solche liess sich nach den im Vorwort entwickelten Grundsätzen erwarten; auch entspricht dem der Anfang des Buchs. Doch weiterhin zeigt sich bald, dass der Verfasser es bequemer gefunden hat, auf vulgäre Vorstellungen zu bauen als zu belehren und aufzuklären. Schon auf Seite 15. statuirt er 2 Arten von Kräften, solche die momentan, und solche die in der Zeit wirken; die Wahrheit dass alle Kräfte in der Zeit wirken, die momentane Wirkung, also auch die Wirkung unendlich vieler momentaner Impulse null ist, bleibt ganz verschwiegen, und selbst die dauernde Wirkung wird als aus wiederholten Impulsen bestehend dargestellt. Das heisst, der Verfasser sucht denjenigen Laien zu dienen, die in der Erklärung nicht die Reduction auf einfache, durchschauliche, sondern auf geläufige, unentwickelte Vorstellung suchen. Wo eine solche, aus den Irrthümern der Menge Vorteil ziehende Praktik sichtbar wird, brauchen wir nicht von andern Fehlern, z. B. dass nach dem (ungeschickt gewählten) Wortlaut der Schwerpunkt ein beliebiger Punkt im Körper ist, zu reden.

H.

Lehrbuch der Physik für die oberen Classen der Gymnasien und Realschulen. Von Fr. Jos. Pisko, Director der Staatsrealschule in Sechshaus bei Wien. Vierte, verbesserte und theilweise umgearbeitete Auflage. Mit 377 im Texte aufgenommenen Holzschnitten. Brünn 1877. Carl Winiker. 453 S.

Das Lehrbuch geht etwas reichlicher auf die quantitativen Elemente ein und bietet dadurch dem Schüler Gelegenheit zur Selbstthätigkeit; nur ist es mit sehr geringer Sorgfalt bearbeitet: Fehler wie der auf Seite 72., wo der Schwerpunktsbegriff ohne Rücksicht auf Lagenänderung des Körpers erörtert wird, als ob er schon durch das Gleichgewicht der Schwere in einer Lage bestimmt wäre, kommen häufig vor. Gleichwie hier werden oft die notwendigen Bestimmungen erst einzeln im weitem Verlauf hinzugebracht und zwar ohne orientirende Hinweisung, so dass man aus vielen Stellen zusammensuchen muss, was gleich anfangs hätte vollständig gesagt werden können. Ganz besonders gilt dies von den Aufstellungen in Betreff der Kräfte. Manche (z. B. Reis s. oben) haben es einen nicht abzuändernden Uebelstand genannt, dass „Kraft“ in so verschiedenem Sinne gesagt wird. Natürlich ist es nur die Schuld des einzelnen Schriftstellers oder Lehrers, wenn er den Misbrauch nachahmt, und Effect und animalische Kraft, d. i. Effect in der Zeiteinheit, mit Zug und Druck, dem allein der Name Kraft zukommt, gleich benennt; denn wir besitzen die unterscheidenden Wörter. Allein der Hauptgrund des Mis-

brauchs liegt wol darin, dass die unklare Begriffsmischung denen eine Handhabe bietet, welche ihre Deductionen mehr auf leichte Zustimmung als auf Evidenz einrichten. Wieweit ein solches Motiv im Vorliegenden zugrunde liegt, mag unentschieden bleiben. Die Begriffe werden factisch in Vermischung gehalten; der Verfasser sorgt im einzelnen dafür, dass er dem Urtheil entgeht, etwas falsches gesagt zu haben, er sorgt aber nicht dafür, dass der Schüler richtig scheiden und die Beweise controliren lernt. Bei Herleitung der Gesetze der Centralbewegung wird sogar der Schüler zu der falschen Meinung verleitet, das Parallelogramm der Kräfte gelte auch vom Stosse. Der Kundige sieht freilich aus dem Folgenden, dass im Grunde nur Bewegungen, nicht Kräfte zusammengesetzt werden. Das Ganze ist sehr entfernt ein Muster von Methode abzugeben. H.

Chemische Erscheinungen. Ein Anhang zu A. Trappe's Schul-Physik. Bearbeitet von Dr. Gustav Stenzel, Oberlehrer an der Realschule am Zwinger zu Breslau. Mit 8 in den Text gedruckten Abbildungen. Breslau. Ferdinand Hirt. 36 S.

Das Buch von Trappe, dessen Anhang das Gegenwärtige bilden soll, ist im 236. litt. Ber. besprochen. Es werden die wichtigsten 34 einfachen Stoffe, anfangend mit Wasserstoff, Chlor, Sauerstoff, aufgeführt, von jedem die Haupteigenschaften genannt, beim Sauerstoff die Lehre von den Verbindungen erörtert und eine kleine Anzahl von Versuchen angegeben. Die Bestimmung ist daher wol nur den Schülern eine vorläufige Vorstellung von den Gegenständen der Chemie zu verschaffen. H.

---

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXXVIII.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Abhandlungen z. Gesch. d. Mathematik. 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Fortschritte, die, d. Physik im J. 1872. 28. Jhg. Red. v. B. Schwalbe. 2. Abth. 8. Berlin, G. Reimer. 14 Mk. 25 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 7. Bd. J. 1875. 2. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 20 Pf.

Wittstein, K., Gedächtnissrede auf Carl Friedrich Gauss, zur Feier d. 30. April 1877. 8. Hannover, Hahn. 40 Pf.

## Methoden und Principien.

Erdmann, B., d. Axiome d. Geometrie. 8. Leipzig, Voss. 4 Mk. 80 Pf.

## Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, E., method.-geordnete Aufgabensammlg., mehr als 8000 Aufg. enth., üb. alle Theile der Elementar-Arithmetik. 6. Aufl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Frischauf, J., Tafeln z. Berechng. barometr. Höhenmessgn. 8. Wien, Hölder. 60 Pf.

Lieber, H., u. F. v. Lüthmann, Leitf. d. Elementar-Mathematik. 3 Thle. 8. Berlin, Simion. à 1 Mk. 25 Pf.

Lübsen, H. B., ausführl. Lehrb. d. Analysis zum Selbstunterricht. m. Rücksicht auf die Zwecke d. prakt. Lebens. 7. Aufl. 8. Leipzig, Brandstetter. 3 Mk. 60 Pf.

Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehr- u. Handbuch. 1. Thl. 4. Lfg. 8. Strassburg, Schneider. 75 Pf.

Neumeyer, L., Hülftafeln für barometr. Höhenmessgn. 8. München, Oldenbourg. 4 Mk. 50 Pf.

Tietjon, F., u. P. Lehmann, Tafel vierstell. Logarithmen. 4. Berlin, Dümmler. 1 Mk.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Dölp, H., d. Determinanten, nebst Anwendg. auf d. Lösg. algebr. u. analytisch-geometr. Aufgaben. 2. Aufl., bearb. v. W. Soldau. 8. Darmstadt, Brill. 2 Mk.

Montag, J. B., prakt. leichtfassl. Anleitg. z. Buchstabenrechng. u. Algebra. 5. Aufl. 8. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Thomae, J., üb. e. specielle Klasse Abel'scher Functionen. 4. Halle, Nebert. 4 Mk. 50 Pf.

### Geometrie.

Brockmann, F. J., Lehrb. d. elementaren Geometrie. 1. Thl. Die Planimetrie. 2. Aufl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Delabar, G., d. Elemente d. darstellenden Geometrie. 2. Aufl. 4. Freiburg, Herder. 2 Mk. 20 Pf.

Erlcr, W., d. Elemente d. Kegelschnitte in synthet. Behandlg. 8. Leipzig, Teubner. 60 Pf.

Ermittelung, die, d. Potentialcoordinaten u. d. Krümmungslinien e. gegebenen Niveaufläche durch blosse Quadraturen. 4. Freiberg, Engelhardt. 1 Mk. 25 Pf.

Fort, O., u. O. Schlömilch, Lehrb. d. analyt. Geometrie. 1. Thl. Analyt. Geometrie d. Ebene von O. Fort. 4. Aufl. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Jenny, A., d. Ellipsoid elementar bearbeitet. 8. Basel, Schweighauser. 1 Mk.

Klein, B., üb. d. geradlinige Fläche dritter Ordnung u. deren Abbildg. auf e. Ebene. 8. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 50 Pf.

Müller's, J. H. T., Lehrb. d. ebenen Geometrie f. höhere Lehranst. 2. Aufl. hrsg. v. K. L. Bauer. 3. Thl. 8. Halle, Waisenhaus. 3 Mk.

Piorek, J., Einleitg. in die kinemat. Geometrie, verbunden m. e. elementaren Behandlg. d. cycl. Curven. 8. Hildesheim, Gerstenberg. 1 Mk. 50 Pf.

Reye, H., d. Geometrie d. Lage. 2. Aufl. 1. Abth. 8. Hannover, Rämpfer. 5 Mk.

Sanda, F., deskriptiöní geometrie pro vyšší třídú škol reálných. 8. Prag, Kober. 4 Mk. 20 Pf.

Wiegand, A., Lehrb. d. Stereometrie u. sphär. Trigonometrie. 8. Aufl. 8. Halle, Schmidt. 1 Mk. 50 Pf.

### **Geodäsie und praktische Geometrie.**

Jordan, W., Handb. d. Vermessungskunde. 2. Aufl. 1. Lfg. 8. Stuttgart, Metzler. 5 Mk.

### **Optik.**

Farbenkreis in 15 Abstufn. m. 20 Anwendungstafeln z. Complemente u. Triaden. Fol. Berlin, Czihakzky. 20 Mk.

### **Astronomie und Meteorologie.**

Beobachtungen, astronom., magnet. u. meteorologische, an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1876. Hrsg. v. C. Hornstein. 4. Prag, Calve. 7 Mk. 50 Pf.

Kerz, F., d. Entstehung d. Sonnensystems. 2. Aufl. 8. Darmstadt, Schlapp. 10 Mk.

Littrow, J. J. v., d. Wunder d. Himmels. 6. Aufl. 11—14. Lfg. 8. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Schmidt, unser Sonnenkörper nach s. physikal., sprachl. u. mytholog. Seite hin betrachtet. 8. Heidelberg, Winter. 3 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Ges. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 12. J. 1. Hft. 8. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

### **Nautik.**

Jahrbuch, kleines naut. f. d. J. 1878. 8. Bremerhaven, v. Vangerow. 60 Pf.

### **Physik.**

Crüger, J., Grundzüge d. Physik mit Rücksicht auf Chemie. 18. Aufl. 8. Leipzig, G. W. Körner. 2 Mk. 10 Pf.

Handl, A., Lehrb. d. Physik f. d. oberen Klassen der Mittelschulen. 8. Wien, Hölder. 2 Mk. 60 Pf.

Kohlrausch, F., Leitf. d. prakt. Physik. 3. Aufl. 8. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Zeuner, G., Grundzüge d. mechan. Wärmetheorie. 2. Aufl. 8. Leipzig, Felix. 13 Mk.

### **Vermischte Schriften.**

Berichte üb. d. Verh. d. k. sächs. Ges. der Wissensch. zu Leipzig. Mathemat.-phys. Classe. 1877. I. 8. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Repertorium d. liter. Arb. aus d. Gebiete d. reinen u. angewandten Mathematik. Originalberichte d. Verfasser. Gesammelt u. hrsg. v. L. Königsberger u. G. Zeuner. 1. Bd. 5. Hft. 8. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte d. mathemat.-physikal. Classe d. k. b. Akad. d.  
Wiss. zu München. 1876. 3. Hft. 8. München, Franz. 1 Mk. 30 Pf.  
— dass. 1877. 1. Hft. 8. Ebd. 1 Mk. 30 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. Hrag. v. Schlömilch,  
E. Kahl u. M. Cantor. Suppl. z. 22. Jahrg. 1877. 8. Leipzig,  
Teubner. 5 Mk.

---

# Litterarischer Bericht

CCXLII.

## Methode und Principien.

Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie. Von Dr. Benno Erdmann, Privatdocenten der Philosophie an der Universität zu Berlin. Leipzig 1877. Leopold Voss. 174 S.

Die vorliegende Schrift zeichnet sich als philosophisches Erzeugniss in hohem Grade aus, wenn gleich es nur Anfänge von bester Vorbedeutung sind, welche dieselbe einer Beachtung besonders wert machen. Zunächst ist sie die erste Antwort, welche den aus den exacten Wissenschaften hervorgegangenen philosophischen Theorien von Seiten eines wirklich befähigten Vertreters der Fachphilosophie zuteil wird. Ohne mathematische Bildung wird wol niemand eine solche Befähigung erlangen; doch hat man bei der in Rede stehenden nicht sowol an mathematische Kenntnisse als vielmehr an diejenige gesündere Logik zu denken, welche allein Frucht exact wissenschaftlicher Fachstudien sein kann und sich von der an den formalen Bedingungen klebenden gemeinen Logik durch sehr sichtliche Ueberlegenheit unterscheidet. Hierhin gehört vor allem das reservirte Urtheil, welches plausible Schlüsse verschmäht und sich nicht auf allgemeinen festen Glauben verlässt, eine Eigenschaft die gegenüber dem Ehrgeiz weitgreifender Schlüsse nicht hoch genug geschätzt werden kann. Obwol aber der Verfasser sich selbst sehr frei von Vorurteilen erhalten hat — bis zu welcher Grenze ist nicht wol zu erkennen — so hat er doch nicht mit dem Vorurteil gebrochen, vielmehr bewegt sich

seine ganze Darstellung in der Sphäre der Kant'schen Vorurteile, die er nicht zu teilen scheint, die er jedoch, sei es auch manchmal nur stylistisch, benutzt, vermutlich um von den darin befangenen Lesern besser verstanden zu werden. Zum Teil mag dies mit Glück geschehen sein, zum Teil aber vermindert sich auch dadurch die Leistung bedeutend. Das erstere gilt von den beiden ersten Capiteln: „Zur Entwicklungsgeschichte des Axiomensystems“ und „Die Axiome der Euklidischen Geometrie“ — besonders bemerklich im zweiten, das letztere in den beiden übrigen: „Philosophische Consequenzen“ und „Grundzüge einer Theorie der Geometrie“. Das zweite Capitel beginnt mit Stellung der Aufgabe den Raum zu definiren. Nach gewöhnlichen Begriffen erfordert die Definition ein Allgemeineres, unter welches das Object zu subsumiren ist; der Raum aber ist individuell und doch kein Individuum aus einer Gattung. Nach praktischem Gesichtspunkt folgt daraus natürlich, dass der gewöhnliche Begriff der Definition von keiner Anwendung auf den Raum ist, und wir den Zweck der Definition nicht ausser Acht lassen dürfen, um die dem Gedanken entsprechende Form der Begriffsbestimmung zu finden. Der Zielpunkt des Verfassers lag aber ganz wo anders als in einer correcten Begriffsbestimmung; ihm kam es auf Beleuchtung der Bedeutung der vorliegenden Begriffserweiterung an, die in den Riemann-Helmholtz'schen Aufstellungen bereits in bestimmter Richtung vollzogen war. Hierzu bot sich ihm die zwar nicht sachlich richtige, sondern im Grunde nur stylistische, zur Vereinfachung brauchliche Motivirung in der formellen Forderung der Definition dar. Er macht aus der Definition des Raumes ein Problem und lässt die Erweiterung des Begriffs als Weg zur Lösung erscheinen, was wol schwerlich seiner ernsten Meinung entsprechen wird. Es leuchtet gewiss sofort die Verkehrtheit ein, wenn jemand in den Anfangsgründen der Geometrie, um jener formellen Forderung zu genügen, den Kreis als specielle Ellipse definiren wollte. Anscheinend subsumirt zwar auch die gewöhnliche Definition, die den Kreis eine krumme Linie von constantem Centralabstand nennt; allein hier ist die krumme Linie nur ein indifferenter Titel, das Erkenntnissmoment liegt im constanten Abstand, und beiläufig wird zu einer künftigen Bildung des Curvenbegriffs mit einer Instanz ein Anfang gemacht. Nur weil die Definition der psychischen Genesis Rechnung trägt, wird sie für annehmbar gehalten, eine solche, die bloss formelle Bedingungen erfüllt, würde die Schuldocrin verwerfen. Diese psychische Genesis aber ist es, was der Verfasser ganz und gar bei Seite lässt; er begnügt sich mit äusseren Vergleichungspunkten im Gebiete fertiger Ideen. Verglichen wird die geordnete räumliche Anschauung mit der analytischen Darstellung einer mehrfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit; beide decken sich teilweise, doch wird die letztere nicht durch die Grenzen der ersteren



beschränkt und befähigt uns demgemäss auch den Begriff des Raumes in ideeller Auffassung zu erweitern, zunächst also die Beschränkung auf 3 Dimensionen aufzuheben, dadurch vermittelt aber auch die Bedeutung der Bedingungen, durch welche die räumlichen Gebilde bestimmt sind, in grösserem Umfange aufzufassen, was sich schon bei 3 Dimensionen gegenüber der Planimetrie geltend macht. Wenn nun der Verfasser am Schlusse des 1. Capitels von seiner Aufgabe spricht, „die mathematischen Entwicklungen, die zur Aufstellung des Axiomensystems geführt haben, einer Prüfung zu unterziehen, die ihre analytische Berechtigung und anschauliche Bedeutung zum Gegenstande hat“ — so ist in der That von einer solchen Prüfung nichts zu sehen; hierzu würde ein Eingehen auf das mathematische Detail und ein Aufnehmen psychologischer Gesichtspunkte schwerlich zu entbehren gewesen sein. Die Darstellung geht in keinem Punkte über die in fremden Arbeiten gegebenen Momente hinaus; doch bot schon deren Wiedergabe in verständlichem Zusammenhang hinreichenden Stoff, und man wird darin gern eine Leistung anerkennen. War nun bis dahin die gewählte formell logische Verbindung so indifferent und dem wirklichen Gegenstand fremd und doch der Hervorhebung und Schattirung günstig wie die Farbe einer Bildsäule, so hörte sie offenbar auf gleichgültig zu sein, wo der Verfasser zu den philosophischen Consequenzen überging. Hier wird das ganze Ergebniss des Raisonnements dadurch entstellt und verschoben, dass er die Disjunctionen und logischen Verhältnisse von seinen Gegner Kant ohne alle Prüfung aufnimmt. Kant hat in der Kritik der reinen Vernunft nicht nur keine Auskunft über den Sinn seines Apriori gegeben, sondern dasselbe auch in nebelhafter Verschwommenheit bald mit Notwendigkeit, bald mit Allgemeinheit, bald mit Ursprünglichkeit, bald mit Subjectivität permutirt und gleichwie selbstverständlich als identisch betrachtet. Das aber leuchtet auch unausgesprochen aus allem hervor, dass er die Vernunft als constant, jeder Genesis unfähig ansieht: es kann davon nur unverändert zur Erscheinung und Besinnung gelaugen, was latent vorher da war. Dass er mit der Genesis auch die Möglichkeit aller Erklärung und dadurch das Recht alles Urtheils über den Ursprung leugnet, ist ihm nicht eingefallen. Das Apriori, d. i. das Stammen aus der Vernunft, steht daher zur Erfahrung factisch in keinem andern Gegensatz als die absolute Unkenntniss zur theilweisen Kenntniss oder Forschung. Indem der Verfasser (auf S. 91.) direct die Frage aufnimmt, „ob der Inhalt der Raumvorstellung in nativistischem Sinne a priori oder in empiristischem a posteriori erworben wird“ — überspringt er die Hauptsache, die Prüfung der Disjunction selbst. Auf Grund des fingirten Gegensatzes scheint die Argumentation, welche zur Entscheidung nach letzterer Seite hin führt, eine äusserst klare und treffende zu sein. „Aus den bekannten Gesetzen

unserer sinnlichen Wahrnehmungen können wir die Reihe der sinnlichen Eindrücke herleiten, welche eine sphärische oder pseudosphärische Welt uns geben würde, wenn sie existirte. Da demnach andere Erfahrungen den Inhalt unserer Raumvorstellungen ebenfalls verändern würden, so ergiebt sich, dass unsere Raumanschauung nicht unabhängig von aller Erfahrung gegeben sein kann, dass sie eine empirische Vorstellung sein muss.“ Dem Beweise fehlt in der That nichts als der Gedanke des Gegentheils, das bestritten werden soll; in Ermangelung eines solchen Gedankens aber fällt er in nichts zusammen. Es ist auch so wenig ein Schritt zu einer bessern Erkenntniss als es eine Naturerklärung angebahnt haben würde, wenn jemand dem Zeus die Bewirkung des Donners bestritten, ihn aber sonst stillschweigend als Urheber des Wetters gelten gelassen hätte. Wir können in dem Resultat, wie es hier gefasst ist, kein Betreten einer wissenschaftlichen Bahn, sondern nur eine Reform innerhalb eines abergläubischen Cultus (des Apriori) sehen. Der Verfasser mag von dessen Nichtigkeit überzeugt sein und denken, auf eine Null mehr oder weniger komme es nicht an. Dass aber hier die Null so zu sagen nicht Addend, sondern Factor ist, zeigt sich, sobald man nur einigermaßen den psychischen Hergang zuzieht. Die Schrift umgeht nämlich die Frage ganz: Können wir zu der analytischen Darstellung einer geordneten, stetig erweiterten mehrfachen Mannichfaltigkeit ohne Hülfe des empirischen, aus der sinnlichen Wirklichkeit entnommenen Raumes gelangen? Dass dies nicht der Fall ist, zeigt erstlich der Versuch. Ohne Zuziehung des Raumes können wir eine geordnete Zahlenreihe nur mit Hülfe der Zeit, aber auch damit nicht die Beziehung mehrfacher Ausdehnung bilden. Zweitens ist auch dem analytischen Begriff der erweiterten Geometrie eine Schranke geblieben, die er vom euklidischen Raume aufnehmen muss, die indes auffallenderweise alle Bearbeiter solcher Theorien ausser Acht gelassen haben. Alle Gebilde mehrfacher Ausdehnung haben nur dadurch bedingt einen Sinn, dass irgend eine  $n$ -fache Mannichfaltigkeit linear ist, gleich dem Raume der euklidischen Gebilde. Obgleich diese Zahl  $n$  in ihren Formeln enthalten ist, betrachten jene Autoren doch ihre Geometrie als eine absolute. So sorgfältig nun auch Erdmann nach Vorgang von Helmholtz jede Aeusserung darüber gemieden hat, ob er das analytische Erzeugniss als empirisch oder rationalistisch ansehe, so kann die Kritik an der Frage nach dessen Ursprung nicht vorbeigehen. Jenes Schweigen ist eine Schonung des unter Kantianischen Philosophen und Mathematikern herrschenden Vorurtheils, welche selbst durch den Nachweis des empirischen Ursprungs des Raumbegriffs nicht darauf aufmerksam werden, dass ihr Glaube an das Apriori der mathematischen Begriffe nichts als ein Glaube ohne Grund war, der vor der Forschung zurückweicht, die eben dadurch, dass sie jetzt

nach Beweisen für die Notwendigkeit des vulgären, beschränkten Raumbegriffs suchen, verraten, dass von Kant bis dahin niemand an Begründung gedacht hat, eine Schonung die dem klaren Einblick in die Sache äusserst hinderlich ist. Erkennt man an, dass der analytische, weitere Raumbegriff selbst empirisch gewonnen und auf den euklidischen basirt ist, so folgt daraus die Notwendigkeit der euklidischen Geometrie für alle Fälle, selbst wenn künftig beobachtete Tatsachen uns zur Ueberschreitung der euklidischen Grenzen zwingen sollten. Diese Notwendigkeit ist aber in einer Hinsicht das diametrale Gegenteil der cartesischen, welche die Kantianer im Sinne haben, die noch immer in der Meinung befangen sind, die Notwendigkeit, in der der Geist sich findet, bestimme auch die Tatsachen der Natur. Sie wird vielmehr dem Geiste durch seinen Zweck auferlegt, den eben jene Tatsachen bestimmen. Nach cartesischem Vorurteil hat der Raum nur 3 Dimensionen, wenn der Geist nicht mehr als 3 denken kann. Das ist aber grundlos und irrig; der Geist muss die Tatsachen anerkennen, auch wenn er sie nicht begreift, und dann seine Fähigkeiten zu erweitern suchen, um sie zu begreifen. Im vorliegenden Falle geht nun die Erweiterung der Denkfähigkeit dem Zwange der Tatsachen voraus: noch ist keine Abweichung der Dreieckswinkelsumme entdeckt, und schon sind wir für den Fall der Entdeckung mit einer Theorie gerüstet. Aber die Theorie steht durch ihre Grundbegriffe auf dem Boden eines linearen (ebenen) Raumes, der also als Basis aller Raumtheorie nie in Frage kommen, vielmehr allein sich als unzureichend erweisen kann. Wenn also Erdmann (S. 170.) sagt, für jenen Fall würde eine berichtigte Raumvorstellung den Inhalt der geometrischen Untersuchung bilden, so stellt er damit die Sache in ein unrechtes Licht, als ob eine Vertauschung der euklidischen Geometrie mit einer andern in eventueller Aussicht stünde. Einen linearen Raum kann keine Geometrie, auch die Bolyai'sche nicht umgehen. Ob wir die dritte Dimension zur Grundlegung entbehren könnten, und nicht etwa die analytischen Raumbegriffe auf solcher Basis zu beschränkt ausfallen würden, mag unentschieden bleiben; jedenfalls erleichtert uns die mit Hülfe der Gesichtseindrücke erworbene Dreidimensionen-Anschauung die Bildung der Grundbegriffe. Diese Hülfe hört auf, sobald wir mehr als dreifache Mannichfaltigkeit untersuchen, und die aus der dreifachen herrührenden Begriffsbeschränkungen übertragen sich auch auf alle Erweiterungen. So stellt sich das sachliche Verhältniss überall anders dar, wenn man die Genesis der Vorstellungen und Begriffe zu Rate zieht, als es nach der oberflächlichen Kant'schen Logik erscheint. Letztere vermag wol darzutun, was auf dem Boden der vulgären Meinung steht, aber nicht über Principien zu entscheiden. Dies wird gewiss der Verfasser empfunden haben: so vielen richtigen Urteilen man auch in der Schrift begegnet, die

einen der vulgären Meinung nicht entsprechenden, tiefern Einblick kund geben, so ist doch kein einziges zur Evidenz gebracht, jedes erscheint als persönliche Ansicht; daher möchte auch eine Mitteilung der einzelnen der Sache nicht förderlich sein. Wer nur das reich gegliederte Inhaltsverzeichniss gelesen hat, muss das Vorstehende für einen sehr einseitigen Bericht halten. Allein von dieser Gliederung ist in der Ausführung nichts zu finden; auch die Schrift selbst bleibt bei dem einen, hier besprochenen Thema stehen. Hoppe.

Die Bedeutung der Pangeometrie. Mit Bezug auf den Aufsatz: „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, von Helmholtz, Berlin, April 1876“. Von Schmitz-Dumont. Mit Holzschnitt im Text. Leipzig 1877. Erich Koschny. 47 S.

Das Beste, was diese Schrift enthält, ist entschieden die in den ersten Abschnitten an der Helmholtz'schen Darstellung geübte Kritik. Nach der früheren Schrift desselben Verfassers, „Zeit und Raum etc.“ (besprochen im 232. litt. Ber. S. 41.) in welcher er mit Waffen der speculativen Philosophie erfolglos gegen Gauss und Riemann polemisirte, musste es höchlich überraschen ihn hier auf den Boden der psychischen Beobachtung zu finden, wo es ihm leicht wird die Schwächen der Helmholtz'schen Betrachtungsweise zu enthüllen, leicht einmal weil er die fremde Beobachtung benutzt, dann weil er nicht wie Helmholtz damit ein positives Ziel verfolgt. Denn in der That unternimmt er mit keinem Worte die äusserst klar nachgewiesenen Mängel zu verbessern, sein Sieg über den Mathematiker soll bloss die Angriffe fern halten, denen er von dieser einen Seite sich ausgesetzt fand, ihn rechtfertigen, wenn er, wie im weitem geschieht, die Beobachtung verlässt und in die speculative Philosophie zurückverfällt. Ein näheres Eingehen auf seine Kritik hat der Verfasser dadurch sehr begünstigt, dass er die Stellen, auf die sie sich bezieht, in extenso wiedergiebt. An erster Stelle führt Helmholtz aus, wie Wesen, die auf einer Fläche lebten, ihrem Raume nur 2 Dimensionen zuschreiben, und unfähig sein würden sich von einem Heraustreten aus der Fläche, auf die sich alle Wahrnehmungen bezögen, eine Vorstellung zu machen. Er erklärt, was er unter „Vorstellung“ versteht, fasst dieselbe jedoch als reine Reproduction auf. Schmitz-D. erinnert hiergegen, dass die Vorstellung auf transformirenden Geistesacten beruht, scheint aber gleichwie Helmholtz keine Ahnung davon zu haben, dass von der Wahrnehmung ganz dasselbe gilt. Er meint mit der Wahrnehmung die unmittelbar gegebene sinnliche Tatsache bezeichnet zu haben; hierauf nämlich allein stützt sich seine Unterscheidung von der Vorstellung. In Wirklichkeit werden aber nicht diese, sondern stets transformirte Gebilde, nahezu meist gleich der entwickeltsten Vorstellung, wahrgenommen,

und der Unterschied liegt vielmehr darin, dass die Wahrnehmung an der Tatsache haftet, die Vorstellung sich davon sofort unabhängig macht. Dies gehört so wesentlich zum Begriff in allen Beziehungen, dass man in diesem Punkte dem Philosophen keine Aenderung der Terminologie gestatten kann ohne alle Verständigung zunichte zu machen. Dass nun trotz der Täuschung, die der Unterscheidung zugrunde liegt, der Einwand in Kraft bleibt, lässt sich leichter in Verbindung mit dem Folgenden zeigen. Im zweiten Citat entwickelt Helmholtz die Gestaltung der geometrischen Begriffe für Wesen, die auf eine Kugelfläche beschränkt wären. Der Begriff der Aehnlichkeit würde ihnen ganz fehlen, und ihre Axiome würden andere sein, als die der Wesen auf der Ebene. Schmitz-D. zeigt, dass die Inconvenienzen (mit Unrecht nennt er's Widersprüche), in denen sich solche Wesen befänden, diese nach allerhand Versuchen dahin führen würden die dritte Dimension hypothetisch einzuführen und eine der Euklidischen adäquate Geometrie zu bilden. Helmholtz identificire fälschlich, hier wie oben, die Wahrnehmung mit der Vorstellung. Wahrnehmung ist hier das unrechte Wort; denn nach Erwerbung der Vorstellungsfähigkeit in 3 Dimensionen wird jede Wahrnehmung dieser gemäss ausfallen. Was er meint, ist der gegebene Sinneseindruck; nach dieser nominellen Berichtigung ist in der Tat ein wesentlicher Irrtum in der Helmholtz'schen Aufstellung enthüllt. Es ist nur auffallend, dass Schmitz-D. an zwei naheliegenden Punkten vorbeigeht, die seiner Ausführung eine reelle Stütze bieten, wie man sie bei seiner Argumentation in schwebenden Ideen wol noch vermissen möchte. Wäre es erstens apodiktisch richtig, dass Wesen von sphärischer Existenz keine Planimetrie schaffen könnten, so würden auch Wesen, die in sphärisch gekrümmtem Raume lebten, keine Euklid'sche Stereometrie bilden können. Da die Menschen eine solche besitzen, so hätte Helmholtz den Beweis geliefert, dass der wirkliche Raum ein linearer sein muss, was weder seiner Ansicht entspricht noch für erwiesen gelten kann. Zweitens ist der gedachte Fall ausschliesslich sphärisch gegebener Sinnlichkeit kein imaginärer, sondern der wirkliche. Unsere unmittelbar empfangenen Gesichtsbilder sind sphärisch geordnet und nur nach 2 Dimensionen ausgedehnt; dennoch bilden wir daraus die Vorstellung von 3 Dimensionen, und, wie gegen Schmitz-D. zu bemerken ist, auch die Wahrnehmungen sind der gleichen Transformation gemäss körperlich gestaltet. Auf die Betrachtung des Weges dieser Transformation, welche die ganze Frage klar legen würde, wollen sich leider beide Gegner nicht einlassen. Der Verfasser schliesst nun seine Widerlegung, mit der sein Ziel erreicht ist, und knüpft nur noch interessante Bemerkungen an H's. weitere Ausführungen. Viel schwächer zeigt sich seine Logik in den 3 letzten Abschnitten, wo er die Riemann'sche Raumtheorie eingehender be-

trachten will; oft scheint er den Sinn der Aufstellungen nicht zu verstehen, seine Bemängelungen sind resultatlos und endigen meist mit Berufung auf seine frühere Schrift, in der man dann das Behauptete noch weniger dargetan findet.

Hoppe.

Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie. Versuch einer Erweiterung der Lehre von den Formen unserer Raumschauung. Von K. Rudel, Rector der kgl. Gewerbeschule in Bamberg. Bamberg 1877. Schmidt. 28 S.

Die Schrift besteht aus 2 Theilen überschrieben: Betrachtungen vom Standpunkte 1) gewöhnlicher — 2) einer höheren Form der — Raumschauung aus. Im ersten werden als Grundgebilde aufgeführt und erklärt: Punkt, Strahl, Ebene, Strahlen- und Ebenenbüschel, Punkt- und Strahlenbündel, Punktbund (räumliches Gebilde), und nach Annahme bestimmter genetischer Beziehung zwischen allen, und von einer unendlichen Anzahl  $n$  im Ebenenbüschel enthaltener Ebenen die Anzahlen der Elemente der übrigen Gebilde abgeleitet. Im zweiten Teil wird die Anzahl der Dimensionen von 3 definitiv auf 4 erweitert, es giebt nun eine Mehrheit dreifach ausgedehnter Räume und ein einziges vierfach ausgedehntes „All“. Es werden dann die nähern Umstände der Lage der Gebilde im All, ihre Schnitte und ihre relativ unendlichen Anzahlen durch Analogie hergeleitet. Das Nachwort rechtfertigt die Betrachtungen des 2. Theils in vollkommen annehmbarer Weise. Nur gegen eine Aeusserung haben wir um so mehr Grund zu protestiren, weil die darin kühn proclamirte Ansicht von Vielen geteilt zu werden scheint. Wenn der Verfasser sagt, . . . Geometrie auf Grund directer Anschauung zu erfassen und zu betreiben müsse uns der Natur der Sache nach absolut und für immer versagt bleiben . . . und weiterhin specieller: „weil wir räumliche Wesen sind, darum ist uns jede reale Vorstellung von Gebilden höherer als dritter Dimension verschlossen“ — so behauptet er mehr als er weiss. Wer überhaupt zeitweilige Grenzen der geistigen Fähigkeit zu ewigen macht, der masst sich ein Urtheil über ein Gebiet an, dessen Kenntniss ihm nach eigenem Ausspruch verschlossen ist. Ein solches Urtheil ist eben darum stets irrig, auch wenn es sich negirend verhält. Hier insbesondere liegt es sehr nahe, wie voreilig die Behauptung ist. In welchem Sinne sind wir räumliche Wesen? Die gegebene Räumlichkeit der Gesichtsempfindungen ist eine zweifach ausgedehnte; hypothetisch wird die dritte Dimension eingeführt; dennoch geht die intellectuelle Schöpfung (in früherer Kindheit) in scheinbar directe Anschauung über. Warum sollten wir unfähig sein ebenso hypothetisch die vierte Dimension einzuführen und uns die analoge Fertigkeit der Anschauung zu erwerben. Nur

der Antrieb zur Uebung fehlt uns und hat uns in der Kindheit gefehlt, weil alle sinnlichen Tatsachen in das eine lineare Raumsystem von 3 Dimensionen hineinpassten. Künftige Entdeckungen können uns diesen Antrieb liefern; nur solange als uns keine Tatsachen zur Erweiterung nötigen, werden wir die gewöhnliche Hypothese als einfachste festhalten.

Hoppe.

Centrische und excentrische Dynamiden. Elementäre Beiträge zu einer rationellen Atomen-Lehre. Von Dr. Adolph Lederer, K. K. Fregattenarzte. Mit einer lithographirten Figurentafel. Wien 1877. Alfred Hölder. 61 S.

Der Verfasser kündigt an, dass er eine zur dynamischen Erklärung des Magnetismus und der Elektrizität leitende Spur entdeckt habe. Anstatt aber seinen Gedanken so klar und einfach als möglich darzulegen, vexirt er den Leser durch endloses Hinundherschweifen in mannichfaltigen Betrachtungen ohne jegliche exacte Auffassung. Von oscillatorischen Bewegungen ist zwar viel die Rede, doch bleiben die Betrachtungen im Grunde von Anfang bis Ende statische und beruhen auch als solche teilweise auf unrichtiger Anschauung. Wissenschaftliche Untersuchung ist nicht vorhanden; dass ein ungelöstes Problem wie das vorliegende für populäre Darstellung ganz ungeeignet ist, versteht sich von selbst.

H.

Die rationellen Formeln der Chemie auf Grundlage der mechanischen Wärmetheorie entwickelt von Baron N. Dellingshausen. Erster Theil. Unorganische Verbindungen. Heidelberg 1876. Carl Winter. 163 S.

Der Verfasser glaubt den Schwierigkeiten der chemischen Frage dadurch zu entgehen, dass er von der gewöhnlichen Annahme einer Grundverschiedenheit der Atome heterogener Stoffe zur Annahme völliger Gleichheit aller Atome übergeht. Die Verschiedenheit der Stoffe soll auf der blossen verschiedenen Vibration in stehenden Wellen beruhen, welche, wie er in seiner früheren Schrift: „Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie“ — entwickelt hat, das Wesen der Wärme ausmachen. Die Schrift bespricht das Verhältniss seiner Hypothese zu den chemischen Erscheinungen, geht aber auf dynamische Untersuchung mit keinem Worte ein und bleibt daher weit entfernt von der Frage, welche gelöst werden soll.

H.

Das System der Philosophie als exacter Wissenschaft enthaltend Logik, Naturphilosophie und Geistesphilosophie. Von C. L. Michelet. Zweiter Band. Berlin 1876. Nicolai. 486 S.

Der Verfasser will den Tadel, der seine Vorgänger getroffen habe, dass sie die Fortschritte der empirischen Wissenschaften zu sehr ignoriert hätten und hinter ihnen zurückgeblieben wären, so gut als möglich von sich abwenden. Er räumt demzufolge auch ihren Methoden und Disciplinen eine kurze Besprechung ein. Es mag genügen einen Satz anzuführen, um zu zeigen, was er sich bei denselben denkt. Seite 9. sagt er: „Wenn dann freilich die hypothetische Erklärung mit dem Factum übereinstimmt, so müsste die Philosophie sie wol anerkennen; sie hörte damit aber auch auf, eine Hypothese zu sein“. Der schiefe Ausdruck einer vorher citirten physikalischen Autorität rechtfertigt zwar formell die Aeusserung, wenn man sie als die eines Unkundigen ansieht; immer aber beweist letztere die Beschränktheit seiner Begriffe von der Bedeutung einer Hypothese und dadurch die Einseitigkeit seiner Philosophie. Die Abschnitte sind: 1) die Mechanik (darunter die Mathematik, darunter der Raum, die Zeit, Einheit beider, dann die Mechanik als solche, die Astronomie), 2) die Physik. Gern würden wir, wenn unter der Menge nichtsagender Bemerkungen, die an Neuheit dem 2 mal 2 ist 4 gleichen, sich eine charakteristische Aeusserung gefunden hätte, dieselbe an's Licht ziehen. Da dies nicht ist, so schliessen wir mit einer Antwort auf den Ausspruch in der Vorrede: wie die Philosophie nie des Empirismus, so werde dieser ebensowenig der Philosophie entbehren können. Die Möglichkeit, dass die empirischen Wissenschaften, und mit ihnen die Mathematik, welche der Verfasser als „Form der Mechanik“ zu ihnen zählt, durch die Philosophie ergänzt und regeneriert werde, bleibe unbestritten, und obwol die Regeneration naturgemäss von innen heraus vor sich geht, so soll auch der Fall nicht ausgeschlossen sein, dass einmal der Anstoss von aussen kommt. Doch von welcher Philosophie ist die Rede? Der hier dargebotenen wird schwerlich jemand eine solche Kraft zuschreiben. Der traditionellen Philosophie, die heutzutage gelehrt wird, haben wir keinen Grund vorzuwerfen, dass sie sich um die Fortschritte der Naturwissenschaften nicht bekümmerte — auf diese lenkt sie vielmehr in neuester Zeit mehr und mehr den Blick — wol aber, dass sie ihrer eigenen Regeneration mit der Taktik des Todtschweigens aller Fortschritte auf ihrem Gebiete widerstrebt, um ihr sinkendes ererbtes Ansehen kümmerlich noch für einige Jahrzehnte aufrecht zu erhalten. Diese schon längst in einer Zeitfrage nach der andern, praktischen so wie wissenschaftlichen, jedesmal ohnmächtig befundenen Kathedrodoctrin kann und soll keinen Einfluss auf die exacten Wissenschaften üben; sie mag vielmehr daran denken, erst Wissenschaft zu werden, indem sie ihre Anfangsgründe der Differenz der Schulansichten enthebt.

Hoppe.



## Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Éléments de la théorie des déterminants avec application à l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Par G. Dostor, Docteur ès Sciences, Professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris, Membre de la Société mathématique de France. Paris 1877. Gauthier-Villars. 352 S.

Das vorliegende Buch umfasst allseitig die Principien der Determinantentheorie mit reichhaltiger Zuziehung des Wissenswerten, und ist überdies mit besonderer Sorgfalt und viel Geschick für leichtes und gründliches Verständniß der Anfänger bearbeitet, so dass es sich in hohem Grade für Schul- und Selbstunterricht empfiehlt. Die gewandte und concinne Darstellung, die Einfachheit des Stiles und die sichere Logik, welche die früheren Arbeiten des Verfassers auszeichnen und angenehm machen, bewähren sich auch in der gegenwärtigen. Besonders im Anfang bei der Begriffserklärung findet Berücksichtigung verschiedener Auffassung und Methode statt, und es wird dieselbe Sache von mehreren Seiten beleuchtet und abgeleitet; weiterhin hat sich der Verfasser mehr und mehr für eine ausschliessliche Methode entschieden. Im allgemeinen hat er den grossen Vorzug der directen Schlüsse aus vollen Determinanten vor der Rechnung mit Unterdeterminanten gehörig gewürdigt. Es leuchtet ein, dass man zwar leicht in Unterdeterminanten zerlegen, aber nur mit Mühe dieselben mit gehörigem Vorzeichen einfügen kann, dass ferner die directen Schlüsse weit belehrender sind als das mechanische Zerlegen, sich also für den Unterricht mehr eignen, während die Nachprüfung durch Unterdeterminanten dem Schüler überlassen bleiben kann. Warum der Verfasser trotzdem bei der Addition der Determinanten und der Auflösung der Systeme linearer Gleichungen der Methode der Unterdeterminanten vor den weit einfachern directen Schlüssen den Vorzug gegeben hat, ist nicht wol ersichtlich. Das ganze Werk besteht aus 4 Büchern: Theorie der Determinanten, Anwendung auf Algebra und Trigonometrie, Anwendung auf analytische Geometrie, Discriminanten und Invarianten. Die Theorie hat die 3 Capitel: Allgemeine Eigenschaften, Combinationen und Eigenschaften entsprechend gewissen Bedingungen, Multiplication, das erste die Paragraphentitel: Definition und Bezeichnung, Transformation, Unterdeterminanten, Entwicklung, das zweite: Addition, Eigenschaften von Determinanten mit Elementen null, abgekürzte Rechnung mit numerischen und algebraischen Determinanten. Die Behandlung der Gleichungen findet sich im 2. Buch. Manche Sätze sind Entdeckungen des Verfassers. Die Litteratur ist unmittelbar jedem Satze beigelegt.

H.

Grundzüge der systematischen Einführung und Begründung der Lehre der Determinanten vermittelt geeigneter Auflösung der Gruppen allgemeiner linearer Gleichungen. Von Dr. Wilhelm Matzka, jubil. k. k. ord. Univers.-Professor, k. k. Regierungsrath, ordentl. Mitglied der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. (Aus den Abhandlungen der k. böhm. Ges. d. W. 6. Folge. 9. Band.) Prag 1877. Verlag d. k. böhm. Ges. d. Wiss. 4<sup>o</sup>. 61 S.

Diese Arbeit ist ein methodischer Versuch jeder unmotivirten Aufstellung bei Beginn der Determinantenlehre zu entgehen. Es werden nun, um zur Determinantenbildung hinzuführen, aus einem System linearer Gleichungen nach einander 5 Unbekannte nach Subtractionsmethode mit Verbindung je zweier einander folgender Gleichungen eliminirt, und die Ausscheidung einer Determinante als gemeinsamen Factors gezeigt. Dies im successiven Verlauf immer complicirender werdende Verfahren führt jedoch nicht zum Ziele eines allgemeinen Nachweises des Fortschritts Gesetzes, welches durch viele Betrachtungen neuer Art schliesslich erreicht wird. Im ganzen ist viel Mühe aufgewandt ohne den geringsten Lohn. Der Antrieb dazu geht aus einer sehr gewöhnlichen Täuschung hervor. Nicht das Warum, sondern das Was muss die erste Frage sein. Der Grund der Anordnung wird leicht verstanden, nachdem man die Sache und ihren Erfolg kennen gelernt hat. H.

Ueber die Convergenz gewisser zur Darstellung willkürlicher Functionen dienender Reihen. Von M. Koppe. Programm der Andreas-Realschule. Berlin 1877. 4<sup>o</sup>. 31 S.

Der Verfasser verallgemeinert die Kugelfunctionen, indem er die Coefficienten  $P_n(\alpha)$  der Entwicklung der Function

$$U_\varphi(\alpha, x) = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\varphi}$$

nach Potenzen von  $\alpha$  untersucht. Cayley hatte schon das gleiche gethan für solche  $\varphi$ , die Vielfache von  $\frac{1}{2}$  sind. Die Function  $U$  genügt einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung für die Unabhängigen  $\alpha, x$ , aus der dann  $P$  als Speciallösung einer Gleichung 2. Ordnung für die Unabhängige  $x$  hervorgeht. Neben ihr tritt als zweite Speciallösung eine Function  $Q$  auf. Beide lassen sich als ganze Functionen  $n$ ten Grades einzeln von  $x$  und von  $\varphi$  darstellen. Es wird dann eine Relation der  $P$  entwickelt, dann  $Q$  auf einfachere Irrationalitäten reducirt, dann  $P$  für  $n = \infty$  untersucht, dann  $P$  durch Eigenschaften eines davon abhängenden bestimmten Integrals definirt. Die folgenden Gegenstände sind: die Verteilung der Wurzeln von  $P(\cos \varphi) = 0$  auf das Intervall 0 bis  $\pi$ , die Entwicklung einer Function von  $\varphi$  nach den  $P(\cos \varphi)$ . H.

# Litterarischer Bericht

CCXLIII.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo X. Roma 1877. Tipografia delle sc. mat. e fis.

Der Inhalt der ersten 6 Hefte ist folgender.

1. Heft. Ferdinando Jacoli. Ueber das Leben und die Arbeiten des Antonio Maria Lorgna.

2. Heft. Ferdinando Jacoli. Ueber Domenico Maria Novara's Bestimmung der Schiefe der Ekliptik.

3. Heft. Édouard Lucas. Untersuchungen über mehrere Werke von Leonardo di Pisa, und über verschiedene Fragen der höhern Arithmetik.

4. Heft. Fortsetzung.

5. Heft. Schluss. — B. Boncompagni. Ueber die Summe der vierten Potenzen der natürlichen Zahlen.

6. Heft. Antonio Favaro. Nikolaus Copernicus und das Universitäts-Archiv von Padua. Brief an D. B. Boncompagni. — M. Steinschneider. Berichtigung einiger Irrtümer in Betreff des arabischen Mathematikers Ibn Al-Banna. Auszug aus einem Briefe an D. B. Boncompagni.

Publicationsverzeichnisse im 2. 4. 6. Heft.

---

## Methoden und Principien.

Die Gesetze der Anfangsgeschwindigkeit in den Bewegungen der Weltkörper. Eine Darstellung der Himmelsbewegungen mit Hülfe der einfachsten Sätze der Mathematik. Von C. A. Werther, Dr. phil. Rostock 1877. Wilh. Werther. 112 S.

Was der Verfasser will, lässt sich nur teilweise erraten; eine deutliche Auskunft wird nicht gegeben, und aus den Resultaten ist kein Zweck ersichtlich. Im Anfang tadelt er, dass man den Begriff der Kraft zu eng fasse. Hätte er statt dessen nur seinen weiteren Begriff normirt, so würde ihm niemand das Recht bestritten haben. Es gefällt ihm nicht, dass die Anfangsgeschwindigkeiten der Planeten und Trabanten zufällig sein sollen; die blosse Attraction sei unzureichend, dieselben unter Gesetz zu stellen; er nimmt deshalb eine Repulsivkraft hinzu, worunter er die Centrifugalkraft zu verstehen scheint. Die auf S. 80. aufgeführten Gesetze der Anfangsgeschwindigkeit sind nichts weiter als Relationen nach Kepler'schen Gesetzen. Er scheint demnach seine Befriedigung darin gefunden zu haben, dass er von den Constanten auf Variablen übergegangen ist, welche ihm durch ihre Relationen den Eindruck der Gesetzmässigkeit machen.

H.

---

## Geometrie.

Geometria dello spazio in coordinate tetraedriche secondo delle Vorles. über Geometrie di A. Clebsch saggio di studi del Dr. M. L. Albeggiani. Parte I. Palermo 1877. Pietro Montaina e Comp. 169 S.

Nach Angabe des Verfassers verfolgt das Gegenwärtige den Zweck, die Arbeiten von Clebsch unter den einzigen Gesichtspunkt des fruchtbaren Princip der Dualität zu stellen. In diesem 1. Teile, dem ein zweiter später folgen soll, scheiden sich 2 Abschnitte, Analysis und Synthesis. Der erste Abschnitt, in 4 Capitel geteilt, untersucht besonders die 4 geometrischen Fundamentalformen des Raumes, in reciproker Weise, nämlich Capitel I. II. Punkt und Ebene, Cap. III. IV. die Geraden unter doppelter Betrachtung, der Axen oder der Strahlen; Cap. V. lässt sich als Anhang zu den 2 letzten betrachten und bezieht sich auf die ebenen Curven oder auf die von beiden Arten Geraden erzeugten konischen Flächen. Der 2. Abschnitt, d. i. Cap. VI. geht aus den Ergebnissen des ersten hervor, und zwar aus dem Begriff der Complexen (Feld oder Gruppe), die Zugehörigkeit unterschieden durch  $I$  und  $C$ , so dass die Elemente  $I$  ebene Curven, die

*C* konische Flächen erzeugen. Der Connex der Complexen beider Arten von Elementen ergibt eine Gleichung, die des Systems vom Index 2 im Raume von 3 Dimensionen, sie ist nur die analytische Darstellung nach deren Entstehung aus den 4 geometrischen Fundamentalformen *S* des Raumes, ein besonderer Fall davon ist die Gleichung der Geraden (42). Die letzte Nummer enthält Betrachtungen der projectiven Geometrie, welche das Ziel haben, in allgemeinsten Weise die Beziehung zwischen verschiedenen Oertern oder deren Elementen festzustellen. Die Coordinaten, von denen Gebrauch gemacht worden ist, sind die homogenen tetraedrischen; die des Punktes und der Ebene sind wie bei Clebsch definirt, die der Geraden nach den Definitionen von Battaglini, Clebsch, Klein u. A. Ausser diesen sind Cremona, D'Ovidio, Plücker, Salmon u. A. benutzt und citirt. Der 2. Teil soll sich mit Untersuchung der Eigenschaften der Flächen vom Exponenten 2, dargestellt durch die Gleichung  $(SS) = 0$ , d. i. der Flächen 2. Ordnung oder 2. Classe, erzeugt durch die 4 geometrischen Fundamentalformen des Raumes von 3 Dimensionen beschäftigen.

H.

Die Curven (Folia) von der Form

$$\frac{x \sin \varphi - y \cos \varphi}{x \cos \varphi + y \sin \varphi} = - \frac{ry}{x^2 - rx + y^2}$$

Eine analytisch-geometrische Studie von Dr. Gottfr. Schmauss, kgl. Regierungs- und Kreismedicinal-Rath in Augsburg. Augsburg 1877. Math. Rieger. 4<sup>o</sup>. 14 S. 1 Fig.-Taf.

Die untersuchte Curve wird erzeugt vom Durchschnitt der 2 Transversalen eines gleichschenkligen Dreiecks, welche von den Enden der Grundlinie aus die Gegenseiten ( $= r$ ) unter constantem Winkel ( $= \varphi$ ) schneiden, während bei festem einen Schenkel der andere um die Spitze rotirt. Aus dieser geometrischen Bestimmung wird erst die Gleichung hergeleitet, dann die Maxima und Minima, die Tangenten und Asymptoten, die Wendepunkte, und für  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  der Flächeninhalt gesucht. Zugleich wird die Variation der Curve mit  $\varphi$  in Betracht gezogen.

H.

Das Ellipsoid elementar bearbeitet von Aug. Jenny. Basel 1877. Schweighauser. 32 S. 2 Fig.-Taf.

Die Arbeit beschäftigt sich ausschliesslich mit dem Inhalt ebener Flächenstücke und von Körpern. Was darin gegeben wird, ist in der leichtfässlichsten Weise entwickelt und dargestellt. Nur findet sich darin ein haarsträubender Fehler, der leicht genug zu berichtigen ist. Die Ellipse wird nämlich aus dem Kreise durch proportionale Ver-

kürzung oder Verlängerung der Ordinaten abgeleitet, dann von ihr das bzhw. längliche oder platte Rotationsellipsoid erzeugt. Anstatt nun analog aus dem Rotationsellipsoid das dreiaxige durch proportionale Reduction einer Coordinate abzuleiten, werden unmittelbar die vorher gleichen 2 Dimensionen ungleich gesetzt, das heisst dann nach allem Vorausgehenden: das Ellipsoid ist dreiaxig, wenn einmal  $a > a$ . Von Ellipse und Ellipsoid werden ausser der ganzen Figur die Segmente, gerade und schräg geschnittene, behandelt, auf Kreis- und Kugelsegmente reducirt und die Kugelsegmente für sich kubirt.

H.

Einiges aus der Theorie der Curven zweiter Ordnung. Von Jos. Eilles, k. Professor. Programm der kgl. bayer. Studien-Anstalt Landshut. 1877. Mit 2 Figurentafeln. 4<sup>o</sup>. 58 S.

Die Schrift beginnt mit einer einfachen Herleitung des Hesse'schen Satzes vom vollständigen Vierecke. Die folgenden Gegenstände sind die Brennpunkte und die imaginären Elemente. Alles ist nach der Methode der neuern synthetischen Geometrie behandelt, und eine grössere Reihe resultirender Sätze dualistisch aufgestellt. H.

Beiträge zur Geometrie des Dreiecks. Von R. O. Consentius. Carlsruhe 1877. G. Braun. Mit 1 Figurentafel. 34 S.

Vom beliebigen Dreieck ausgehend wird eine „allgemeine“ (d. h. Gesamt-) Figur construirt, indem die ein-, um- und unbeschriebenen Kreise und viele damit in Verbindung stehende Gerade hinzugefügt werden. An dieser Figur wird dann in synthetischem Connex, ohne Hülfe der neuern Geometrie, eine längere Reihe von Sätzen entwickelt, und zum Schluss 49 Constructionsaufgaben gestellt. H.

Anfangsgründe der neuern Geometrie für die oberen Classen der Gymnasien und Realschulen. Von Dr. F. X. Stoll, Lehrer der Mathematik am Grossherzoglichen Gymnasium zu Bensheim. Mit 16 Figurentafeln. Bensheim 1872. Ehrhard u. Comp. 111 S.

Der Verfasser will die neuere Geometrie weder an die Stelle der euklidischen Elementargeometrie setzen noch mit ihr verschmelzen, sondern nach Vollendung derselben als besonderen Coursus einführen; wol aber dürfte nach seiner Ansicht der sonst in höheren Classen übliche, weniger instructive Unterricht in den Anfängen der analytischen Geometrie dafür in Wegfall kommen. Wenn auch der angeführte Grund gegen letztere nicht zutrifft, so ist doch die Aeusserung,

dass deren Resultate dem Schüler isolirt und zusammenhanglos erscheinen, aus dem andern Grunde sehr annehmbar, weil der Zweck ihrer Einführungen fast ganz jenseit des Schulunterrichts liegt. Die hiermit der neuern Geometrie angewiesene Stellung ist für die Gestaltung der Doctrin eine äusserst günstige. Sie hat eine deutliche, sichere Grundlage auf klaren Begriffen; es ist ihr dadurch gestattet sich rein auf ihren specifischen Inhalt zu beschränken und sich so in einheitlicher Form darzustellen. Hiervon ist in vortrefflichster Weise Gebrauch gemacht. Der Vortrag ist musterhaft wol geordnet und leicht verständlich; die Form ist die aus dem gewöhnlichen geometrischen Unterricht bekannte in Erklärungen, Lehrsätzen und Aufgaben. Der Umfang ist weniger wichtig, da nur eine Einführung und Vorbildung für das Studium der höhern synthetischen Geometrie in der Absicht liegt. Für den Fall einer Aufnahme in den Schulcursus lässt sich das Buch als Hilfsmittel sehr empfehlen. H.

Neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien. Von Dr. H. L. Rottok, Rector am Realgymnasium in Rendsburg. Mit 51 Figuren im Text. Schleswig 1877. Julius Bergas. 62 S.

Auch hier wie beim Vorgenannten wird ein getrennter Cursus in der neuern Geometrie, der sich auf den vollendeten Unterricht in der Elementargeometrie stützt, in Aussicht genommen. Die Methode unterscheidet sich von jener dadurch, dass sie zur Herleitung der Sätze Trigonometrie und überhaupt mehr Rechnung anwendet. Der Vortrag ist klar und leicht verständlich, so dass das Buch seinen Zweck sehr wol zu erfüllen vermag. H.

Die Elemente der darstellenden Geometrie, als Lehrmittel für Lehrer und Schüler an Real-, höhern Bürger-, Industrie-, Gewerb-, Bau-, Handwerker- und Fortbildungsschulen, und andern gewerblichen und technischen Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Von G. Delabar. Mit 100 Figuren auf 20 lithographirten Zeichnungstafeln. (Zweiter Theil der Anleitung zum Linearzeichnen.) Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Freiburg im Breisgau 1877. Herder. Quer-8°.

Das jetzt erschienene erste Heft des genannten 2. Theiles enthält nach allgemeiner Einleitung in die darstellende Geometrie überhaupt, welche 3 Projectionsarten aufweist, die Lehre von der rechtwinkligen Projection. Es werden in erläuterndem Vortrag die Darstellungen von Punkten, Geraden, krummen Linien, begrenzten ebenen Flächen, Ebenen, ebenen Figuren in gegebenen Ebenen, krummen Flächen,

der einfachen Körper, der Prismen und Pyramiden und deren Netze, der regulären Polyeder, der 3 elementaren runden Körper, und der gewundenen Körper behandelt. Der Ausdruck ist durchweg correct, und gute Ordnung nicht zu vermissen. H.

## Praktische Geometrie, Geodäsie.

Handbuch der niederen Geodäsie. Von Friedrich Hartner, ord. Professor in Wien. Fünfte, vermehrte Auflage. Bearbeitet von Josef Wastler, o. ö. Professor der Geodäsie an der k. k. Technischen Hochschule in Graz. Mit 397 Holzschnitten und 2 Tafeln. Wien 1876. L. W. Seidel u. Sohn. 710 S.

Die neue Auflage unterscheidet sich von den früheren einestheils durch die Umrechnung in Metermass, die nur beim Kataster noch nicht ausgeführt werden konnte, und die durch die neue Instruction des österreichischen Katasters bedingten Aenderungen und Neuerungen in der Triangulirung, andernteils durch erhebliche Vermehrungen, welche den neuesten Fortschritten der technischen Praxis und theoretischen Geodäsie entsprechen. An Instrumenten und Vorrichtungen sind hinzugekommen das Steinheil'sche Heliotrop, die Messräder, der anallatische Distanzmesser von Porro, der Theodolit von Breithaupt, das Universal-Nivellir-Instrument von Ertel. In Betreff des Verfahrens und der Theorie ist neu aufgenommen Ausführliches über die Genauigkeit der Längenmessungen, die Untersuchung über die Excentricität des Höhenkreises, die Untersuchung des Fehlers im Höhenwinkel wegen Schiefstehens der Rotationsaxe, das Abstecken langer gerader Linien, das Ausstecken von Kreisbogen, die Untersuchung über die Genauigkeit der Längen- und Horizontalwinkelmessungen, das Gewicht einer n-fachen Repetition, die Untersuchung über die Aneroide von Goldschmid, die ausführliche Behandlung des Detail-Nivellements und der Querprofile, das Präcisions-Nivellement, ein Anhang über Tachymetrie. Dagegen ist die Markscheidekunst als entbehrlich für den gegenwärtigen Zweck weggeblieben. Die Hauptabteilungen des Buchs sind die Feldmesskunst und die Höhenmesskunst; in ersterer wird gehandelt von der Aufnahme, von der Berechnung und Teilung aufgenommener Flächen und Aenderung ihrer Begrenzung, von der Ausfertigung der Pläne, in letzterer vom Höhenmessen und vom Nivelliren. Sowol der Vortrag der Theorie als auch die Beschreibung des Verfahrens und der Instrumente ist grösstenteils klar und für die mit der Technik nicht Vertrauten verständlich.

H.



Ueber die Genauigkeit der Längenmessungen mit Messlatten, Messband, Messkette und Drechlatte. Von Franz Lorber, o. ö. Professor der praktischen Geometrie an der k. k. Bergakademie in Leoben. Wien 1877, Alfred Hölder. 66 S.

Nachdem der Verfasser die Formeln zur Wahrscheinlichkeitsbestimmung der Fehler verschiedener Natur entwickelt und rücksichtlich der constanten Fehler die mittlere Abweichung vom mittleren Fehler in Betracht gezogen hat, handelt es sich um Entscheidung zwischen 2 Hypothesen, hier ausgedrückt mit den Worten: Erstere sagt, der mittlere Fehler einer Längenmessung ist proportional der gemessenen Länge, letztere, der Länge selbst. Er findet erstere durch die Theorie gerechtfertigt und für die meisten Fälle durch die Beobachtung bestätigt, letztere soll für gewisse Fälle näher zutreffen.

H.

### Praktische Mechanik.

Magazin der neuesten mathematischen Instrumente des mathematisch-mechanischen Institutes von F. W. Breithaupt und Sohn in Cassel. VI. Heft mit 13 lithographirten Tafeln. Cassel 1876. Selbstverlag des Institutes. 4<sup>o</sup>. 95 S.

Das gegenwärtige Heft behandelt nach einander: Einfache Winkelmesser, Theodolite zu geodätischem Gebrauche, Universalinstrumente, Theodolite zu astronomischem Gebrauche, Gruben-Theodolite und Tachymeter, speciell astronomische Instrumente, und im Anhang die Bussolen-Instrumente mit Fernröhren; von diesen einzeln verschiedene Arten; von jeder wird die Beschreibung, die Prüfung und die Anwendung dargelegt. Voraus geht eine Einleitung enthaltend die Grundprincipien über die Construction des Theodoliten, die Elimination der Fehler durch die Anordnung der Beobachtungen, die Kreisteilung und die Methoden der Ablesung, die Methoden der Beobachtung, die Gruppierung der Theodolite nach ihrer Verwendung. Die Erörterung setzt die technischen Kenntnisse in vollem Masse voraus. Ob die im ganzen ziemlich kärglichen Angaben genau die notwendigen sind, möchte etwas zweifelhaft scheinen; doch wird hierüber der Gebrauch entscheiden.

H.

Erläuterungen und Zusätze zu F. Reuleaux's Kinematik. In gedrängter Kürze aufgestellt von M. Nieman. Mit einer Figurentafel. Berlin 1877. Mayer und Müller. 24 S.

Der Verfasser knüpft nur in geringem Masse an die citirte Schrift an, will vielmehr die Gegenstände unabhängig entwickeln. Es handelt sich um Fixirung des Begriffs der Kinematik und der dazu gehörigen Begriffe. Hier scheint er sich eine klare, geordnete Darlegung dadurch sehr zu erschweren, dass er in den Begriff schon alle Umstände, die erst Folge der Anwendung sind, hineinlegen will. Anstatt den einfachen mathematischen Begriff zu Grunde zu legen und von da aus die Fälle der Verwendung, die in Maschinen vorkommen, übersichtlich zu ordnen, betrachtet er vielmehr die Kinematik als ein Erzeugniß der Technik, welches er nur approximativ zur mathematischen Auffassung hinführt. Es werden 20 Fälle der Bewegung, nicht übersichtlich aufgestellt, sondern nur angedeutet. In Betreff der Begriffe von „Receptor und Werkzeug“, „Motor und Werkstück“ wird ausgeführt, dass dieselben sämtlich ihre Berechtigung haben, und sich im einzelnen leicht genug scheiden, wenn man auch manchmal nur den Ort angeben kann, wo jedes sich befindet. Dies sowol wie jene 20 Fälle wird auf der Figurentafel durch Beispiele veranschaulicht. H.

---

### Astronomie und Meteorologie.

Die Regenverhältnisse Deutschlands. Von Dr. Jac. van Beber. München 1877. Theodor Ackermann. 122 S.

Die Schrift beginnt mit einer allgemeinen Erörterung der atmosphärischen Wasservorgänge und ihrer Abhängigkeit von der Landesbeschaffenheit, namentlich der Höhenverhältnisse. Indem sie dann speciell auf Deutschland übergeht, nimmt sie die Ursachen zum Ausgangspunkt und lässt die Beobachtungsergebnisse nachfolgen. Zuerst wird eine übersichtliche Gruppierung der deutschen Gebirge gegeben. Das Folgende handelt von der Regenmenge und zwar vom Einfluss der Gebirge, von der räumlichen Verteilung, der Verteilung in der jährlichen Periode und nach der Höhe, von den Regentagen und der Regenwahrscheinlichkeit, der Regendichte und der Beziehung des Waldes zu den Regenverhältnissen. Die Schrift enthält zahlreiche Tafeln und Diagramme über die Regenmengen. H.

---

### P h y s i k.

On the equilibrium of heterogeneous substances. First part. By Willard Gibbs, Professor of mathematical physics in Yale College, New Haven, Conn. (Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, vol. III. part I.). 141 S.

Die Schrift behandelt ein allgemeines Thema aus der mechanischen Wärmetheorie, entwickelt zuerst die allgemeinen Grundsätze und führt sie dann in verschiedenen Combinationen durch. Es wird von den Begriffen der Energie und Entropie Gebrauch gemacht, erstere bezeichnend die Summe von Arbeit und Wärme, letztere die Summe der durch die Temperatur dividirten von aussen herein übergegangenen Wärmeelemente. Als Kriterium des Gleichgewichts wird aufgestellt: Zum Gleichgewicht eines isolirten Systems ist es notwendig und hinreichend, dass bei allen möglichen Variationen des Zustands des Systems, welche seine Energie nicht ändern, die Variation seiner Entropie verschwinde oder negativ sei — wofür man auch sagen kann, dass bei constanter Entropie die Variation der Energie null oder positiv sein muss. Die nächste Frage bilden die Gleichgewichtsbedingungen heterogener Massen in Berührung ohne Einwirkung von Schwere, Elektrizität, Verdrehung und capillaren Spannungen, dann Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den anfänglich existirenden homogenen Theilen, dann Bedingungen für die mögliche Bildung von Massen unähnlich ihrer vorhergehenden Existenz, dann Einfluss der Festigkeit aller Theile, dann Einfluss hinzutretender Bedingungen, dann Einfluss eines Diaphragma's, u. s. w. H.

Die Entstehung des Chlorophylls in der Pflanze. Eine physiologische Untersuchung von Dr. Julius Wiesner, o. ö. Professor der Anatomie und Physiologie der Pflanzen an der Wiener Universität. Wien 1877. Alfred Hölder. 120 S.

Es werden die Bedingungen untersucht, unter denen das Chlorophyll, derjenige bis jetzt nicht darstellbare Stoff, welcher der Pflanze die grüne Farbe giebt, und durch dessen Vorhandensein die Umwandlung der unorganischen Nahrung in organische Verbindungen bedingt ist, entsteht. Hauptsächlich ist die Untersuchung auf den Einfluss der Licht- und Wärmestrahlen gerichtet. Die Chlorophyllerzeugende Kraft des Lichtes beginnt erst im Rot zwischen den Fraunhofer'schen Linien *A* und *B* und wohnt von hier an allen Strahlen des sichtbaren Spectrums inne. Die dunkeln Wärmestrahlen haben das Vermögen, eine beginnende Wirkung desjenigen Lichtes, welches zur Chlorophyllerzeugung geeignet ist, fortzusetzen. H.

---

### Vermischte Schriften, Zeitschriften.

Atti della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXIV. 1876—77. Serie terza. Transunti, volume I. Roma 1877. Salviucci.

Die dritte Serie beginnt mit dem December 1876. Jeden Monat erscheint ein Heft. Jedes Heft enthält die Sitzungsberichte der 2 Classen, der naturwissenschaftlichen und historischen, getrennt, dann ein Publicationsverzeichniss und meteorologische Beobachtungen. Die Sitzungsberichte geben nach einander erst die geschäftlichen Verhandlungen, dann wissenschaftliche Mittheilungen und Vorlesungen, dann die Verhandlungen des geheimen Comites. An Mittheilungen mathematischen Inhalts finden sich in den 6 ersten Heften folgende.

H. 1. Marco: Die Ursache der rotirenden Bewegung der Lichtmühle im Radiometer von Crookes.

Brioschi: Ueber einige neue, von Herrn Klein erhaltene Resultate in der Auflösung der Gleichungen 5. Grades.

Cerruti: Ueber die kleinen Oscillationen eines starren, ganz freien Körpers. (Forts. im 2. H.).

H. 2. Smith: Ueber die vollen elliptischen Integrale.

H. 3. Smith: Ueber die Modulargleichungen.

Dini: Ueber eine Classe endlicher und stetiger Functionen, die keinen Differentialquotienten haben. (Forts. im 5. H.).

H. 4. Archer Hirst: Ueber die Correlation zweier Ebenen.

Bertini: Eine neue Eigenschaft der Curven  $n$ ter Ordnung mit einem  $(n-2)$ fachen Punkte.

H. 5. Betti: Ueber die Bewegung eines Systems beliebig vieler Punkte.

D'Ovidio: Die metrischen Fundamentalfunctioen in Räumen von beliebig vielen Dimensionen und constanter Krümmung.

De Paolis. Ueber die ebenen doppelten Transformationen.

Veronese und Cremona: Neue Sätze über das hexagrammum mysticum.

H. 6. De Gasparis: Ueber den Wert des Parameters in den elliptischen und parabolischen Bahnen.

Casorati: Untersuchungen über die Differentialgleichungen zu allgemeiner algebraischer primitiver Gleichung. II.

Analectes ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques. Par Nicolas Nicolaïdès, Docteur ès-sciences mathématiques, et Professeur à l'Université d'Athènes. Athènes. Pierre Perris.

Diese Zeitschrift erscheint in Lieferungen zu 2 Bogen in französischer Sprache. Gauthier-Villars übernimmt die Besorgung. Es sind bis jetzt 19 Lieferungen erschienen. Die beiden letzten enthalten folgende Aufsätze.

Ueber eine neue Art der Erzeugung der Flächen.

Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen.

II.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Udgivet af Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars. Første Bind. Kristiania 1876. Alb. Cammermeyer.

Der erste Band dieser neuen norwegischen Zeitschrift besteht aus 4 Heften. Sie soll nur wissenschaftliche Abhandlungen enthalten. Keine Sprache ist ausgeschlossen. Jährlich soll ein Band erscheinen. Die Mehrzahl der Aufsätze gehört der physischen Geographie an. Mathematische Arbeiten hat bis jetzt allein Lie selbst geliefert. Sie sind in deutscher Sprache und haben die Titel:

Theorie der Transformations-Gruppen (1. und 2. Heft).

Resumé einer neuen Integrations-Theorie (3. und 4. Heft).

H.

Nouvelle Correspondance Mathématique. Rédigée par Eugène Catalan, Docteur ès-sciences, Professeur à l'Université de Liège, avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Édouard Lucas. Tome troisième. Liège 1877. E. Decq.

Der Inhalt der ersten 6 Hefte an Abhandlungen ist folgender.

Éd. Lucas: Ueber die Anwendung eines neuen Princips der Zeichen in der Geometrie. (Schluss) — H. Brocard: Rollcurven der Kegelschnitte. (Forts.) — P. Mansion: Identität der linearen Transformation mit der projectivischen Transformation. — Emil Ghysens: Ueber den Flächeninhalt des Ellipsoids. — C. Le Paige: Ueber eine Differenzgleichung. — Éd. Lucas: Ueber das Stiefelsche Theorem. — H. Brocard: Eigenschaft des Dreiecks. — Éd. Lucas: Ueber die Verallgemeinerung zweier Sätze von Hermite und Catalan. — Mister: Ueber den Beweis des Taylor'schen Satzes. — P. Mansion: Beweis des Tautochronismus der Cykloide und des Neumann'schen Satzes, nach der Schrift von Huygens betitelt: Horologium Oscillatorium. — E. Roche: Ueber die barymetrische Formel

von Laplace. — E. Catalan: Ueber verschiedene Artikel von Mansion. — De Coatpont: Ueber ein Problem von Busschop. — A. B. Kempe: Ueber die Bewirkung genau geradliniger Bewegung mittelst durch Gelenke verbundener Stäbe. Aus dem Englischen übers. von V. Liguine. — H. Brocard: Ueber verschiedene Artikel der Nouv. Corr. (Forts.) — C. Le Paige: Ueber die Multiplication der Determinanten. — Gelin: Ueber den Satz des Nikomachos. — Gelin: Ueber die Frage 220. — G. de Longchamps: Ueber die harmonische Reihe. — Jules Freson: Sätze über die Transversalen. — S. Realis: Ueber verschiedene, in der Nouv. Corr. gestellte Aufgaben. — E. Ghysens: Ueber eine Eigenschaft der algebraischen ebenen Linien. — P. Mansion: Ueber die Theorie der Reihen, aus Anlass eines Artikels von Catalan. — De Coatpont: Ueber die Geometrie des Lincals. H.

---

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXXIX.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Eisenlohr, A., e. mathemat. Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind d. British Museum) übersetzt u. erklärt. Fol. m. Commentar. 4. Leipzig, Hinrichs. 63 Mk.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, G. Müller, A. Wangerin. 7. Bd. J. 1875. 3. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 5 Mk. 20 Pf.

## Methoden und Principien.

Deussen, P., d. Elemente d. Metaphysik. 8. Aachen, Mayer. 4 Mk.

Paschen, M., üb. d. sogenannte Quadratur d. Kreises. 4. Neisse, Graveur. 1 Mk.

Scheffler, H., d. Naturgesetze u. ihr Zusammenhang m. d. Prinzipien d. abstrakten Wissens. 2. Thl. 2. Lfg. 8. Leipzig, Förster. 12 Mk.

Ule, O., Warum u. weil. Physikalischer Thl. 4. Afl., hrsg. v. F. Langhoff. 8. Berlin, Klemann. 2 Mk. 75 Pf.

## Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Becker, J. K., Lehrb. d. Elementar-Mathematik. 1. Thl. Lehrbuch d. Arithmetik u. Algebra f. d. Schulgebrauch. 2. Buch: Das Pensum der Prima. 8. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

Herr, J. B., Lehrb. d. höheren Mathematik. 3. Afl. 1. Bd. 8. Wien, Seidel & S. 12 Mk.

Lettau, O., algebr. Aufg. m. Berücksicht. d. neuen Münzsystems. 4. Afl. 8. Langensalza, Schulbuchh. 2 Mk. 70 Pf.

Lipschitz, R., Lehrb. d. Analysis. 1. Bd. 8. Bonn, Cohen & S. 15 Mk.

Löser, J., Elemente d. Mathematik f. Gymn. Real- u. höhere Bürgerschulen. 2. Thl. Geometrie d. Ebene. 8. Weinheim, Ackermann. 2 Mk. 80 Pf.

Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehr- u. Handbuch. 1. Thl. 5. Lfg. 8 Strassburg, Schneider. 75 Pf.

Mikolietzky, J., Aufg. aus d. darst. Geometrie. 8. Wien, Hölzel. 1 Mk.

Reeb, W., Auflösgn. zu d. algebr. Uebungsbuche. 8. Giessen, Roth. 80 Pf.

Schrön's, L., siebenstell. gemeine Logarithmen d. Zahlen von 1 bis 108000 u. d. Sinus, Cosinus, Tangenten u. Cotangenten aller Winkel d. Quadranten von 10 zu 10 Secunden. 16. Aufl. Tafel I u. II. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 20 Pf.

— dass. Tafel III. 8. Ebd. 1 Mk. 80 Pf.

Steck, F. H., & J. Bielmayr, Resultate f. d. 4. Aufl. d. arithmet. Aufg. 8. Kempten, Kösel. 50 Pf.

Wallentin, F., methodisch geordnete Sammlg. v. Beispielen u. Aufgaben aus d. Arithmetik. 8. Wien, Gerold's S. 3 Mk.; Resultate 1 Mk.

Wittstein, Th., Lehrb. d. Elementar-Mathematik. 2. Bd. 2. Abth. Stereometrie. 4. Aufl. 8. Hannover, Hahn. 2 Mk. 10 Pf.

— fünfstell. logarithmisch-trigonometr. Tafeln. 8. Aufl. 8. Hannover, Hahn. 2 Mk.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Boymann, J. R., Lehrb. d. Arithmetik f. Gymnasien, Realschulen u. andere höhere Lehranst. 1. Thl. Geometrie der Ebene. 8. Aufl. 8. Cöln, Schwann. 2 Mk.

Büttner, A., d. Elemente d. Buchstabenrechng. u. Algebra. 3. Aufl. 8. Berlin, Stubenrauch. 2 Mk. 40 Pf.

Günther, S., Lehrb. d. Determinanten-Theorie. 2. Aufl. 8. Erlangen, Besold. 5 Mk.

Kuenerth, A., neue Methoden z. Auflösg. unbestimmter quadrat. Gleichgn. in ganzen Zahlen. 8. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Orelli, J., Lehrb. d. Algebra f. Industrie- u. Gewerbeschulen. 2. Aufl. 2. Thl. 8. Zürich, Schmidt. 5 Mk.

Pick, A. J., Arithmetik f. d. untern Klassen d. Mittelschulen. 1. Thl. 8. Prag, Tempsky. 1 Mk. 40 Pf.

Rapp, J. N., Lehrb. d. Arithmetik m. d. nöthigen Uebungs-Aufg. f. Latein- u. Gewerbeschulen. 8. Ingolstadt, Ganghofer. 1 Mk. 60 Pf.

Schmidt, J. P., d. Elementar-Arithmetik u. deren Anwendg. 4. Aufl. 8. Trier, Lintz. 2 Mk. 25 Pf.

Stegemann, M., Grundriss d. Differential- u. Integral-Rechng. m. Anwendungen. 2. Thl. Integral-Rechng. 3. Aufl., bearb. v. J. F. Meyer. 8. Hannover, Helwing's V. 6 Mk.

Winckler, A., üb. d. Integration d. linearen Differentialgleichgn. zweiter Ordng. 8. Wien, Gerold's S. 90 Pf.



### **Geometrie.**

Buttel, P., Raumlehre f. d. Volksschule, Mittelschule u. Fortbildungsschule. 8. Kiel, Homann. 1 Mk. 20 Pf.

Consentius, R. O., Beiträge zur Geometrie d. Dreiecks. 8. Carlsruhe, Braun. 1 Mk. 20 Pf.

Escherich, G. v., die reciproken linearen Flächensysteme. 8. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Frischauf, J., Elemente d. Geometrie. 2. Aufl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Hattendorff, K., Einleitg. in d. analyt. Geometrie. 2. Aufl. 8. Hannover, Schmorl & v. S. 4 Mk.

Klekler, K., d. Methode d. darstell. Geometrie z. Darstellg. d. geometr. Elemente u. Grundgebilde. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 40 Pf.

Müller, H., Leitfaden d. Stereometrie. 1. Thl. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 40 Pf.

Pelz, C., üb. e. allg. Bestimmungsart der Brennpunkte v. Con-touren d. Flächen zweiten Grades. 8. Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Rottok, H. L., neuere Geometrie f. d. oberen Klassen d. Real-schulen u. Gymnasien. 8. Schleswig, Bergas. 1 Mk. 50 Pf.

Sonndorfer, R., Lehrb. d. Geometrie f. d. oberen Klassen d. Mittelschulen. 2. Thl. 2. Aufl. 8. Wien, Braumüller. 3 Mk. 60 Pf.

Wiegand, A., 2. Cursus d. Planimetrie. 9. Aufl. 8. Halle, Schmidt. 1 Mk.

### **Trigonometrie.**

Hössrich, A., Abriss der ebenen Trigonometrie. 2. Aufl. 8. Saalfeld, Wiedemann. 80 Pf.

### **Praktische Geometrie, Geodäsie.**

Jordan, W., Handb. d. Vermessungskunde. 2. Aufl. 2. Lfg. 8. Stuttgart, Metzler. 5 Mk.

Koppe, C., die Aneroid-Barometer v. Jakob Goldschmid u. das barometr. Höhenmessen. 8. Zürich, Schulthess. 3 Mk.

Kraft, G., d. Aufangsgründe d. Theodolithmessg. u. d. ebenen Polygonometrie. 2. Aufl. 8. Hannover, Helwing's V. 4 Mk.

Nehls, C., üb. graph. Integration u. ihre Anwendung in d. graph. Statik. 8. Hannover, Rümpler. 8 Mk.

Schell, A., Distanzmesser m. der Basis an d. Instrumente. 8. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Schlesinger, J., d. geodät. Tachygraph u. d. Tachygraph-Planimeter. 8. Wien, Faesy & F. 3 Mk. 60 Pf.

### **Mechanik.**

Boltzmann, L., üb. d. Aufstellg. u. Integr. d. Gleichgn., welche d. Molecularbewegg. in Gasen bestimmen. 8. Wien, Gerold's S. 70 Pf.

Neumann, C., Unters. üb. d. logarithm. u. Newton'sche Potential. 8. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Ott, E., Elemente d. Mechanik. 8. Zürich, Schulthess. 4 Mk.

Wernicke, A., Lehrb. d. Mechanik fester Körper. 3. Aufl. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 9 Mk.

#### **Optik.**

Happe, L., üb. d. physiolog. Entwicklungsgang d. Lehre v. d. Farben. 8. Leipzig, Veit & C. 1 Mk. 40 Pf.

Lang, V. v., Theorie d. Circularpolarisation. 8. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

#### **Astronomie und Meteorologie.**

Littrow, J. J. v., d. Wunder d. Himmels. 6. Aufl. 15—21. Lfg. 8. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Lockyer, N., Astronomie. Deutsche Ausg. besorgt v. A. Winnecke. 16. Strassburg, Trübner. 80 Pf.

Mädler's, v., Wunderbau d. Weltalls od. populäre Astronomie. 7. Aufl. Neu bearb. v. W. Klinkerfues. 1. Lfg. 8. Berlin, Bichteler & Co. 90 Pf.

Sirius. Hrsrg. v. R. Falb. J. 1877. 7. Hft. 8. Leipzig, Scholtze. Halbjährl. 5 Mk.

Ulc, O., d. Wunder d. Sternenvelt. 2. Aufl. 9. Hft. 8. Leipzig, Spamer. 80 Pf.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Ges. Hrsrg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 12. J. 1877. 2. Hft. 8. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

#### **Physik.**

Bohn, C., Ergebnisse physikal. Forschg. 1. Lfg. 8. Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

Lorberg, H., Lehrb. d. Physik f. höhere Lehranst. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Reidt, F., Sammlg. v. Aufg. u. Beisp. a. d. Trigonometrie u. Stereometrie. 1. Thl. Trigonometrie. 2. Aufl. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Reis, P., neue electr. Maschinen, insbesondere d. magnet.-electr. Maschinen u. deren Anwendgn. 8. Leipzig, Quandt & H. 2 Mk. 25 Pf.

Strodt, G. K., Physik f. d. unteren Klassen d. Schulen f. Bauhandwerker, Maschinenbauer u. s. w. 8. Holzminden, Müller. 1 Mk. 80 Pf.

Tait, P. G., Vorlesgn. üb. einige neuere Fortschritte d. Physik. Autoris. deut. Ausg. v. G. Wertheim. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 5 Mk.

#### **Vermischte Schriften.**

Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Classe. J. 1876. 2. Abth. Enth. d. Abh. aus d. Geb. d. Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie u. Astronomie. 8—10. Hft. 8. Wien, Gerold's S. 3 Mk. 40 Pf.

— dass. 2. Abth. 75. Bd. 1—3. Hft. 8. Ebd. 8 Mk.

# Litterarischer Bericht

CCXLIV.

---

## Methode und Principien.

Das Münz-, Mass- und Gewichtssystem im Rechenunterricht für alle Rechenlehrer dargestellt von Dr. Albert Kallius, Lehrer am Berlinischen Gymnasium zum grauen Kloster. Oldenburg 1877. Gerhard Stalling. 34 S.

Was den Menschen durch beständigen Gebrauch geläufig ist, pflegt wenig beachtet zu werden. Kommt es dann auf ungewohnte Weise in Anwendung, so tritt oft ein auffallendes Ungeschick zutage. Dies gilt vom Decimalsystem, und der Umstand ist wol ein Hauptgrund, warum die mit dem neuen Münz-, Mass- und Gewichtssystem verbundene Erleichterung des Rechnens noch so wenig gekannt und gewürdigt wird. Der Verfasser sieht hierin einen Anlass dem Unterricht im Decimalrechnen eine grössere Aufmerksamkeit zuzuwenden. Nach seiner Erfahrung und Nachprüfung ist die Unbekanntschaft der Schüler mit der näheren Bewandniss im ganzen noch sehr gross. Die Schrift erteilt Ratschläge, wie dem abzuhelpen sei. An diesen ist es sehr zu billigen, dass sie nicht, wie es häufig zum Nachteil geschieht, den Schülern Mühe zu ersparen, sondern eher durch Hinzufügung von Mühe die Aufmerksamkeit auf das bisher Unbeachtete zu lenken suchen. Ist auch Manches nicht gerade neu, so ist doch der Gegenstand ziemlich vielseitig productiv behandelt.

H.

Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage streng deduktiv dargestellt von Johann Karl Becker, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Mannheim. Erster Theil. Mit 145 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877. Weidmann. 295 S.

Das vorliegende Werk ist eine entfaltete Darlegung der Principien der Geometrie nach ihrem logischen Inhalt. Um das vorgesetzte Ziel zu erreichen, ist der pädagogische sowie der systematische Gesichtspunkt ganz bei Seite gelassen. Die Aufgabe stellt zu grosse Anforderungen, als dass sie ohne vorgängige Trennung der Gesichtspunkte gelöst werden könnte. Manche Versuche in gleichem Sinne sind in neuster Zeit zu Tage getreten. Die gegenwärtige Bearbeitung möchte wol eine vor allen früheren hervorragende Leistung zu nennen sein. Es sind darin die gesammten principiellen Fragen aus dem Versteck ans Licht gezogen, in vortrefflicher Klarheit, ohne Entstellung der Tatsachen durch eingemischte Strebungen, aufgefasst und in einfachster Form durch didaktische Aufstellungen gelöst. Der Verfasser räumt gern die Möglichkeit von Irrungen ein, indem er sich trotzdem bewusst ist einen gesicherten Fortschritt getan zu haben; denn sein Werk ist kein künstlicher Bau, der zusammenbricht, wenn eine Stütze versagt; nichts ist auf die Spitze des Wortes gestellt, vielmehr alles im freien Gedanken, den Gegenstand und die Aufgabe vor Augen, zur Reife gebracht, dann erst in die geeignete Darstellungsform gebracht. Es tritt uns darin die grosse Ueberlegenheit derjenigen Logik, welche erst denkt, dann spricht, über die gewöhnliche formelle Logik, welche nur innerhalb der oft sehr zufälligen Grenzen des Wortes zu denken vermag, recht deutlich entgegen. In Verbindung hiermit steht wol auch die Ansicht des Verfassers über die Axiome, dass, wofern sie nur sind, was sie sein sollen, nämlich von selbst einleuchtend, wir nicht so wenige, sondern so viele als möglich statuiren müssten. Er stellt deren 7 oder 8 auf; ist aber stets bereit ein neues hinzuzufügen. Auf die Genesis der Begriffe und der den Axiomen zugrunde liegenden Erfahrungen geht er nicht ein, nimmt vielmehr deren Resultate auf, sofern die Deutlichkeit eines jeden unbestritten ist; gleichwol ist in den Herleitungen die Leitung durch die Genesis oft zu erkennen. Der Stoff des Buches, in welchem Planimetrie und Stereometrie ungetrennt erscheint, ist zu ausgedehnt und mannichfaltig, um den besondern Inhalt vorführen zu können; vieles ist darin originell instructiv, manches sogar unmittelbar für die Schule verwendbar. Zu letzterem ist die Erklärung des Winkels zu rechnen. Es wird unbedenklich ausgesprochen: Der Winkel ist die Winkelfigur; mit der Länge der Schenkel macht man sich nur nichts zu tun — unbedenklich und mit Recht, denn die Grösse des Winkels

muss unter allen Umständen durch die Bedingung der Gleichheit und Ungleichheit besonders definirt werden. Mit diesem sonst fast überall bewährten klaren Blicke ist es nun kaum vereinbar, wie dem Verfasser die Einwände gegen seinen Beweis des Parallelsatzes — es ist der bekannte Scheinbeweis mittelst der Winkelblätter — so ganz unverstanden bleiben konnten. Er sagt, man wendete ein, ein Winkelblatt sei, weil unendlich, keine Grösse und könne nicht ein Teil sein oder Teile haben, und verteidigt das Recht dasselbe Grösse und Teil zu nennen. Glaubt der Verfasser wirklich mit einem Namen eine Kluft überbrücken zu können, deren Vorhandensein sowie die Bemühungen der Mathematiker sie zu bewältigen ihm doch sehr wohl bekannt sind? Zunächst ist der Einwand undentlich ausgedrückt. Sagen wir statt „unendlich“ lieber „unvollständig begrenzt“ und statt „Teil“ lieber „Region“; statt „könne nicht Teil sein“ lieber „bedürfe um als Teil behandelt zu werden neuer Definitionen und Beweise“. Denn, da ein Winkel innerhalb eines gleichen Winkels bei gleich gerichteten Schenkeln construirt eine Region des letztern ausser sich übrig lässt, so passen die Begriffe vom Teile nicht auf die Region. Jeder Versuch aber die verlangten Definitionen und Beweise zu liefern führt uns auf den Parallelsatz selbst zurück, der stets dazu vorausgesetzt werden muss. Ungenügend ist ferner die Definition der Proportion. Durch sie wird zwar das Verhältniss als Function einer Variabeln bestimmt, aber sie ist kein Kriterium für eine einzelne Proportion, was doch in der Elementarmathematik gefordert werden muss.

H.

### Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für den Schulgebrauch. Von Johann Karl Becker, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Mannheim. Erstes Buch: Das Pensum der Tertia und Secunda. Zweites Buch: Das Pensum der Prima. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877. 370 S. (Jedes Buch einzeln käuflich.)

Der erstere Cursus umfasst das Rechnen mit ganzen Zahlen, die Teilbarkeit der Zahlen, das Rechnen mit rationalen Zahlen, die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, die algebraischen Gleichungen 1. und 2. Grades nebst Proportionen. Die Methode ist die rein arithmetische. Die Behandlungsweise zeichnet sich durch richtige Logik und allseitige Berücksichtigung der Erfordernisse, Genauigkeit des Ausdrucks ohne Ueberladung mit Worten in hohem Grade aus. Ist es auch nicht am Orte die vielen sehr gewöhnlichen Misgriffe bei

einer Arbeit zu erwähnen, welche sich eben durch deren Meidung verdienstlich zeigt, so möge doch wenigstens ein Hauptpunkt genannt werden. Die algebraische Operation ist keine Auswertung, sondern eine Transformation. So wichtig diese Lehre für das Verständniss ist, und so sehr sich auch die Bemerkung aufdrängt, dass durch die Behandlung der Operation als Transformation die Auffassung erleichtert, der Blick erweitert und in gleichem Masse der Umfang des receptiv zu erlernenden Stoffes verringert wird, so haben es doch die meisten Bearbeiter von Lehrbüchern vorgezogen, der Gewohnheit des gedankenlosen Rechnens Rechnung tragend der Operation den Anschein einer Auswertung zu geben. Die vorliegende Bearbeitung gehört zu den wenigen, welche in diesem Punkte richtig zu Werke gehen, und zwar geschieht dies nicht bloss durch vorübergehende Berücksichtigung, sondern es ist durchgehendes Princip mit ausgedehntester Anwendung. Anfänglich wird darauf hingewiesen, dass man Rechnungen in verschiedener Ordnung vollziehen kann; hieran schliessen sich allgemeine Sätze, die dann in Formeln dargestellt immer Anwendung nach 2 Seiten hin gestatten, und in dieser Gestalt ausführlich ausgesprochen werden. So gelangt das System der Sätze zu einer Uebersichtlichkeit, wie sie dem Verfahren gewiss allgemeine Zustimmung erwerben wird. Um auf das Einzelne einzugehen, so ist der Passus über die Grundbegriffe musterhaft. Ueber diesen und das Nächstfolgende ist Besonderes nicht hinzuzufügen. Weiterhin aber folgt ein Abschnitt über positive und negative Zahlen, der entschieden verfehlt ist. Im Grunde war die Lehre von den algebraischen Zahlen in der Lehre von den algebraischen Summen *implicite* enthalten; es war nur nötig das Innere nach aussen zu kehren und die erforderlichen Aufstellungen zu machen, wozu bereits alles eingerichtet war. So wäre eine leichtfassliche Theorie, Begriff und Rechnungsverfahren, nach einheitlicher Methode hervorgegangen. Der Verfasser jedoch zerreisst den Nexus und nimmt einen neuen, heterogenen Ausgang in den entgegengesetzten Qualitäten, auf welche der Begriff entgegengesetzter Zahlen allein gebaut erscheint. Da der Begriff der negativen Zahlen ein allgemein gültiger, seine Anwendung nicht auf die Fälle der Darstellbarkeit in entgegengesetzten Qualitäten beschränkt ist, so ist es an sich unrichtig letztere zur Grundlage zu nehmen. Noch schlimmer ist es, dass von dieser ausgehend die Begründung der Multiplicationsregel nie zu rechter Deutlichkeit gelangt, während dieselbe sich doch unmittelbar aus der Multiplication der algebraischen Summen ergibt. Die negativen Zahlen haben Bedeutung, sofern die Rechnung mit ihnen zu positiven Resultaten führt. Kein theoretisches Resultat aber ist letztes Resultat, sondern erwartet weitere Verwendung. Folglich hat das negative Resultat oder die resultirende Zahl von unbekanntem Vorzeichen gleichfalls immer Be-

deutung. Nur beim Beispiel aus der Wirklichkeit würde das negative Resultat die Unmöglichkeit der Data anzeigen. Hier erst ist es an der Stelle, durch Einführung der entgegengesetzten Qualitäten auch für einige solche Fälle Bedeutung für die Wirklichkeit zu gewinnen und so den Datis Gültigkeit zu verleihen. Bei der im übrigen so rühmlich beobachteten Vollständigkeit muss es auch als ein Mangel angemerkt werden, dass nirgends von dem Falle die Rede ist, wo ein Buchstab eine negative Zahl bedeutet, ein Fall der doch hernach bei Auflösung der Gleichungen nicht ausgeschlossen werden kann. Es ist eine entschiedene Discontinuität in der Doctrin, wenn erst die negativen Zahlen nur einen auf Fälle beschränkten Sinn haben, dann plötzlich Zeichen in allgemein algebraischer Bedeutung auftreten, ohne dass vorher eine Erklärung darüber gegeben wird. Analog verhält sich die Sache in der Lehre von den Brüchen. Es entspricht der Einheitlichkeit der Methode, vereinfacht dieselbe, erweitert den Blick und begünstigt die Uebersicht, dass man den Bruch gleich anfangs als Rechnungsgrösse auffasst, gerechtfertigt durch das ganzzahlige Resultat, sei dieses vorliegend oder der Anwendung vorbehalten. Diese suspendirte Rechtfertigung ist der wirklichen Praxis des Rechnens ganz gemäss; die Statistik führt uns auf den Fall, wo auch die gebrochene Personenzahl Bedeutung hat; nie aber hat man während des Rechnens die Construction der Zahl im Sinne. Dass nun der Verfasser es gleichwol vorgezogen hat, den Begriff des Bruches auf seine Darstellung durch veränderte Einheit zu gründen, ist insofern von geringerem Nachtheil, als sich alle notwendigen Sätze daraus einfach genug herleiten lassen. Im übrigen ist zu bemerken, dass innerhalb der allgemein theoretischen Behandlungsweise, welche dabei immer den Grundzug des Ganzen bildet, eine grosse Bevorzugung der Praxis und des Decimalsystems zu Tage tritt. Einigermassen wird dadurch die systematische Gestaltung beeinträchtigt; doch soll hierauf kein grosses Gewicht gelegt werden. Auf jeden Abschnitt folgt eine grössere Anzahl von Fragen und Uebungsaufgaben. Zum Selbstunterricht empfiehlt der Verfasser das Buch ausschliesslich für Begabtere; die Bearbeitung habe nur den Schulgebrauch im Auge gehabt.

Der Cursus des 2. Buchs umfasst die Kettenbrüche und diophantischen Gleichungen, erstere hergeleitet durch Grenzeinschliessung, letztere gelöst durch und ohne erstere, die arithmetischen und geometrischen Progressionen (Zinseszins- und Rentenrechnung), das Rechnen mit complexen Zahlen, ausgehend von der Construction, enthaltend die Anfangsgründe der Moivre'schen Theorie, jedoch ohne die Exponentialform, und einige Sätze über höhere Gleichungen, ferner die Permutationen, Combinationen und Variationen mit Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, dann auf den polynomischen und bino-

mischen Lehrsatz, dann die ganzen algebraischen Functionen und die algebraischen Gleichungen mit Anwendung der Derivationen, die unendlichen nach Potenzen einer Grösse entwickelten Reihen und deren Convergenz, die Determinanten, und im Anhang eine auf Summation der höheren arithmetischen Reihen bezügliche Aufgabe. Die Determinantenlehre wird mit einer Vorbetrachtung über Auflösung simultaner linearer Gleichungen eingeleitet, doch ist die Behandlung davon unabhängig, gleich von Anfang allgemein und wenigstens zum Teil geeignet die Vorzüge der Theorie ins Licht zu stellen. Der Additionssatz wird durch Unterdeterminanten hergeleitet, obgleich seine schliessliche Formulirung auf den weit kürzeren und instructiveren Weg der Substitution hindeutet. Ein gleiches gilt von der Methode der Behandlung linearer Gleichungssysteme. Die Erörterungen sind ziemlich ausführlich; in manchen Punkten hätte sich wol durch kürzere Zusammenfassung ein leichter Einblick erreichen lassen.

H.

Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik. Bearbeitet von Dr. H. Suhle, Professor am Carls-Gymnasium zu Bernburg. Erstes Heft. Köthen. Paul Schettler. 94 S.

Das Vorliegende ist für den Unterricht in Quarta bestimmt. Es umfasst ausser den 4 Species, bei welchen Potenzen nur als Producte, Wurzeln gar nicht vorkommen, die Gleichungen 1. Grades mit einer und mehreren Unbekannten und die Proportionen. Ein Anhang behandelt die Decimalbrüche und die Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln. Die Methode ist die rein arithmetische mit successiver Erweiterung des Zahlengebietes; auf die erneuerte Begründung der Operationen nach jedem solchen Schritte ist ohne grosse Weitläufigkeit sorgfältig Rücksicht genommen. Ueberhaupt lässt sich nicht verkennen, dass in denjenigen Punkten, die gemäss dem Standpunkte der Anfänger nicht erschöpfend erörtert und formulirt werden konnten, doch mit viel Geschick darauf geachtet worden ist, keine falschen Vorstellungen aufkommen zu lassen. Hiervon machen nur ein Hauptpunkt und ein nebensächlicher Ausnahmen. Drei Aeusserungen im Anfang veranlassen geradezu den Schüler  $a+b$  für den Ausdruck zweier Zahlen zu halten, zuerst die unrichtige Erklärung des Begriffs Rechnen, dann der Satz: „Wenn das Resultat einer Rechnung selbst wieder als Zahl gelten soll u. s. w.“ (also  $a+b$  ist nicht immer eine Zahl?) dann der Satz: „Die Addition ungleichnamiger Zahlenausdrücke kann nur ausgeführt werden, indem man dieselben durch das Additionszeichen verbindet“. Gegen den Irrtum ist im Folgenden nirgends ein Correctiv gegeben; denn die Fassung aller Operationssätze lässt beide Deutungen, die der Zahl-Veränderung und der Verwandlung bei



unverändertem Werte, zu, und von umgekehrter Anwendung einer Verwandlungsformel ist nur einmal beiläufig die Rede. Diese schöne Harmonie der Sätze mit seiner Erklärung mag vielleicht dem Verfasser Motiv gewesen sein. Sie besteht leider nur in der Schule; der Lehrer kann verändern lassen, die Forderungen des Lebens stimmen damit nicht überein. Zweitens ist zu erwähnen, dass vom Unendlichen eine ganz ungenügende Erklärung und falsche Anwendung gegeben. Hier war es an der Stelle zu sagen: Mit 0 kann man nicht dividiren.

H

J. H. T. Müller's Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Zweite, gänzlich umgearbeitete Auflage, mit vielen dem Text eingedruckten Holzschnitten. Herausgegeben von Prof. Dr. K. L. Bauer, Lehrer der Physik und Mathematik am Realgymnasium in Karlsruhe. Dritter Theil. Halle 1877. Buchhdl. d. Waisenhauses. 223 S.

Der gegenwärtige Teil des Lehrbuchs umfasst die Proportionalität der Linien, vorbereitet durch einen Abschnitt über Messung und Proportionen, die Aehnlichkeit der ebenen Figuren, Teilung der Figuren, Einiges aus der neuern Geometrie und das Apollonische Problem. Der Umfang des Stoffes ist also im Vergleich mit dem des Buches gering, und letzteres scheint darauf berechnet, dass der Schüler in unbeschränkter Musse bei dem Thema verweilen soll. Die Behandlungsweise ist ausführlich, gründlich und reichhaltig, doch findet sich auch Vieles vieltheilig gespalten vorgeführt, was sich aus einer einzigen Anschauung heraus verstehen lässt und man auch wol lieber in einen Satz zusammenfassen wird. Strenge Bündigkeit ist nicht zu vermissen; doch ist auch in eigentümlicher Weise dafür gesorgt, dass keine Lücken an den Tag treten können; in den principiellen Punkten, in denen viele Autoren fehlgegangen sind, werden nämlich anfangs die Elemente der Begründung in mehr als genügender Form entwickelt, nachher, wo sie in Anwendung kommen sollten, folgt ein blosser Hinweis, nach welchem der Schüler sich den Beweis selbst zusammensetzen muss. Einen solchen Pleonasmus enthält die Erklärung und Erörterung der Incommensurabilität. Diese ist eine Verbindung der Euklid'schen Grenzeinschliessung und der Anwendung unendlich kleiner Differenz. Jedes von beiden allein reicht hin; nur ist erstere Methode in manchen Fällen sehr umständlich, letztere zwar bei richtiger Behandlung einfach und leicht fasslich, doch nicht so auf der Hand liegend, dass durchgeführte Beweise in den Fällen der Anwendung, z. B. bei der Kreismessung, entbehrt werden könnten. Unrichtig dem Wortlaut nach ist der Satz II. p. 338. Dass ein Kettenbruch nie abbricht, kann in manchen Fällen bewiesen werden, aber ein allgemein brauch-

bares Kriterium kann es offenbar nicht sein. Hier steht, der Umstand zeigte sich bei fortgesetzter Messung. Was nicht ist, kann man auch nicht finden wollen. Im übrigen ergibt sich so ziemlich der Inhalt aus den Titeln der Abschnitte; alles dazu gehörige, alles notwendige sowol wie vieles ausserdem wissenschaftliche, wird man darin behandelt finden. H.

Lehrbuch der Geometrie im Umfange des vollen Gymnasialcursus Bearbeitet von A. Wohlgemuth, Inspector und Oberlehrer am Nicolai-Gymnasium zu Libau. Libau 1877. G. L. Zimmermann. 164 S.

Das Buch kann nur die Bestimmung beanspruchen, von allen Gegenständen der gesamten Schul-Geometrie, einschliesslich der ebenen und sphärischen Trigonometrie, in grösster Kürze eine Vorstellung zu geben und die Elemente der Berechnung von Raumgrössen aufzustellen. Dies ist in guter Ordnung geschehen. Die logischen Erfordernisse sind ganz bei Seite gelassen, die Ausdrücke vielfach schief und ungenau, für das selbständige Denken so gut wie nichts getan. Auch hier, wie noch in vielen Lehrbüchern, wird die Geometrie die Wissenschaft von den räumlichen Grössen genannt, eine Definition die sofort in auffallenden Widerspruch mit der Lehre selbst tritt, wenn unbegrenzte Linien, deren Schnitte u. s. w., die doch offenbar keine Grössen sind, sich als vornehmliche Gegenstände der Geometrie zeigen. Für den Parallelsatz ist ein falscher Beweis aufgestellt. Der Fall der Incommensurabilität von Linien ist anfänglich erklärt, weiterhin wieder vergessen. H.

Die Schule der Geometrie und Trigonometrie der Ebene. Von Professor C. Hellwig, Oberlehrer an der Realschule 1. Ordnung zu Erfurt. Erster Cursus: Die einfachsten Betrachtungen über die ebenen geradlinigen Figuren und den Kreis. Zweite Auflage. Erfurt 1877. Carl Villaret. 48 S.

In der Tat ist, wie es der Specialtitel sagt, das Vorliegende mehr eine Reihe von Betrachtungen als ein eigentlicher, streng mathematischer Lehrcursus. Wenn gleich das deductive Element nicht ganz darin fehlt, so ist es doch von untergeordneter Bedeutung, und das Hauptgewicht auf die Beobachtung und die Fixirung der Merkzeichen zu legen, durch welche der Schüler im Gebiete der Elementargeometrie orientirt werden soll. Von dieser Seite angesehen lässt sich jedoch die Bearbeitung keineswegs musterhaft nennen. Die Begriffe sind manchmal nicht gehörig begrenzt und geschieden, der Ausdruck zweideutig, die Benennung abweichend sowol vom gewöhnlichen Gebrauch als von der natürlichen Deutung. Der Satz p. 2. z. B. „Die

einfachste Linie“ (Gerade) „wird durch 2 Punkte vollkommen und einzig bestimmt“ — ist zweideutig; die 2 Punkte bestimmen nicht die Gestalt, sondern nur bei fester Gestalt die Lage der Linie. Erstere Deutung, an der freilich der Kundige vorbeieilt, ist von Natur die nächst liegende und hätte durch den Wortlaut vermehrt werden müssen. Es war sehr leicht und durch Rücksicht auf den Schüler geboten durch Nennung des entscheidenden Wortes „Lage“ den Gedanken unmittelbar auf den, gar nicht so auf der Hand liegenden, richtigen Sinn zu lenken. Die Namen „Strahl“ und „Strecke“ werden anders als gewöhnlich gebraucht, gewöhnlich nämlich und mit vollem Grunde im Sinne einer, festen Richtung, hier ohne Beachtung der 2 entgegengesetzten Richtungen. Der Strahl der Geometrie ist nach dem Lichtstrahl benannt, der von einem Punkte ausgeht. Hiervon darf man ohne wichtigen Grund nicht abweichen um nicht Verwirrung herbeizuführen. Strahl für unbegrenzte Gerade ist ein zweiter Name für dieselbe Sache, mithin überflüssig und insofern irreleitend, als die Identität nirgends ausgesprochen, also der Leser veranlasst wird einen Unterschied zu vermuten. Was die Strecke betrifft, so würde der Verfasser wahrscheinlich die Notwendigkeit der Unterscheidung entgegengesetzter Strecken selbst empfunden haben, wenn er die Betrachtung, auf die sich seine Erklärung der Richtung stützt, fortgesetzt und den Ausgangspunkt mannichfaltig verlegt hätte; wie man in der That in manchen Lehrbüchern einen nachträglichen Uebergang zur einseitig gerichteten Strecke findet. Das Vorstehende möge als Vorschlag zu leicht auszuführenden Verbesserungen verstanden werden und soll die Brauchbarkeit des Buchs nicht herabsetzen. H.

Abriss der ebenen Trigonometrie. Für den Unterricht an höheren Lehranstalten bearbeitet von A. Hössrich, Professor an der Realschule 1. O. zu Saalfeld. Mit einer lithographirten Figurentafel. Zweite, revidirte Auflage. Saalfeld 1877. W. Wiedemann. 22 S.

Das Buch enthält nach einander die Goniometrie nebst Anwendung auf den irreducibeln Fall der kubischen Gleichungen, dann die Berechnung des rechtwinkligen, dann des schiefwinkligen Dreiecks. Der Vortrag ist der pragmatisch erläuternde. An Verständlichkeit, Bündigkeit und Vollständigkeit lässt sich im allgemeinen nichts vermissen. Nur die Erörterung der unendlichen Werte der goniometrischen Functionen ist ungenügend: in der Tabelle ist theils  $\infty$ , theils  $(-\infty)$  aufgeführt; woher das letztere kommt, ist gar nicht erklärt, ebenso wenig die Angabe  $(-0)$ . Da sich die Einführung des  $\infty$  an die Betrachtung der Variation anschliesst, so gehörte nur eine geringe, aber sehr notwendige Beifügung hinzu, um alles zur Deutlichkeit zu bringen.

H,

Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen nebst einem Anhang mit Aufgaben über biquadratische Gleichungen. Ein Supplement zu jeder Sammlung algebraischer Aufgaben. Von Dr. Emil Lampe, Professor an der Luisenstädtischen Gewerbeschule und an der Königlichen Kriegsakademie zu Berlin. Berlin 1877. H. W. Müller. 112 S.

Dass die Herausgabe des gegenwärtigen Buchs einem anerkannten Bedürfniss entgegenkommt, dass damit den Lehrern der Algebra ein vortrefflicher Dienst geleistet wird, braucht kaum gesagt zu werden. Geometrische Aufgaben für kubische Gleichungen der Art zu finden, dass sowohl die Stellung als auch die Lösung und die Deutung der Wurzeln einfach genug ist um sie als passende Uebung für Schüler gebrauchen zu können, ist nicht leicht; es scheinen solche den Bearbeitern von Aufgabensammlungen nicht zur Hand gewesen zu sein, denn man findet darin gewöhnlich bei den kubischen Gleichungen nur Zahlenbeispiele. Alle 3 Forderungen sind aber bei der vorliegenden Auswahl von 66 Beispielen für kubische und 11 Beispielen für biquadratische Gleichungen erfüllt. Sie sind nach dem Lehrstoff der Geometrie, auf welchen sie Bezug haben, geordnet; die ersten 6 beziehen sich auf Planimetrie, die folgenden 8 auf ebenflächige Körper, die nächsten 37 verbinden diese mit runden Körpern. Bei den biquadratischen Gleichungen treten auch Cykloiden, Epicykloiden und Hypocykloiden auf. Der Sammlung vorausgeschickt sind die nötigen Formeln. Auf jede Aufgabe und deren Lösung folgen 1 oder 2 Zahlenbeispiele.

H.

L. A. Sohncke's Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage, herausgegeben von Dr. Hermann Amstein, Professor der höheren Mathematik und theoretischen Mechanik an der Academie in Lausanne. Halle 1877. H. W. Schmidt. 298 S.

Die Sammlung berücksichtigt reichlich und vielseitig das Bedürfniss der Anfänger im Studium der Integralrechnung durch zweckmässige Uebungsbeispiele aus allen Zweigen derselben, denen, soweit es erforderlich scheint, Anleitung zur Lösung nebst Resultat beigelegt, und die allgemeinen Grundsätze und Regeln des Verfahrens, jedesmal nach einer Methode, vorausgeschickt sind. Der erste Teil bezieht sich auf unbestimmte Integration, erst rationaler, dann irrationaler, dann transcender Differentialen von Functionen einer Variabeln, dann vollständiger Differentialen von Functionen mehrerer Variabeln, im zweiten Abschnitt ausgedehnt auf elliptische Integrale. Der zweite Teil enthält einfache bestimmte Integrale, näherungsweise Berechnung

bestimmter Integrale, Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie, Doppel- und dreifache Integrale. Dann folgt ein Anhang über Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung und über Variationsrechnung. Nach Aussage des Herausgebers hat die Sammlung in der neuen Auflage eine tiefgreifende Umwandlung erfahren. Sämmtliche Beispiele sind neu durchgerechnet und dabei eine grosse Zahl von Druckfehlern früherer Auflagen berichtigt worden. Bei der Bearbeitung sind die Werke von Frenet, Todhunter, Sellett und Stegmann benutzt worden. H.

Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. Von Josef Mikolitzky, k. k. Professor der 1. deutschen Staats-Oberrealschule in Prag. Wien 1877. Eduard Hölzel. 57 S.

Das Vorliegende ist ein System von 186 Aufgaben, durch die Anordnung für einen zusammenhängenden Uebungscursus eingerichtet, indem sich die spätern Aufgaben häufig auf die frühern stützen. Die Lösung folgt unmittelbar nach jeder Aufgabe. Die Wahl der Data wendet nur in geringem Masse Specialisirung an, bleibt vielmehr grösstenteils im unmittelbaren Anschluss an die Theorie. Der erste Abschnitt betrifft Punkte, Gerade und Ebenen, der zweite Prisma und Pyramide; von ihnen unterscheidet sich der reichhaltigste, dritte nur dadurch, dass Kugel, Kegel und Cylinder theils bei der Lösung in Anwendung kommen, theils unter den Datis auftreten. H.

Tables for the formation of logarithms and antilogarithms to twenty-four or any less number of places; with explanatory introduction and historical preface. By Peter Gray, F. R. A. S., Honorary Membre of the Institute of Actuaries; and author of „Tables and formulae for the computation of life contingencies“, „Tables for the formation of logarithms and anti-logarithms to twelve places“, etc. London 1876. Charles and Edwin Layton. 92 S.

Die Logarithmen sind briggs'sche, sämmtlich auf 24 Stellen angegeben. Voraus geht eine Tafel der Logarithmen der Zahlen 2 bis 9 zur Reduction der Anfangsziffer der gegebenen Zahl auf 1. Dann folgt eine Tafel über

$$\log(1 + 0,001^k \cdot n)$$

in 5 Columnen für  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  und  $n$  von 1 bis 999. Die folgenden Columnen werden aus der 5ten entnommen durch Division mit 1000. Wie man mit Hülfe einer solchen Tafel den Logarithmus einer jeden einzelnen Zahl und diese aus jenem berechnen kann, ist deutlich und bekannt genug. Besondere Vorteile sind nicht in An-

wendung gebracht. Das Verfahren ist also, und das macht den Unterschied andern Tafeln zu gleichem Zwecke gegenüber aus, einfach, kunstlos und gleichmässig, so dass es sich ohne viel Ueberlegung üben lässt, und man vor principiellen Fehlern nicht auf der Hut zu sein braucht.

H.

Tables de logarithmes 'à 12 décimales, jusqu' à 434 milliards, avec preuves. Par A. Namur, Secrétaire de l'École Moyenne de l'État, à Truin-sur-sambre. Précédées d'une introduction théorique et d'une notice sur l'usage des tables. Par P. Mansion, Professeur à l'Université de Gand, publiées par l'Académie royale de Belgique. Bruxelles 1877. F. Hayez. 51 S.

Die Logarithmen sind briggs'sche, angegeben auf 15 Stellen, also mit 3 überschüssigen. Das Princip ist eine Verbindung der Interpolation mit der Zerlegung in Factoren. Eine Tafel von 2 Seiten Umfang giebt zuerst die Logarithmen für ein kleines Zahlenintervall unmittelbar unterhalb des (mit 1 000 000 multiplicirten) Moduls, das Entree zu 6 Stellen. Die 6 übrigen Ziffern der 12stellig gegebenen Zahl sind dann mit der nebenstehenden Logarithmendifferenz zu multipliciren. Da diese Differenz hier durchgängig die Anfangsziffern 100 hat, so ist die Multiplication nie mehr als dreiziffrig. Durch wiederholte Multiplication oder Division mit wenigen geeigneten und für leichte Rechnung ausgewählten Zahlen lässt sich jetzt das kleine Intervall zum ganzen erweitern, und man braucht wiederum nur einige kleine Tafeln, welche die Logarithmen dieser Zahlen geben. Bei Aufsuchung des Logarithmus zur gegebenen Zahl wird man die Division wählen, so dass letztere zu multipliciren ist, bei der inversen Aufgabe die Multiplication. Sucht man nun vom gefundenen Logarithmen wieder die Zahl, oder umgekehrt, so wird im allgemeinen die Haupttafel beidemal ganz ungleich benutzt, die 2 Rechnungen sind dann durchgängig unabhängig von einander, und eine bietet immer vollständige Controle der andern. Der Herausgeber hat den Tafeln eine theoretische Begründung und eine Gebrauchserklärung beigelegt.

H.

Hilfstafeln für barometrische Höhenmessungen berechnet und herausgegeben von Ludwig Neumeyer, Premierlieutenant und Sections-Chef im topographischen Bureau des kgl. bayer. Generalstabes. München 1877. R. Oldenbourg. 194 S.

Jede der 2 zur Höhenberechnung erforderlichen Tafeln hat 2 Entrees. Die erste giebt für jedes Mittel der Barometerstände von 779,5 bis 600,5 Millimeter, aufgeführt als Seitenüberschriften durch

alle Millimeter, und für jede Differenz der Barometerstände von 0 bis 25 durch alle Zehntel Millimeter die Nullhöhe, welche der Voraussetzung einer Temperatur von  $0^{\circ}$  C. entspricht, die zweite für jede Nullhöhe und jede Temperatursumme die Temperaturcorrection. Die Aufführung der Nullhöhen in der 2. Tafel erspart bloss die Multiplication derselben.

H.

Tafeln zur Erleichterung der Anwendung der Sumner'schen Methode für den Seegebrauch. Mit Erläuterungen von Sir William Thomson, D. C. L., L. L. D., F. R. S., Professor der Naturwissenschaften an der Universität von Glasgow und Mitglied des St. Peters-Collegium Cambridge. Auf Veranlassung der Kaiserlichen Admiralität aus dem Englischen übersetzt und durch einige vom Verfasser nachgelieferte Zusätze erweitert. Berlin 1877. Ernst Siegfried Mittler und Sohn. Gr. 4<sup>o</sup>. 21 S.

Die Sumner'sche Methode bestimmt die Position eines Schiffes zu bekannter Zeit aus 2 successiven Sonnenhöhen als Durchschnitt der 2 Kreise auf der Erde, welche den constanten Sonnenhöhen entsprechen. Um die Zeichnung zu ersparen, hat der Verfasser eine Tafel über die in Betracht kommende Auflösung sphärischer Dreiecke gegeben, dieselben aber, weil sonst die Tafel zu gross ausfallen würde, in je 2 rechtwinklige sphärische Dreiecke zerlegt. Die Tafel steht auf 9 Seiten; voraus geht die theoretische Erörterung; es folgt ihr die Gebrauchserklärung.

H.







